

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал**

**№ 2(64)**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”  
**Основатели серии:** Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций

(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, включён в Единый  
государственный перечень научных изданий — «Белый список» (уровень 3)

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

**Ответственные секретари:** С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

**Редакционный совет:** Ю. Н. Радаев, И. Э. Келлер, В. П. Радченко,  
А. И. Шашкин, Л. Ю. Коссович, А. А. Маркин, Л. А. Игумнов, А. А. Алексеев,  
А. А. Буренин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. Н. Богданов, А. Н. Власов,  
Д. В. Георгиевский, В. В. Глаголев, Д. В. Иванов, Р. А. Каюмов, Д. М. Климов,  
В. А. Ковалев, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,  
Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, В. Н. Орлов,  
А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев,  
А. Д. Чернышов, А. В. Чигарев

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

**Адрес издателя:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1182

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2025

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK  
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO  
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA  
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal  
№ 2(64)**

**The Journal founder:** I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University  
**Founders of the series:** D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,  
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007  
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications  
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"  
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"  
(reg. No. 13109).

**Editor-in-chief:** B. G. Mironov

**Executive Editor:** Yu. N. Radayev

**Associate Editor:** N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

**Executive Secretary:** E. V. Murashkin, S. V. Matveev

**Editorial Council:** Yu. N. Radayev, I. E. Keller, V. P. Radchenko, A. I. Shashkin,  
L. Yu. Kossovich, A. A. Markin, L. A. Igumnov, A. A. Alekseev, A. A. Burenin

**Editorial Board:** V. G. Bazhenov, A. N. Bogdanov, A. N. Vlasov,  
D. V. Georgievskiy, V. V. Glagolev, D. V. Ivanov, R. A. Kayumov, D. M. Klimov,  
V. A. Kovalev, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin, L. A. Maksimova, N. V. Minaeva,  
Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin, V. N. Orlov, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov,  
A. N. Sporihin, A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. V. Chigarev

**Postal address::** ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

**Phone::** +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

**E-mail::** predel21@mail.ru

**Journal website::** <http://limit21.ru>







Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

## К ИЗБРАНИЮ ПРОФЕССОРА ДМИТРИЯ ВЛАДИМИРОВИЧА ГЕОРГИЕВСКОГО ЧЛЕНОМ–КОРРЕСПОНДЕНТОМ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**Аннотация.** Статья посвящена член-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, профессору, Дмитрию Владимировичу Георгиевскому. В настоящей библиографической заметке приводятся биографические сведения об этом крупном ученом-механике.

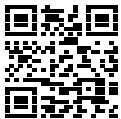
**Ключевые слова:** механика, персоналии, член-корреспондент РАН

**Мурашкин Евгений Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Радаев Юрий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



**для цитирования:** Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К избранию профессора Дмитрия Владимировича Георгиевского членом–корреспондентом Российской академии наук // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 7–52. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.013. EDN: ZJBOVW

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

*E. V. Murashkin, Y. N. Radayev*

**ON THE ELECTION OF PROFESSOR DMITRY VLADIMIROVICH  
GEORGIEVSKIY AS A CORRESPONDING MEMBER OF THE  
RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** This article is dedicated to Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, and Professor Dmitry Vladimirovich Georgievskii. This bibliographic note provides biographical information about this leading mechanical scientist.

**Keywords:** mechanics, personalities, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences.

**Evgenii V. Murashkin**, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Yuri N. Radayev**, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



**to cite this article:** *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On the election of Professor Dmitry Vladimirovich Georgievskiy as a Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 7–52. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.013

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

29 мая 2025 г. Д.В. Георгиевский был избран членом–корреспондентом Российской академии наук. Д.В. Георгиевский руководитель крупного научного коллектива Института механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Он внес существенный вклад в ряд научных направлений механики сплошных сред: устойчивость процессов течения и деформирования тел со сложными определяющими уравнениями, механика деформируемых тонких тел, технологические задачи обработки современных материалов. Д.В. Георгиевский является автором более 400 научных работ.

Д.В. Георгиевский родился 19 августа 1966 г. в городе Москве. Родители Владимир Павлович и Нина Кузьминична — инженеры, получившие высшее образование в МВТУ им. Н.Э. Баумана. В 1976–1981 гг. он обучался в средней школе № 279 им. А.Т. Твардовского г. Москвы. При этом он посещает физико-математический класс в указанной школе. В возрасте 14 лет он осваивает полную программу обучения средней школы и сразу после ее окончания поступает на обучение по отделению механики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

В 1986 г. Д.В. Георгиевский с отличием завершает обучение на механико-математическом факультете МГУ, где он специализировался по кафедре теории упругости. Научным руководителем по диплому был чл.–корр. РАН, проф. А.А. Ильюшин<sup>1</sup>.

После обучения в университете Д.В. Георгиевский поступает в очную аспирантуру отделения механики по кафедре теории упругости, обучение в которой завершает в 1989 г. успешной защитой кандидатской диссертационной работы по теме “Устойчивость процессов деформации тяжелых слоистых неупругих тел” по специальности 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела, выполненную под руководством А.А. Ильюшина в совете, председателем которого в то время был проф. П.М. Огибалов<sup>2</sup>. Официальными оппонентами по диссертационной работе выступили А.Б. Ефимов и А.Я. Сагомоян. Ведущей организацией был назначен Институт гидромеханики АН УССР (г. Киев).

В 1996 г. Д.В. Георгиевский в диссертационном совете при МГУ успешно защищает докторскую диссертационную работу по теме “Устойчивость вязкопластических течений с произвольным упрочнением” по специальности 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела. Формально научного консультанта

---

<sup>1</sup>А.А. Ильюшин — чл.–корр. РАН, проф., основатель и руководитель крупной научной школы и по сей день функционирующей в стенах МГУ им. М.В. Ломоносова. Он внес выдающийся научный вклад в математическую теорию пластичности, теорию термовязкоупругости, моделирование механических процессов с помощью теории процессов. Отметим книгу: Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. 1. Упруго — пластические деформации. М., Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с. Эта книга одна из первых монографий целиком посвященных теории пластичности. Затем был опубликован сборник переводов под редакцией ак. Ю.Н. Работнова (Теория пластичности: Сборник статей / Пер. с англ., фр. и нем. Л. А. Телешевой и Ю. А. Цвибак; Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 452 с.).

<sup>2</sup>П.М. Огибалов — д.ф.-м.н., проф. известен работами в области термовязкоупругости, вязкопластичности и теории структурированных сред. В 1969–1977 гг. — декан механико-математического факультета МГУ.

у диссертационной работы не было, однако им несомненно по существу являлся проф. Б.Е. Победря<sup>3</sup>. Официальными оппонентами выступили Н.Д. Алфутов, А.Б. Ефимов и И.А. Кийко. Ведущей организацией являлся Институт проблем механики АН СССР (г. Москва).

С 1989 г. Д.В. Георгиевский работает в Московском университете (в 1989–1991 гг. и с 2015 г. по настоящее время — на кафедре теории упругости, в 1991–2015 гг. — на созданной в 1987 г. новой кафедре механики композитов). С 2015 г. является заведующим кафедрой теории упругости МГУ. В 2012–2014 гг. заведовал лабораторией прочности и ползучести при высоких температурах НИИ механики МГУ. С 2005 по 2014 г. — заместитель декана механико-математического факультета МГУ. В 2014–2015 гг. — проректор — начальник Управления по работе с иностранными учащимися МГУ им. М.В. Ломоносова. С 2020 г. по настоящее время он является заведующим лабораторией упругости и пластичности НИИ механики МГУ. С 2021 г. — и.о. директора НИИ механики МГУ.

В 1995 г. Георгиевскому Д.В. было присвоено звание доцента по кафедре механики композитов. В 1999 г. Д.В. Георгиевскому присуждается ученое звание профессора по кафедре механики композитов. В 2016 г. он одним из первых был избран профессором РАН по отделению энергетики, машиностроения, механики и процессов управления.

В 2000 г. Д.В. Георгиевский стажировался в Университете Франш-Комтэ, Безансон, Франция (Université de Franche-Comté, Besançon, France) под научным руководством проф. G. Lallement по тематике, связанной с теорией определяющих соотношений в механике сплошных сред.

В 2010 г. Д.В. Георгиевский проходил научную стажировку в Техническом университете Берлина, Германия (Technical University of Berlin, Germany) под научным руководством проф. W.H. Müller. Исследования были посвящены гидродинамической устойчивости сдвиговых течений неньютоновских сред. Они интересны с точки зрения эффектов привносимых объемной вязкостью, физическая интерпретация которой сопряжена со значительными трудностями. Учет объемной вязкости разумно выполнять только в сжимаемых течениях (необратимо сжимаемых по терминологии Д.Д. Ивлева), сопровождающихся быстрыми осцилляциями. Сжимаемость среды вносит существенные осложнения даже в геометрические уравнения механики континуума, имеются ввиду обобщения

---

<sup>3</sup>Б.Е. Победря — д.ф.-м.н., проф., известен результатами в области механики деформируемого твёрдого тела, теории определяющих соотношений в форме анизотропных тензорных операторов и вычислительной механики композитов. Основатель (1987 г.) кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ и её первый заведующий. Б.Е. Победря известен также своим переводом монографии В. Новацкого Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с. Он являлся председателем специализированного совета при МГУ по присуждению кандидатских и докторских степеней по специальностям 01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела; 01.02.06 — динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры. Этот совет сыграл важную роль в подготовке кадров высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела.

уравнений Гейрингер на случай сжимаемых течений (МТТ 100 лет Ишлинского 2013).

Основные научные интересы Д.В. Георгиевского связаны со следующими научными направлениями. Теория определяющих соотношений в механике сплошной среды. Предложенный и развитый в работах Л.И. Седова<sup>4</sup> и В.В. Лохина<sup>5</sup> аппарат нелинейных тензорных функций<sup>6</sup>. Теория установочного эксперимента для нахождения материальных функций. Феноменологическое описание напряжённо-деформированного состояния при многомасштабном моделировании. Асимптотические методы в теории тонких тел. Деформирование тел с сильно различающимися характерными размерами. Устойчивость процессов деформирования в механике деформируемого твёрдого тела и механике композитов<sup>7</sup>. Метод Ляпунова–Мовчана и его развитие. Гидродинамическая устойчивость течений со сложной реологией<sup>8</sup>. Спектральные задачи устойчивости. Обобщение метода Ритца–Галеркина. Оценки главной собственной частоты в

---

<sup>4</sup>Академик Л.И. Седов известен существенным научным вкладом в различные разделы механики. Здесь укажем на его фундаментальные результаты в механике жидкости и газа, теории конечных деформаций, теории нелинейных тензорных функций и вариационных принципов в механике континуума (сейчас этот принцип носит его имя). Он автор монографий и популярных учебников по механике сплошных сред, создатель крупнейшей научной школы в области механики сплошных сред. Будучи крупным учёным, широко известным за пределами СССР, он часто представлял СССР на международных научных мероприятиях и в международных научных организациях. В память о Л.И. Седове в стенах НИИ механики МГУ сохраняется его мемориальный кабинет, создателем и куратором которого является к.ф.-м.н. А.Н. Богданов.

<sup>5</sup>В.В. Лохин известен результатами по теории нелинейных тензорных функций и теории алгебраических инвариантов. Он перевел на русский язык хорошо известные книги: Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. и Спенсер А.М.Ж. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с. Справедливости ради следует сказать, что обе указанные книги изобилуют опечатками, значительно снижающими их познавательную ценность и препятствующими их использованию в качестве учебников.

<sup>6</sup>Теория нелинейных тензорных функций может быть изложена с алгебраической точки зрения в терминах комитантов. Комитантом в тензорной алгебре называется объект, определяемый как некоторый набор функций от компонент тензора, которые при смене системы координат меняются по тензорному закону вместе с самим тензором. В отличие от инварианта комитант имеет ненулевой ранг, вообще говоря, отличный от ранга исходного тензора. Теории комитантов посвящены третья и четвертые главы известной монографии (Гуревич Б.Г. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, 1948. 408 с.).

<sup>7</sup>В.Д. Ключников — д.ф.-м.н., проф., заведующий кафедрой теории пластичности МГУ в 1986–1999 гг. Параллельно со школой А.А. Ильюшина, В.Д. Ключников (будучи учеником ак. Ю.Н. Работнова) развивал собственные концепции устойчивости. Отметим принадлежащие ему монографии: Ключников В.Д. Устойчивость упруго-пластических систем. М.: Наука, 1980; Ключников В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986; Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1997. 207 с.

<sup>8</sup>Течения реологически сложных сплошных сред представляют интерес с точки зрения физических механизмов процессов переноса, характеризующихся термином "вязкость". Известны три процесса переноса: перенос массы (диффузия), перенос энергии (теплопроводность),

задаче Орра–Зоммерфельда. Регулярно-возмущенные задачи и их решение методом малого параметра<sup>9</sup>. Методы интегральных соотношений и энергетические (вариационные) методы оценки устойчивости. Неньютоновские и вязкопластические течения. Аналитические и численные решения. Автомодельность и задача Стефана. Приложения в нефтяной промышленности, геотектонике, гляциологии<sup>10</sup>. Слабонеоднородные течения. Описание переходов к перемешиванию. Тяжёлые гравитационно-неустойчивые многослойные системы. Доминирующие волны, характеризующие потерю гравитационной устойчивости. Механика многомерного твёрдого тела и многомерной сплошной среды.

На механико-математическом факультете МГУ Д.В. Георгиевский регулярно читает курсы: «Механика сплошной среды», «Механика деформируемого твёрдого тела», «Теория упругости (избранные главы)», «Теория определяющих соотношений», «Устойчивость систем с бесконечным числом степеней свободы», «Устойчивость процессов деформирования», «Теория пластичности», «Механика композитов», «Классическая механика». С 1999 г. руководит (совместно с чл.-корр. РАН М.В. Шамолиным) научным семинаром "Актуальные проблемы геометрии и механики им. В.В. Трофимова" на механико-математическом факультете МГУ. С 2005 г. руководит (совместно с проф. С.В. Нестеровым) научным семинаром "Проблемы механики сплошной среды" в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

Д.В. Георгиевский является автором более 400 научных работ, включая 11 монографий по различным проблемам механики деформируемого твердого тела. В разные годы Д.В. Георгиевский выступал руководителем научных грантов РФФИ и РНФ.

Отметим следующие премии и награды, которыми был удостоен проф. Д.В. Георгиевский:

---

перенос механического импульса (вязкость). Перенос импульса весьма трудно поддается физическому осмыслению, т.к. наряду со сдвиговой вязкостью, иногда приходится учитывать объемную вязкость. Со времен Ньютона сдвиговая вязкость традиционно трактуется как перенос импульса в направлении, перпендикулярном направлению макроскопического течения среды. Перпендикулярный перенос импульса естественно сопровождается его затуханием. Объемная вязкость представляется гораздо более сложным явлением, которое существенно проявляется во-первых в сжимаемых средах, а во-вторых в процессах, характеризующихся быстрыми осцилляциями физических параметров.

<sup>9</sup>Метод малого параметра для решения регулярно возмущенных задач был предложен и развит в работах А. Пуанкаре.

<sup>10</sup>Перечисленные научные направления представлены в фундаментальной двухтомной монографии А. Надаи (A. Nadai). Во втором томе (Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1969. 864 с.) имеется обширный материал по различным вопросам геомеханики, имеется ввиду заключительная четвертая часть книги, в которой рассматриваются проблемы: расчета веса континентов (с. 770 и далее); образование соляных куполов (с. 776–783), которое обязано своим происхождением неустойчивости равновесия слоя легкой соли, погребенного глубоко под пластами тяжелых горных пород; движения континентов (с. 793–805); формирования Луны (с. 806–810).

Премия им. И.И. Шувалова («Устойчивость вязкопластических течений с произвольным упрочнением») (1997 г.);

Премия Европейской Академии наук для молодых учёных СНГ (1999 г.);

Премия Международного общества по анализу, приложениям и вычислениям (ISAAC) для молодых учёных (2005 г.);

Медаль им. академика Х.А. Рахматулина<sup>11</sup> (2016 г.).

Д.В. Георгиевский принимает активное участие в подготовке кадров высшей квалификации. Под его руководством защищено 9 кандидатских диссертаций.

Д.В. Георгиевский — член учёного совета МГУ, член учёного совета механико-математического факультета МГУ. Председатель учёного совета НИИ механики МГУ. Член диссертационного совета МГУ.011.6(01.14) по специальности 1.1.8 — Механика деформируемого твёрдого тела (физ.-мат. науки) при МГУ. Член диссертационного совета 24.1.075.02 по специальности 1.1.7 — Теоретическая механика, динамика машин (техн. науки) на базе Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН). Член диссертационного совета Д 212.262.07 по специальностям 05.02.04 — Трение и износ в машинах (техн. науки) и 05.05.06 — Горные машины (техн. науки) при Тверском государственном техническом университете (ТвГТУ).

Д.В. Георгиевский член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, действительный член Международной академии наук высшей школы, член Общества прикладной математики и механики (ГАММ, Германия), Американского математического общества (AMS), Международного общества по анализу, приложениям и вычислениям (ISAAC). Д.В. Георгиевский является экспертом РАН по отделению энергетики, машиностроения, механики и процессов управления.

Ответственный секретарь редколлегии журнала «Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика. Механика». Научный редактор (2006—2014 гг.) и член редколлегии журнала «Известия РАН. Механика твёрдого тела». Член редколлегий журналов «Дифференциальные уравнения», «Прикладная математика и математическая физика», «Композиты и наноструктуры», «Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки», «Математическое моделирование и численные методы», «Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния», «Вестник Удмуртского университета. Серия: Математика. Механика. Компьютерные науки», «Чебышёвский сборник».

Хобби Д.В. Георгиевского: футбол, шахматы, чтение детективной лиэратуры.

29 мая 2025 г. Д.В. Георгиевский был избран членом-корреспондентом РАН.

---

<sup>11</sup>Х.А. Рахматулин — д.ф.-м.н., проф., академик АН УзССР, зав. кафедрой газовой и волновой динамики МГУ. Х.А. Рахматулин известен своими работами в области динамики твёрдых деформируемых тел (в военные годы им были выполнены расчеты строп парашюта, ударного нагружения металлов, созданы расчетные схемы, пригодные для инженерной практики). Здесь отметим книгу: Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках, 1961. 512 с.

Друзья и коллеги поздравляют Дмитрия Владимировича с избранием членом–корреспондентом Российской академии наук и желает ему новых ярких достижений в науке, талантливых учеников и успехов в его многогранной деятельности в области науки и образования.

### Книги

1990

1. Лабораторный практикум по механике деформируемых твердых тел / Р. А. Васин [и др.]. – Московского университета Москва, 1990. – 166 с.

1998

2. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. – УРСС Москва, 1998. – 176 с.

1999

3. *Победря Б. Е., Георгиевский Д. В.* Лекции по теории упругости. – Эдиториал УРСС Москва, 1999. – 208 с.

2005

4. *Климов Д. М., Петров А. Г., Георгиевский Д. В.* Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание. – Наука Москва, 2005. – 394 с.

2006

5. *Победря Б. Е., Георгиевский Д. В.* Основы механики сплошной среды. – Физматлит Москва, 2006. – 272 с.

2018

6. *Георгиевский Д. В.* Избранные задачи механики сплошной среды. – ЛЕНАНД Москва, 2018. – 560 с.
7. *Климов Д. М., Петров А. Г., Георгиевский Д. В.* Механика сплошной среды: вязкопластические течения. – Юрайт, 2018. – 394 с.
8. *Победря Б. Е., Георгиевский Д. В.* Лекции по теории упругости. – ЛЕНАНД Москва, 2018. – 208 с.

2020

9. *Георгиевский Д. В.* Избранные задачи механики сплошной среды. – URSS Москва, 2020. – 560 с.
10. *Победря Б. Е., Георгиевский Д. В.* Лекции по теории упругости. М.: ЛЕНАНД. – Москва : Ленанд, 2020. – 208 с.

2023

11. *Георгиевский Д. В.* Модели теории вязкоупругости. – Москва : Ленанд, 2023. – 144 с.

2025

12. *Георгиевский Д. В.* Тензорные функции в теории определяющих соотношений. – Москва : Ленанд, 2025. – 160 с.

### Статьи



1989

1. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость границы раздела двух тяжёлых вязкоупругих слоёв // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 1989. – № 2. – С. 94–97.
2. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость малых колебаний в системе тяжёлый упругий слой - вязкая несжимаемая жидкость // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 1989. – № 5. – С. 94–96.

1992

3. *Георгиевский Д. В.* Линеаризованная задача устойчивости вязкопластических тел с произвольным скалярным соотношением // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 1992. – № 6. – С. 65–67.

1993

4. *Georgievskii D. V.* Stability of a compressed elastic plate with nonlinear supporting elements // Dynamics and Stability of Systems. – 1993. – Vol. 8, no. 4. – P. 259–272. – DOI: 10.1080/02681119308806162.
5. *Георгиевский Д. В.* Нестационарное осевое деформирование многослойного цилиндра в вязкопластическом состоянии // Прикладная механика (International Applied Mechanics). – 1993. – Т. 29, № 5. – С. 48–54.
6. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость двумерных и трёхмерных вязкопластических течений и обобщённая теорема Сквайра // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 1993. – № 2. – С. 117–123.

1994

7. *Георгиевский Д. В.* Вязкопластическое течение Куэтта - Тейлора : распределение жёстких зон и устойчивость // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 1994. – № 6. – С. 101–106.
8. *Георгиевский Д. В.* Достаточные интегральные оценки устойчивости вязкопластического сдвига // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 1994. – № 4. – С. 124–131.
9. *Георгиевский Д. В.* Схлопывание кавитационного пузырька в нелинейно-вязких и вязкопластических средах // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 1994. – № 2. – С. 181–184.
10. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость плоского идеально жёсткопластического течения Куэтта // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58, № 1. – С. 171–175.

1995

11. *Георгиевский Д. В.* Пластическое течение Сен-Венана в плоском конфузоре с криволинейными стенками // Механика композитных материалов. – Рига, 1995. – Т. 31, № 5. – С. 684–691.

1996

12. *Георгиевский Д. В.* О сдвиговых наследственно вязкопластических течениях // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 1996. – № 1. – С. 45–50.
13. *Георгиевский Д. В.* Оценки устойчивости нестационарного деформирования вязкопластических тел в плоских областях // Доклады Академии наук. – Москва, 1996. – Т. 346, № 4. – С. 471–473.

14. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость нестационарного сдвига вязкопластической полуплоскости с тангенциальным разрывом вдоль границы // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 1996. – № 3. – С. 65–72.

1997

15. *Георгиевский Д. В.* Интегральные оценки устойчивости нестационарного деформирования трёхмерных тел со сложной реологией // Доклады Академии наук. – Москва, 1997. – Т. 356, № 2. – С. 196–198.
16. *Георгиевский Д. В.* Метод интегральных соотношений в задачах устойчивости нелинейных течений с заданной на границе кинематикой // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1997. – № 1. – С. 102–113.
17. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость процессов деформирования по наборам мер относительно заданных классов возмущений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1997. – № 2. – С. 69–92.

1998

18. *Георгиевский Д. В.* Действие сосредоточенной силы в вершине несжимаемого упругого октанта // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1998. – № 1. – С. 99–102.
19. *Георгиевский Д. В.* Общие оценки развития возмущений в трёхмерных неоднородных скалярно нелинейных течениях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 90–97.

1999

20. *Георгиевский Д. В.* Задача устойчивости квазилинейных течений относительно возмущений функции упрочнения // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63, № 5. – С. 826–832.
21. *Георгиевский Д. В.* Нелинейные изотропные тензор-функции в теории определяющих соотношений // Доклады Академии наук. – Москва, 1999. – Т. 366, № 4. – С. 483–485.

2000

22. Течение вязкопластической среды с малым пределом текучести в плоском конфузоре / Д. М. Климов [и др.] // Доклады Академии наук. – Москва, 2000. – Т. 375, № 1. – С. 37–41.
23. Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре / Л. Д. Акуленко [и др.] // Доклады Академии наук. – Москва, 2000. – Т. 374, № 1. – С. 44–48.
24. *Georgievskii D. V.* Viscoplastic stratified composites: shear flows and stability // Computers and Structures. – United Kingdom, 2000. – Vol. 76. – P. 205–210.
25. *Георгиевский Д. В., Климов Д. М.* Энергетический анализ развития кинематических возмущений в слабонеоднородных вязких жидкостях // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2000. – № 2. – С. 56–67.

2001

26. Вязкопластическое течение в конфузоре / Д. М. Климов [и др.] // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. – 2001. – Спецвыпуск. – С. 89–92.

27. *Георгиевский Д. В.* Возмущения поверхностей скольжения в пространственной теории идеальной пластичности // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2001. – № 3. – С. 45–50.
28. *Георгиевский Д. В.* Некоторые неодномерные задачи вязкопластичности: жёсткие зоны и устойчивость // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 61–78.
29. *Георгиевский Д. В.* О линеаризации определяющих соотношений тензорно нелинейных изотропных сред // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2001. – № 5. – С. 21–25.
30. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$  // Доклады Академии наук. – Москва, 2001. – Т. 380, № 1. – С. 47–50. – DOI: 10.1134/1.1408998.
- 2002
31. *Georgievskii D. V.* Isotropic nonlinear tensor functions in the theory of constitutive relations // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2002. – Vol. 112, no. 5. – P. 4498–4516.
32. *Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакиев С. А.* Новые несимметричные и многомодовые решения задачи о течении вязкой жидкости в плоском конфузоре // Доклады Академии наук. – Москва, 2002. – Т. 383, № 1. – С. 46–50.
33. *Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакиев С. А.* Течение вязкой жидкости в конфузоре с большим углом раствора // Доклады Академии наук. – Москва, 2002. – Т. 386, № 3. – С. 333–337.
34. *Георгиевский Д. В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. – М., 2002. – Т. 1, № 2. – С. 150–176.
35. *Георгиевский Д. В., Климов Д. М., Петров А. Г.* О безынерционном деформировании слабонеоднородной вязкой среды // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2002. – № 2. – С. 37–41.
36. *Георгиевский Д. В., Окулова Н. Н.* О вязкопластическом течении Кармана // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2002. – № 5. – С. 45–49.
37. *Георгиевский Д. В., Победря Б. Е.* О понятии устойчивости деформирования в упругой и вязкоупругой моделях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2002. – № 4. – С. 46–56.
38. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$  // Доклады Академии наук. – Москва, 2002. – Т. 383, № 5. – С. 635–637. – DOI: 10.1134/1.1477889.
- 2003
39. Stationary flow of a viscoplastic medium with small yield stress in a plane confusor / L. D. Akulenko [et al.] // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2003. – Vol. 10, no. 4. – P. 381–398.
40. Выдавливание вязкопластического материала с малым пределом текучести из плоского конфузора / Л. Д. Акуленко [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2003. – № 4. – С. 183–197.

41. Несимметричные и многомодовые конфузورные течения в задаче Джеффри-Гамеля / Л. Д. Акуленко [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2003. – № 2. – С. 29–31.
42. Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В. Малость" и асимптотическая малость размерных параметров в задачах механики // Доклады Академии наук. – Москва, 2003. – Т. 390, № 5. – С. 622–626.
43. Георгиевский Д. В. Малые возмущения недеформированного состояния в средах с пределом текучести // Доклады Академии наук. – Москва, 2003. – Т. 392, № 5. – С. 634–637.
44. Георгиевский Д. В., Кириллов А. С. Разгон и торможение тяжёлого вязкопластического слоя (ледника) вдоль наклонной плоскости // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2003. – № 3. – С. 112–119.
45. Георгиевский Д. В., Климов Д. М., Петров А. Г. Задачи о безынерционном течении слабонеоднородных вязкопластических сред // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2003. – № 3. – С. 17–25.
46. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в  $\mathbb{R}^n$  // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2003. – № 5. – С. 37–41.
- 2004
47. Агафонов С. А., Георгиевский Д. В. Динамическая устойчивость стержня с нелинейной внутренней вязкостью под действием следящей силы // Доклады Академии наук. – Москва, 2004. – Т. 396, № 3. – С. 339–342.
48. Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакшев С. А. Регулярно продолжаемые по числу Рейнольдса решения задачи Джеффри-Гамеля // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2004. – № 1. – С. 15–32.
49. Георгиевский Д. В. Динамические возмущения недеформированного состояния в идеально пластических течениях // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2004. – № 4. – С. 45–50.
50. Георгиевский Д. В., Жданова А. В. Некоторые асимптотики в задаче о страгивании и схлопывании газового пузырька // Доклады Академии наук. – Москва, 2004. – Т. 399, № 2. – С. 188–191.
51. Георгиевский Д. В., Климов Д. М., Победря Б. Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2004. – № 1. – С. 119–157.
52. Георгиевский Д. В., Победря Б. Е. О числе независимых уравнений совместности в механике деформируемого твёрдого тела // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 68, № 6. – С. 1043–1048.
- 2005
53. New solutions and hydrodynamical effects in the Jeffery-Hamel problem / L. D. Akulenko [et al.] // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2005. – Vol. 12, no. 3. – P. 269–287.
54. Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакшев С. А. Численно-аналитическое исследование многомодовых решений задачи Джеффри-Гамеля для конфузора // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 6. – С. 49–60.

55. *Георгиевская Д. А., Георгиевский Д. В.* Слабонеоднородные по пределу текучести пластические течения Сен-Венана // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2005. – № 6. – С. 11–25.
56. *Георгиевский Д. В.* Моделирование слабой неоднородности при эйлеровом описании сплошной среды // Доклады Академии наук. – Москва, 2005. – Т. 405, № 4. – С. 479–483.
57. *Георгиевский Д. В., Жданова А. В.* О страгивании и схлопывании сферического газового пузырька в среде с пределом текучести // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2005. – № 4. – С. 39–45.
- 2006
58. Деформирование вязкопластической среды Бингама в плоском конфузоре / Л. Д. Акуленко [и др.] // Прикладная механика (International Applied Mechanics). – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 3–45.
59. *Pobedrya B. E., Georgievskii D. V.* Equivalence of Formulations for Problems in Elasticity Theory in Terms of Stresses // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2006. – Vol. 13, no. 2. – P. 203–209.
60. *Pobedrya B. E., Georgievskii D. V.* On the Proof of The Pi-Theorem in Dimension Theory // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2006. – Vol. 13, no. 4. – P. 431–437.
61. *Агафонов С. А., Георгиевский Д. В.* Дестабилизация нелинейной внутренней вязкостью консольного стержня, нагруженного следящей силой // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2006. – № 3. – С. 41–47.
62. *Георгиевский Д. В.* Диффузия разрыва касательного напряжения на границе вязкопластической полуплоскости // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, № 5. – С. 884–892.
63. *Георгиевский Д. В.* Задача Прадтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2006. – № 1. – С. 47–59.
64. *Георгиевский Д. В.* О задачах в напряжениях для сжимаемой вязкой жидкости (приближение Стокса) // Доклады Академии наук. – Москва, 2006. – Т. 409, № 5. – С. 615–618.
65. *Георгиевский Д. В.* Об эффективном пределе текучести в определяющих соотношениях крови in vivo // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2006. – № 5. – С. 51–54.
- 2007
66. К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ БОРИСА ЕФИМОВИЧА ПОВЕДРИ / Д. В. Георгиевский [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2007. – № 5. – С. 3–5.
67. *Georgievskii D. V.* Methods of Investigation of Boundary Value Problems in Viscoelasticity Theory // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2007. – Т. 14, № 3. – С. 262–274.
68. *Георгиевский Д. В.* Автомодельные решения в задаче об обобщённой диффузии вихря // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2007. – № 2. – С. 3–12.

69. *Георгиевский Д. В.* Вариационные оценки и метод интегральных соотношений в задачах устойчивости // Современная математика. Фундаментальные направления. – Москва, 2007. – № 23. – С. 96–146.
70. *Георгиевский Д. В.* Возмущения течений несжимаемых нелинейно-вязких и вязкопластических жидкостей, порождаемые вариациями материальных функций // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2007. – № 3. – С. 55–62.
71. *Георгиевский Д. В.* О единственности исследуемых на устойчивость решений некоторых задач МСС // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2007. – № 5. – С. 48–52.
- 2008
72. Возмущения собственных значений в обобщённой задаче Рэлея / Л. Д. Акуленко [и др.] // Доклады Академии наук. – Москва, 2008. – Т. 422, № 5. – С. 622–624.
73. *Georgievskii D. V.* Perturbation of Constitutive Relations in Tensor Non-Linear Materials // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – United Kingdom, 2008. – Vol. 15, no. 6. – P. 528–532.
74. *Georgievskii D. V.* Variational Bounds and Integral Relations Method in Problems of Stability // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2008. – Vol. 154, no. 4. – P. 549–603.
75. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2008. – Vol. 154, no. 4. – P. 462–495. – DOI: 10.1007/s10958-008-9190-4.
76. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Valerii Vladimirovich Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2008. – Vol. 154, no. 4. – P. 449–461. – DOI: 10.1007/s10958-008-9189-x.
77. *Георгиевский Д. В.* Об осесимметричном аналоге задачи Прандтля // Доклады Академии наук. – Москва, 2008. – Т. 422, № 3. – С. 331–333.
78. *Георгиевский Д. В.* Структура полиномиальных решений системы уравнений теории упругости в напряжениях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 5. – С. 44–51.
- 2009
79. *Georgievskii D. V.* Applicability of the Squire Transformation in Linearized Problems on Shear Stability // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2009. – Vol. 16, no. 4. – P. 478–483.
80. *Georgievskii D. V.* Asymptotics with Respect to a Small Geometric Parameter for Solutions of Three-Dimensional Lamé Equations // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2009. – Vol. 16, no. 1. – P. 74–80.
81. *Georgievskii D. V.* Generalized diffusion of vortex: self-similarity and the Stefan’ problem // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2009. – Vol. 161, no. 5. – P. 628–647.
82. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent

problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2009. – Vol. 161, no. 5. – P. 603–614. – DOI: 10.1007/s10958-009-9591-z.

83. Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Нестеров С. В. Предисловие к переводам двух классических работ Джеффри и Гамеля // Нелинейная динамика. – Ижевск, 2009. – Т. 5, № 1. – С. 99–100.
84. Георгиевский Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2009. – № 1. – С. 83–93.
85. Георгиевский Д. В. Об идеальнотвёрдопластическом растекании асимптотически тонкого цилиндрического слоя // Доклады Академии наук. – Москва, 2009. – Т. 429, № 3. – С. 328–331.
86. Георгиевский Д. В. Обобщённая диффузия вихря: автомодельность и задача Стефана // Современная математика и ее приложения. – 2009. – Т. 62. – С. 28–46.

2010

87. Georgievskii D. V., Shamolin M. V. Sessions of the Workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Topical Problems of Geometry and Mechanics” Named after V. V. Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2010. – Vol. 165, no. 6. – P. 607–615. – DOI: 10.1007/s10958-010-9831-2.
88. Georgievskii D. V., Tlyustangelov G. S. Stability of Low Oscillations in a Two-Layer Inviscid Fluid by Vertical Moving in Gravity // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2010. – Vol. 17, no. 4. – P. 448–453.
89. Георгиевский Д. В. Асимптотический анализ пластического течения вдоль образующей в тонком цилиндрическом слое // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск, 2010. – Т. 51, № 5. – С. 111–119.
90. Георгиевский Д. В. Новые оценки устойчивости одномерных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74, № 4. – С. 633–644.
91. Георгиевский Д. В. О потенциальных изотропных тензор-функциях двух тензорных аргументов в МДТТ // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – № 3. – С. 220–224.
92. Георгиевский Д. В. Оценки роста возмущений в задачах на собственные значения для уравнения Рэлея // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2010. – № 6. – С. 44–47.

2011

93. Научное наследие А.А.Ильюшина и развитие его идей в механике / Г. Л. Бровка [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – № 1. – С. 5–18.
94. Georgievskii D. V. Gravitational Stability of Vertically Moving System: Viscous Layer and Inviscid Half-Space // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2011. – Vol. 18, no. 2. – P. 144–148.
95. Georgievskii D. V. Superpositions of the Diffusion-Vortex Solutions and Flow Control Inside Infinite Domains // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2011. – Vol. 18, no. 4. – P. 420–426.

96. Агафонов С. А., Георгиевский Д. В. Зависимость скачка критической следящей силы для вязкоупругого стержня от вида нелинейной внутренней вязкости // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75, № 3. – С. 519–527.
97. Гаряева Т. И., Георгиевский Д. В. К задаче теории упругости в перемещениях для цилиндрического слоя с сильно различающимися характерными размерами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2011. – № 3. – С. 30–36.
98. Георгиевский Д. В. Асимптотики решений трёхмерных уравнений теории упругости для сжимаемых и несжимаемых тел // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2011. – № 1. – С. 122–130.
99. Георгиевский Д. В. Обобщённые оценки Джозефа устойчивости плоских сдвиговых течений со скалярной нелинейностью // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2011. – Т. 75, № 1. – С. 149–152.
100. Георгиевский Д. В. Постановки и интегральные методы анализа спектральных задач устойчивости в механике сплошных сред // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Н.Новгород, 2011. – Т. 4, № 5. – С. 2098–2099.
101. Георгиевский Д. В. Сжатие-сток асимптотически тонкого идеально жёсткопластического сферического слоя // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2011. – № 6. – С. 65–68.
102. Георгиевский Д. В. Тензорно-нелинейные сдвиговые течения: материальные функции и диффузионно-вихревые решения // Нелинейная динамика. – Ижевск, 2011. – Т. 7, № 3. – С. 451–463.
103. Георгиевский Д. В. Течение Сен-Венана в тонком слое, подверженном пластическому сжатию // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2011. – № 4. – С. 104–115.
104. Георгиевский Д. В., Мюллер В. Х., Абали Б. Э. Задачи на собственные значения для обобщённого уравнения Орра - Зоммерфельда в теории гидродинамической устойчивости // Доклады Академии наук. – Москва, 2011. – Т. 440, № 1. – С. 52–55.
- 2012
105. Georgievskii D. V., Semenov A. S. Eigenvalue Problems Modelling the Stability of a Plane-Parallel Shear in a Two-Layer Viscous Composite // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2012. – Vol. 19, no. 4. – P. 461–468.
106. Georgievskii D. V., Shamolin M. V. Levi-Civita symbols, generalized vector products, and new integrable cases in mechanics of multidimensional bodies // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2012. – Vol. 187, no. 3. – P. 280–299.
107. Georgievskii D. V., Shamolin M. V. Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2012. – Vol. 187, no. 3. – P. 269–271. – DOI: 10.1007/s10958-012-1063-1.
108. Георгиевский Д. В. Гидродинамические и вычислительные аспекты и задачи устойчивости вязкопластических течений // Современная математика и ее приложения. – 2012. – Т. 78. – С. 50–83.



109. *Георгиевский Д. В.* Общие решения не эквивалентных классической систем теории упругости в напряжениях // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2012. – № 6. – С. 26–32.
110. *Георгиевский Д. В., Мюллер В. Х., Абали Б. Э.* Установочные эксперименты для нахождения материальных функций тензорно нелинейных определяющих соотношений // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2012. – Т. 76, № 12. – С. 1534–1537.
111. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела // Современная математика и ее приложения. – 2012. – Т. 76. – С. 22–39. – DOI: 10.1007/s10958-012-1065-z.
112. *Георгиевский Д. В., Юшутин В. С.* Квазистатическое сжатие и растекание асимптотически тонкого нелинейно-вязкопластического слоя // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск, 2012. – Т. 53, № 3. – С. 150–157. 2013
113. Кинетические особенности формирования реакционно-связанных фосфатных биоматериалов / Я. Ю. Филиппов [и др.] // Наносистемы: физика, химия, математика. – Санкт-Петербург, 2013. – Т. 4, № 1. – С. 54–65.
114. *Abali B. E., Mueller W. H., Georgievskii D. V.* A discrete-mechanical approach for computation of three-dimensional flows // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – Hoboken, NJ, United States, 2013. – Vol. 93, no. 12. – P. 868–881.
115. *Abali B. E., Mueller W. H., Georgievskii D. V.* Inverse analysis of a non-linear viscous fluid based on dissipated energy measured with a simple-shear rheometer // Proceedings in applied mathematics and mechanics. – Weinheim, Fed. Rep. of Germany, Germany, 2013. – Vol. 13, no. 1. – P. 179–180.
116. *Georgievskii D. V.* Hydrodynamical and computational aspects and stability problems for viscoplastic flows // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2013. – Vol. 189, no. 2. – P. 223–256.
117. *Georgievskii D. V.* Shear flows in a plane viscoplastic layer with the plasticity criterion weakly depending on pressure // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2013. – Т. 20, № 2. – С. 182–188.
118. *Georgievskii D. V.* Stability of Bingham flows: from the earliest works of A.A.Ilyushin to the present // Journal of Engineering Mathematics. – Switzerland, 2013. – Vol. 78, no. 1. – P. 9–17.
119. *Meleshko V. V., Georgievskii D. V.* Preface. A commemoration of Alexey Antonovich Pyushin // Journal of Engineering Mathematics. – Switzerland, 2013. – Vol. 78, no. 1. – P. 1–2.
120. *Агахи К. А., Георгиевский Д. В.* Тензорно нелинейные определяющие соотношения изотропной теории ползучести с тензорной мерой поврежденности // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – 2(2). – С. 10–16.
121. *Георгиевский Д. В.* Асимптотическое интегрирование задачи Прандтля в динамической постановке // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2013. – № 1. – С. 97–105.

122. *Георгиевский Д. В.* Выдавливание пластического материала из кругового сектора с малым углом раствора и стоком в вершине // Прикладная математика и механика. – 2013. – Т. 77, № 1. – С. 153–160.
123. *Георгиевский Д. В.* О линейной алгебраической симметризации оператора уравнений Бельтрами-Мичелла // Доклады Академии наук. – Москва, 2013. – Т. 448, № 4. – С. 410–412.
124. *Георгиевский Д. В.* Об "ортогональных эффектах" напряжённо-деформированного состояния в механике сплошной среды // Вестник Киевского национального университета имени Т.Г.Шевченко. Сер.: физико-математические науки. – 2013. – № 3. – С. 114–116.
125. *Георгиевский Д. В.* Об угле между девиаторами напряжений и скоростей деформаций в тензорно-нелинейной сплошной среде // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2013. – № 6. – С. 63–66.
126. *Георгиевский Д. В.* Рецензия на монографию А.А.Тихонова "Тензорное моделирование геомагнитного поля" // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323, № 2. – С. 208–210.
127. *Георгиевский Д. В.* Симметризация тензора-оператора уравнений совместности в напряжениях в анизотропной теории упругости // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2013. – № 4. – С. 59–63.
- 2014
128. *Georgievskii D. V., Mueller W. H., Abali B. E.* Generalizations of the Orr-Sommerfeld Problem for the Case in Which the Unperturbed Motion is Non-steady // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2014. – Vol. 21, no. 2. – P. 189–196.
129. *Георгиевский Д. В.* Идеально жёсткопластическое течение в тонком зазоре между сближающимися соосными конусами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2014. – № 6. – С. 51–56.
130. *Георгиевский Д. В.* Построение обобщённых формул Чезаро для конечных плоских деформаций // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск, 2014. – Т. 55, № 3. – С. 140–145.
131. *Георгиевский Д. В.* Уравнения совместности в системах, основанных на обобщённых кинематических соотношениях Коши // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2014. – № 1. – С. 127–132.
132. *Георгиевский Д. В.* Эволюция трёхмерной картины возмущений, наложенных на вращательно-осевое течение в цилиндрическом зазоре // Нелинейная динамика. – Ижевск, 2014. – Т. 10, № 3. – С. 345–354.
133. *Георгиевский Д. В., Квачёв К. В.* Метод Ляпунова - Мовчана в задачах устойчивости течений и процессов деформирования // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78, № 6. – С. 862–885.
- 2015
134. *Georgievskii D. V., Pobedrya B. E.* On the Compatibility Equations in Terms of Stresses in Many-Dimensional Elastic Medium // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2015. – Vol. 22, no. 1. – P. 6–8.
135. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the Workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent Problems of Geometry and Mechanics" Named After V. V. Trofimov // Journal of

- Mathematical Sciences. – United States, 2015. – Vol. 204, no. 6. – P. 715–731. – DOI: 10.1007/s10958-015-2212-0.
136. Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Нестеров С. В. Спектр поперечных колебаний участка движущегося стержня при воздействии продольной нагрузки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2015. – № 2. – С. 139–144.
137. Георгиевский Д. В. Интегральный анализ трёхмерной картины возмущений течения Пуазейля в трубе // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2015. – № 4. – С. 40–45.
138. Георгиевский Д. В. Обобщённое представление Галёркина для трансверсально-изотропной линейно упругой среды // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79, № 6. – С. 883–887.
139. Георгиевский Д. В. Одна оценка эволюции возмущений в нестационарных плоскопараллельных течениях Сен-Венана // Прикладная математика и математическая физика. – Москва, 2015. – Т. 1, № 1. – С. 147–150.
140. Георгиевский Д. В. Одноосное растяжение тонкого жёсткопластического листа при наличии шейки // Доклады Академии наук. – Москва, 2015. – Т. 463, № 2. – С. 152–154.
141. Георгиевский Д. В. Тензорный оператор Галёркина, редукция к тетрагармоническим уравнениям и их фундаментальные решения // Доклады Академии наук. – Москва, 2015. – Т. 463, № 4. – С. 418–421.
142. Георгиевский Д. В., Израилов М. Ш. Сейсמודинамика протяжённых подземных сооружений и грунтов: постановки задач и автомодельные решения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2015. – № 4. – С. 130–144.
143. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Современная математика и ее приложения. – 2015. – Т. 98. – С. 3–8.
144. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова // Современная математика и ее приложения. – 2015. – Т. 88. – С. 1–21.
- 2016
145. К восьмидесятилетию Виктора Яковлевича Шкадова / В. Н. Чубариков [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2016. – № 4. – С. 70–71.
146. Georgievskii D. V. Generalized compatibility equations for tensors of high ranks in multidimensional continuum mechanics // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2016. – Vol. 23, no. 4. – P. 475–483.
147. Georgievskii D. V., Pobedrya B. E. Asymptotic analysis of evolution of a neck in extended thin rigid plastic solids // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2016. – Vol. 23, no. 2. – P. 200–206.

148. Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Нестеров С. В. Спектр поперечных колебаний участка трубопровода при воздействии продольной нагрузки // Доклады Академии наук. – Москва, 2016. – Т. 467, № 1. – С. 36–39.
149. Георгиевский Д. В. Наборы установочных экспериментов в тензорно-нелинейных теориях МСС // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2016. – № 2. – С. 66–68.
150. Георгиевский Д. В. Потенциальность изотропных нелинейных тензор-функций, связывающих два девиатора // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2016. – № 5. – С. 140–144.
151. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Современная математика и ее приложения. – 2016. – Т. 100. – С. 3–11.
- 2017
152. Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения / Л. Д. Акуленко [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – № 6. – С. 136–144.
153. Georgievskii D. V. Constitutive relations in multidimensional isotropic elasticity and their restrictions to subspaces of lower dimensions // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2017. – Т. 24, № 3. – С. 322–325. – DOI: 10.1134/S1061920817030050.
154. Georgievskii D. V., Shamolin M. V. Sessions of the Workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent Problems of Geometry and Mechanics" Named After V.V.Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2017. – Vol. 221, no. 2. – P. 155–160. – DOI: 10.1007/s10958-017-3223-9.
155. Georgievskii D. V., Shamolin M. V. Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2017. – Vol. 227, no. 4. – P. 387–394. – DOI: 10.1007/s10958-017-3591-1.
156. Георгиевский Д. В. Линеаризация тензорно нелинейных определяющих соотношений в задачах устойчивости течений // Чебышевский сборник. – Тула, 2017. – Т. 18, № 3. – С. 201–208.
157. Георгиевский Д. В. Некоторые точные решения задачи в напряжениях для несжимаемых упругих конических тел // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2017. – № 4. – С. 69–71.
158. Георгиевский Д. В., Путкарадзе В. Г., Тлюстангелов Г. С. Трёхмерные возмущения радиально-вращательного растекания-стока вязкого цилиндрического слоя // Доклады Академии наук. – Москва, 2017. – Т. 473, № 6. – С. 655–658.
159. Георгиевский Д. В., Тлюстангелов Г. С. Оценки развития малых возмущений при радиальном растекании (стоке) вязкого кольца // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск, 2017. – Т. 58, № 4. – С. 46–55. – DOI: 10.15372/PMTF20170404.

160. *Георгиевский Д. В., Тлюстангелов Г. С.* Экспоненциальные оценки возмущений жёсткопластического растекания-стока кольца // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – № 4. – С. 135–144.  
2018
161. *Gay-Balmaz F., Georgievskii D., Putkaradze V.* Stability of helical tubes conveying fluid // Journal of Fluids and Structures. – United States, 2018. – Vol. 78, no. 2. – P. 146–174. – DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2017.12.020.
162. *Georgievskii D. V.* Existence of perturbed equilibrium states in some two-layer systems with density inversion // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2018. – Vol. 25, no. 4. – P. 492–499. – DOI: 10.1134/S1061920818040064.
163. *Георгиевский Д. В.* Задачи в напряжениях диффузионно-вихревого типа в неограниченном жёстковязкопластическом пространстве // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 5. – С. 53–60. – DOI: 10.31857/S057232990002466-2.
164. *Георгиевский Д. В.* О диффузии жёстковязкопластического вихревого слоя // Нелинейная динамика. – Ижевск, 2018. – Т. 14, № 1. – С. 63–67. – DOI: 10.20537/nd1801006.
165. *Георгиевский Д. В.* Оценка затухания возмущений, наложенных на разгоняющееся вязкопластическое течение Куэтта // Доклады Академии наук. – Москва, 2018. – Т. 478, № 5. – С. 536–538.
166. *Георгиевский Д. В.* Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 4. – С. 29–33. – DOI: 10.31857/S057232990000794-3.
167. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость нестационарного сдвига среды Бингама в плоском слое // Прикладная математика и механика. – 2018. – Т. 82, № 6. – С. 794–803. – DOI: 10.31857/S003282350002743-7.
168. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". – 2018. – Т. 150. – С. 3–25.  
2019
169. *Georgievskii D. V., Müller W. H., Abali B. E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – Hoboken, NJ, United States, 2019. – Vol. 99, no. 12. – DOI: 10.1002/zamm.201900184.
170. *Георгиевский Д. В.* Деформаторы высоких рангов и тензоры несовместности Крёнера с двумерной структурой индексов // Доклады Академии наук. – Москва, 2019. – Т. 486, № 4. – С. 430–432. – DOI: 10.31857/S0869-56524864430-432.

171. Георгиевский Д. В. Изолированные устойчивые начальные возмущения неустойчивых равновесий некоторых механических систем // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2019. – № 3. – С. 49–54.
172. Георгиевский Д. В. О роли двух термодинамических постулатов в феноменологическом построении механики сплошной среды // Чебышевский сборник. – Тула, 2019. – Т. 20, № 3. – С. 135–143. – DOI: 10.22405/2226-8383-2018-20-3-66-74.
173. Георгиевский Д. В. Постановки линеаризованных краевых задач механики сплошной среды со спектральным параметром в граничных условиях // Дифференциальные уравнения. – Москва, 2019. – Т. 55, № 5. – С. 683–690. – DOI: 10.1134/S0374064119050091.

2020

174. Georgievskii D. V., Putkaradze V. G. Evolution of Perturbations Imposed on 1D Unsteady Shear in a Viscous Half-Plane with Oscillating Boundary // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2020. – Vol. 27, no. 2. – P. 212–217. – DOI: 10.1134/S1061920820020077.
175. Georgievskii D. V., Shamolin M. V. Sessions of the Workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” Named After V. V. Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2020. – Т. 250, № 6. – С. 859–880. – DOI: 10.1007/s10958-020-05052-0.
176. Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Нестеров С. В. Метод ускоренной сходимости в задаче о крутильных колебаниях неоднородного по толщине круглого диска // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2020. – № 6. – С. 66–68.
177. Георгиевский Д. В. Линейные дифференциальные операторы второго порядка над тензорными полями высоких рангов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 6. – С. 59–64. – DOI: 10.31857/S0572329920060069.
178. Георгиевский Д. В. Малые возмущения диффузионно-вихревых течений ньютоновской жидкости в полуплоскости // Прикладная математика и механика. – 2020. – Т. 84, № 2. – С. 175–181. – DOI: 10.31857/S0032823520020046.
179. Георгиевский Д. В. Нелинейные тензор-функции двух аргументов и некоторые "ортогональные эффекты" напряжённо-деформированного состояния // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 5. – С. 21–26. – DOI: 10.31857/S0572329920040042.
180. Георгиевский Д. В. Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя // Дифференциальные уравнения. – Москва, 2020. – Т. 56, № 10. – С. 1366–1375. – DOI: 10.1134/S0374064120100106.
181. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Итоги науки и

- техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". – 2020. – Т. 174. – С. 3–11. – DOI: 10.36535/0233-6723-2020-174-3-11.
182. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М., 2020. – Т. 187. – С. 3–11. – DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-3-11.  
2021
183. К 70-летию профессора В. Н. Чубарикова / В. В. Александров [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2021. – № 5. – С. 69–71.
184. *Georgievskii D. V.* Stability with Respect to Energetic Measures for Biaxial Tension–Compression of a Beam with Rectangular Cross-Section // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2021. – Vol. 28, no. 3. – P. 333–341. – DOI: 10.1134/S1061920821030067.
185. *Георгиевский Д. В.* Асимптотики собственных значений в задаче Орра-Зоммерфельда для малых скоростей невозмущённого течения // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – Москва, 2021. – Т. 496. – С. 26–29. – DOI: 10.31857/S2686954321010045.
186. *Георгиевский Д. В.* Динамические режимы растяжения стержня из идеально жёсткопластического материала // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск, 2021. – Т. 62, № 5. – С. 119–130. – DOI: 10.15372/RMTF20210513.
187. *Георгиевский Д. В.* Об инвариантном соответствии симметричных тензоров второго ранга и систем векторов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2021. – № 3. – С. 69–74.
188. *Георгиевский Д. В.* Последовательное трехосное динамическое обжатие параллелепипеда // Прикладная математика и механика. – 2021. – Т. 85, № 6. – С. 772–778. – DOI: 10.31857/S0032823521060060.
189. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость по энергетической мере нестационарного трёхосного растяжения-сжатия вязкого параллелепипеда // Дифференциальные уравнения. – Москва, 2021. – Т. 57, № 5. – С. 649–654. – DOI: 10.31857/S0374064121050071.
190. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В.В. Трофимова под руководством С.А. Агафонова, Д.В. Георгиевского и М.В. Шамолина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М., 2021. – Т. 202. – С. 3–9. – DOI: 10.36535/0233-6723-2021-202-3-9.  
2022
191. 90 лет со дня рождения академика Олега Борисовича Лупанова (02.06.1932 – 03.05.2006) / В. В. Александров [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2022. – Т. 3. – С. 3–5.
192. *Georgievskii D. V.* Finite Perturbations by Yield Stress of the Constitutive Relations of Nonlinear Viscous Media // Russian Journal of Mathematical Physics. –

- Road Town, United Kingdom, 2022. – Vol. 29, no. 4. – P. 494–499. – DOI: 10.1134/S1061920822040070.
193. *Георгиевский Д. В.* Анизотропные скалярные определяющие соотношения и соответствующие им модели вязкопластического течения // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2022. № 5. С. 54–57 // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2022. – № 5. – С. 54–57.
194. *Георгиевский Д. В.* Изотропные тензор-функции с квазиполиномиальным скалярным потенциалом в нелинейной теории упругости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2022. – № 6. – С. 97–103. – DOI: 10.31857/S0572329922060071.
195. *Георгиевский Д. В.* Неравенства Фридрихса и усиленные достаточные условия устойчивости плоскопараллельных течений // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2022. – № 3. – С. 46–50.
196. *Георгиевский Д. В.* Тонкослойные асимптотики в обобщенной задаче Прандтля для неоднородного по толщине пластического материала // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т. 86, № 4. – С. 612–621. – DOI: 10.31857/S0032823522040087.
197. *Георгиевский Д. В.* Условия разделения девиаторных и шаровых свойств у изотропных тензорно-нелинейных функций // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – Москва, 2022. – Т. 504. – С. 32–35. – DOI: 10.31857/S2686740022030075.
198. *Георгиевский Д. В., Стеценко Н. С.* Комплексное представление Александровича решений в перемещениях в трёхмерной теории упругости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2022. – № 3. – С. 8–15. – DOI: 10.31857/S0572329922020106.
199. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М., 2022. – Т. 210. – С. 6–11. – DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-6-11.
200. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М., 2022. – Т. 205. – С. 3–9. – DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-3-9.
- 2023
201. *Banko V. A., Georgievskii D. V.* Rectilinear Vortex Thread in a Radially Nonhomogeneous Bingham Solid // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2023. – Vol. 30, no. 3. – P. 275–279. – DOI: 10.1134/S1061920823030019.
202. *Georgievskii D. V.* Properties of operator constitutive relations in mechanics of deformable solid // Theoretical and Applied Mechanics. – 2023. – Vol. 50, no. 2. – P. 103–115. – DOI: 10.2298/TAM230719008G.



203. *Georgievskii D. V., Putkaradze V. G.* Energy-based stability estimates for incompressible media with tensor-nonlinear constitutive relations // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. – Germany, 2023. – Vol. 35, no. 4. – P. 1403–1415. – DOI: 10.1007/s00161-022-01139-y.
204. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the Workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent Problems of Geometry and Mechanics” Named After V. V. Trofimov // *Journal of Mathematical Sciences*. – United States, 2023. – Т. 272, № 5. – С. 625–633. – DOI: 10.1007/s10958-023-06459-1.
205. *Банько В. А., Георгиевский Д. В.* Квазиавтомодельные решения некоторых параболических задач в теории вязкопластического течения // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. – М., 2023. – № 4. – С. 39–45. – DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-6.
206. *Георгиевский Д. В.* Влияние предела текучести на расход в одномерных сдвиговых течениях нелинейно-вязких сред // *Прикладная механика и техническая физика*. – Новосибирск, 2023. – Т. 64, № 2. – С. 201–207. – DOI: 10.15372/RMTF202215202.
207. *Георгиевский Д. В.* Схемы экспериментов по определению ядер некоторых разностных операторов для сред с нерелаксирующим объемом // *Прикладная математика и механика*. – 2023. – Т. 87, № 1. – С. 45–52. – DOI: 10.31857/S003282352301006X.
208. *Георгиевский Д. В.* Трёхчленные представления степенных тензорных рядов в теории определяющих соотношений // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. – Москва, 2023. – Т. 508. – С. 27–29. – DOI: 10.31857/S2686740023010042.
209. *Георгиевский Д. В., Москвитин Г. В.* Научное наследие В.В.Москвитина и его вклад в развитие отечественной механики // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – М., 2023. – № 2. – С. 120–130.
210. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. – М., 2023. – Т. 229. – С. 3–11. – DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-3-11.
- 2024
211. К восьмидесятипятилетию Виктора Антоновича Садовниченко / А. В. Ильин [и др.] // *Дифференциальные уравнения*. – Москва, 2024. – Т. 60, № 4. – С. 435–437.
212. *Георгиевский Д. В.* Достаточные энергетические оценки устойчивости нестационарных комбинированных сдвиговых течений в цилиндрическом слое // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2024. – № 6. – С. 51–59. – DOI: 10.31857/S1024708424060043.
213. *Георгиевский Д. В.* Совместность деформаций и трижды дифференцируемость поля перемещений // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2024. – № 2. – С. 244–248. – DOI: 10.31857/S1026351924020112.

214. *Георгиевский Д. В.* Таблица постулатов механики сплошной среды и принципы формирования её строк // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск, 2024. – Т. 65, № 6. – С. 15. – DOI: 10.15372/PMTF202315434.
215. *Георгиевский Д. В.* Тензорная линейность двумерных изотропных функций в плоской задаче нелинейной теории упругости // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – Москва, 2024. – Т. 516. – С. 47–50. – DOI: 10.31857/S2686740024030072.
216. *Георгиевский Д. В.* Тензорно нелинейные вязкоупругие модели максвелловского типа: виброползучесть и ретчеттинг // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 3. – С. 3–11. – DOI: 10.31857/S1026351924030017.
217. *Георгиевский Д. В.* Экспериментальное подтверждение взаимнообратности функций ползучести и релаксации в линейной теории вязкоупругости // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – Москва, 2024. – Т. 519. – С. 54–56. – DOI: 10.31857/S2686740024060093.
218. *Георгиевский Д. В., Банько В. А.* Разгон сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости с переменным по глубине пределом текучести // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т. 88, № 1. – С. 95–103. – DOI: 10.31857/S0032823524010071.
219. *Георгиевский Д. В., Раутман Н. А.* Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференциальные уравнения. – Москва, 2024. – Т. 60, № 4. – С. 533–549. – DOI: 10.31857/S0374064124040083.
220. *Георгиевский Д. В., Раутман Н. А.* Мера непропорциональности разгрузки в теории малых упругопластических деформаций // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2024. – № 2. – С. 69–73. – DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-2-9.
221. *Георгиевский Д. В., Цветков И. М.* Течения тонких идеально жёсткопластических тел: динамические режимы и шейкообразование // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2024. – № 6. – С. 94–102. – DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-6-12.
- 2025
222. *Georgievskii D. V.* Radial compression with controlled unloading of a layered-stratified elastoplastic hollow sphere // Russian Journal of Mathematical Physics. – Road Town, United Kingdom, 2025. – Т. 32, № 2.
223. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the Workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent Problems of Geometry and Mechanics” Named After V. V. Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2025. – Vol. 287, no. 5. – P. 691–698. – DOI: 10.1007/s10958-025-07632-4.
224. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the Workshop of the Mathematics and Mechanics Department of the Lomonosov Moscow State University, “Urgent Problems of Geometry and Mechanics” Named After V. V. Trofimov // Journal of Mathematical Sciences. – United States, 2025. – Vol. 291, no. 3. – P. 337–356. – DOI: 10.1007/s10958-025-07815-z.

225. *Георгиевский Д. В.* Сжатие с разгрузкой плоского неоднородного по толщине упругопластического слоя // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2025. – № 4. – С. 76–79. – DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-4-13.
226. *Георгиевский Д. В., Раутиан Н. А.* Конечная скорость распространения возмущений для одномерного волнового интегро-дифференциального уравнения с дробно-экспоненциальной функцией памяти // Дифференциальные уравнения. – Москва, 2025. – Т. 61, № 4. – С. 570–576. – DOI: 10.31857/S0374064125040105.
227. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М., 2025. – Т. 238. – С. 3–23. – DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-3-23.
228. *Козлов В. В., Георгиевский Д. В., Влахова А. В.* О преподавании курсов по механике студентам-математикам // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – М., 2025. – № 2. – С. 99–102. – DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-2-18.

## Материалы конференций

1986

1. *Георгиевский Д. В.* Дестабилизация устойчивости стержня с точечной массой при наличии малого вязкого трения // Тез. докл. 2 Всесоюз. Симпозиума по устойчивости в МДТТ. Калинин. 26-30 июня 1986 г. – Калинин, 1986. – С. 93–94.
2. *Георгиевский Д. В.* О двух условных критериях устойчивости абсолютно жёсткого стержня на вязкоупругом шарнире // Депонент ВИНТИ № 2490-В, 08.04.86. – Изд-во ВИНТИ Москва, 1986. – С. 1–11.

1987

3. *Георгиевский Д. В.* Методы теории катастроф в задаче устойчивости стержней с нелинейными и вязкоупругими связями // Упругость и неупругость. – Изд-во МГУ Москва, 1987. – С. 159–166.

1988

4. *Георгиевский Д. В.* Об устойчивости набора слоёв вязких несжимаемых жидкостей в гравитационном поле // Депонент ВИНТИ № 46-В, 11.01.88. – Изд-во ВИНТИ Москва, 1988. – С. 1–18.
5. *Георгиевский Д. В.* Оптимальное распределение масс в задаче устойчивости консольного вязкоупругого стержня под действием следящей силы // Численный анализ, математическое моделирование и их применение в механике. – Изд-во ВИНТИ Москва, 1988. – С. 31–35.

1989

6. *Георгиевский Д. В.* Оптимизация дестабилизирующего влияния малой вязкости в неконсервативных стержневых системах // Тез. докл. Всесоюз. Конф.

"Оптимальное проектирование неупругих элементов конструкций". Тарту. 15-19 мая 1989 г. – Тарту, 1989. – С. 15–16.

7. *Георгиевский Д. В.* Осесимметричные задачи устойчивости течений // Тез. докл. Всесоюз. Конф. "Современные проблемы механики и технологии машиностроения" Москва. 16-18 апреля 1989 г. – Москва, 1989. – С. 126–126.
8. *Георгиевский Д. В.* Радиальное растекание цилиндра, состоящего из нелинейно вязкопластических слоёв // Депонент ВИНТИ № 7405-В, 13.12.89. – Изд-во ВИНТИ Москва, 1989. – С. 1–23.

1990

9. *Георгиевский Д. В.* Об устойчивости вращения набора вязкопластических слоёв в центрифугах // "Математические методы в механике // Математические методы в механике. – МГУ Москва, 1990. – С. 105–109.
10. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость сдвига полосы из вязкопластического материала с упрочнением // Тез. докл. Межреспуб. Научно-техн. Конф. "Численные методы решения задач строительной механики, теории упругости и пластичности". Волгоград. 6-8 июня 1990 г. – Волгоград, 1990. – С. 108–110.
11. *Георгиевский Д. В., Ракитный Р. Т.* О применимости метода Неймана для одного класса интегральных уравнений типа Вольтерры // Математические методы в механике. – МГУ Москва, 1990. – С. 101–105.

1991

12. *Георгиевский Д. В.* Плотностная неустойчивость неоднородных вязкоупруго-пластических структур // Тез. докл. 3 Всесоюз. Конф. "Механика неоднородных структур". Львов. 17-19 сентября 1991 г. Т. 1. – Львов, 1991. – С. 72–72.
13. *Георгиевский Д. В.* Постановка задачи о развитии нелинейных возмущений в гравитационно неустойчивой системе вязких жидкостей // Численное моделирование в задачах механики. М.: МГУ им. Ломоносова. – 1991. – С. 96–100.

1992

14. *Georgievskii D. V.* Non-linear viscoelastoplastic models of geomaterials // Proc. of the 3rd Internat. Conf. on Computational Plasticity (ComPlas III). Barcelona, 17-21 Aug. 1992. – Swansea, 1992. – P. 851–858.
15. *Georgievskii D. V.* Shear Flows of Geomaterials with Complex Rheology: Non-Stationarity and Stability // "Theoretical and Applied Rheology". Proc. XI Internat. Congress on Rheology. Brussels. 17-21 Aug. 1992. – Brussels, 1992. – P. 238–238.
16. *Георгиевский Д. В.* Движение жёстких зон и потеря устойчивости вязкопластических течений // Тез. докл. 3 Симпозиума "Устойчивость и пластичность в МДТТ". Тверь. 3-5 сентября 1992 г. – Тверь, 1992. – С. 14–15.
17. *Георгиевский Д. В.* Интегральные оценки Джозефа в задачах устойчивости вязкопластических тел // Тез. докл. Научн. Совещания "Термовязкоупруго-пластические процессы деформирования в элементах конструкций" Канев. 27-29 мая 1992 г. – Киев, 1992. – С. 19–19.
18. *Георгиевский Д. В.* Некоторые задачи о нестационарном деформировании вязкопластических тел. Часть I // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. Научно-исследовательский семинар кафедры теории

упругости. Заседания осеннего семестра 1990/91 учебного года. Т. 2. – Издательство МГУ Москва, 1992. – С. 104–104. – (Вестник Московского университета).

19. *Георгиевский Д. В.* Некоторые задачи о нестационарном деформировании вязкопластических тел. Часть II // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. Научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости. Заседания осеннего семестра 1990/91 учебного года. Т. 2. – Издательство МГУ Москва, 1992. – С. 105–105. – (Вестник Московского университета).
20. *Георгиевский Д. В.* О сдвиговых течениях вязкопластических тел в поле силы тяжести // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов. Заседания весеннего семестра 1990/91 учебного года. Т. 3. – Издательство МГУ Москва, 1992. – С. 83–83. – (Вестник Московского университета).

1993

21. *Георгиевский Д. В.* Достаточные интегральные оценки в задачах устойчивости вязко- и идеально пластических течений // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов. Заседания весеннего семестра 1991/92 учебного года. Т. 3. – Издательство МГУ Москва, 1993. – С. 102–102. – (Вестник Московского университета).
22. *Георгиевский Д. В.* Нестационарное деформирование и устойчивость сдвиговых наследственно вязкопластических течений // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов. Заседания весеннего семестра 1992/93 учебного года. Т. 6. – Издательство МГУ Москва, 1993. – С. 110–110. – (Вестник Московского университета).
23. *Георгиевский Д. В.* Общая схема "полулинейного" вариационного метода исследования устойчивости // Вопросы механики сплошных сред. – Изд-во МГУ Москва, 1993. – С. 15–21.
24. *Георгиевский Д. В.* Скалярные определяющие соотношения наследственно вязкопластического типа // Тез. докл. Научн. Конф. "Механика и её применения". Ташкент. 9-11 ноября 1993 г. – Ташкент, 1993. – С. 31–31.
25. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость вязкопластического течения между концентрически вращающимися цилиндрами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов. Заседания осеннего семестра 1992/93 учебного года. Т. 5. – Издательство МГУ Москва, 1993. – С. 85–85. – (Вестник Московского университета).
26. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость плоскопараллельного сдвигового течения двух тяжёлых вязких слоёв // Упругость и неупругость. – Изд-во МГУ Москва, 1993. – С. 108–121.

1994

27. *Георгиевский Д. В.* Идеально пластическое течение в плоском конфузоре с криволинейными стенками // Вестник Московского университета. Серия 1:

- Математика. Механика. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов. Заседания осеннего семестра 1993/94 учебного года. Т. 5. – Издательство МГУ Москва, 1994. – С. 86–86. – (Вестник Московского университета).
28. *Георгиевский Д. В.* Плотностная неустойчивость в системе: тяжёлая вязкоупругая литосфера - вязкая несжимаемая астеносфера // Тез. докл. Украинской Конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем". Киев. 16-20 мая 1994 г. – Киев, 1994. – С. 23–23.
- 1995
29. *Georgievskii D. V.* Hydrodynamical Stability of Non-Newtonian Shear Flows: Examples and Geodynamical Applications // Proc. 3rd Internat. Congress on Industr. and Applied Mathematics (ICIAM). Hamburg. 3-7 July 1995. – Hamburg, 1995. – P. 287–287.
30. *Георгиевский Д. В.* Вязкопластические течения в областях с поверхностями начального разрыва // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов. Заседания осеннего семестра 1994/95 учебного года. Т. 4. – Издательство МГУ Москва, 1995. – С. 108–108. – (Вестник Московского университета).
31. *Георгиевский Д. В.* О гидродинамической неустойчивости процесса диффузии вихревого слоя в нелинейной среде // Тез. докл. Украинской Конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем". Секция "Прикладная механика". Киев. 15-19 мая 1995 г. – Киев, 1995. – С. 36–36.
32. *Георгиевский Д. В.* О смягчённом динамическом критерии устойчивости неконсервативных систем // Аналитические, численные и экспериментальные методы в механике. – Изд-во МГУ Москва, 1995. – С. 10–14.
- 1996
33. *Георгиевский Д. В.* Влияние типов возмущений на устойчивость процессов деформирования нелинейных тел // Тез. докл. 2 Сибирского Конгресса по Прикладной и Индустр. Математике (INPRIM-96). Новосибирск. 24 июня - 1 июля 1996 г. Т. 3. – Новосибирск, 1996. – С. 250–250.
34. *Георгиевский Д. В.* Типы возмущений и устойчивость процессов в МДГТ с позиций метода Ляпунова-Мовчана // Тез. докл. Украинской Конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем". Секция "Моделирование систем". Киев. 20-24 мая 1996 г. – Киев, 1996. – С. 39–39.
- 1997
35. *Georgievskii D. V.* Development of the Integral Relations Method in Conformity to Some Problems of Stability // Proc. 9th Conf. on Differential Equations (EQUAD-IFF' 9). Brno. 25-29 August 1997. – Brno, 1997. – P. 36–37.
36. *Георгиевский Д. В.* Аналитико-численное моделирование перехода к турбулентности в физически нелинейных течениях // Тез. докл. VII Международ. Симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Феодосия. 26-29 июня 1997 г. Т. 1. – Харьков, 1997. – С. 37–39.
37. *Георгиевский Д. В.* Моделирование наступления турбулизации в вязкопластических и нелинейно-вязких телах // Proc. Internat. Conf. "Modelling and Investigation of Systems Stability". Sec. "Mechanical Systems". Kiev. 19-23 May 1997. – Киев, 1997. – С. 37–37.

38. *Георгиевский Д. В.* Современные концепции устойчивости деформирования тел со сложной реологией // Тез. докл. Международ. научн. конгресса студентов, аспирантов и молодых учёных "Молодёжь и наука - третье тысячелетие". Т. 2. – НТА "АПФН" Москва, 1997. – С. 2–2.  
1998
39. *Georgievskii D. V.* Viscoplastic stratified composites: shear flows and stability // Proc. of NATO ASI "Mechanics of Composite Materials and Structures". Troia (Portugal), 12-24 Jul. 1998. Vol. 3. – NATO ASI Lisboa, 1998. – P. 315–324.
40. *Георгиевский Д. В.* Выбор определяющих соотношений в задачах устойчивости течений со сложной реологией // Тез. докл. 4 Симпозиума "Устойчивость и пластичность в МДТТ". Тверь. 16-19 июня 1998 г. – Тверь, 1998. – С. 22–23.
41. *Георгиевский Д. В.* Задачи устойчивости течений со сложной реологией // Тез. докл. 5 Международ. совещ.-семинара "Инженерно-физические проблемы новой техники". Москва. 19-22 мая 1998 г. – Изд-во МГТУ Москва, 1998. – С. 105–105.  
1999
42. *Georgievskii D. V.* Sensitivity of Vector Linear Flows with Respect to Disturbances of Hardening Functions // Proc. Annual Meeting GAMM. Metz (France). 12-16 April 1999. – Metz, 1999. – P. 59–60.
43. *Georgievskii D. V.* The Notion of Yield Stress for Tensor Non-Linear Media // Proc. 4th Internat. Congress on Industr. and Applied Mathematics (ICIAM99). Edinburgh. 5-9 July 1999. – Edinburgh, 1999. – P. 262–262.
44. *Георгиевский Д. В.* Анализ определяющих соотношений крови на макро- и микроуровнях // Proc. Internat. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation". Sec. "Mechanical Systems". Kiev. 25-29 May 1999. – Киев, 1999. – С. 18–18.  
2000
45. Несимметричные конфузорные течения в задаче Джеффри-Гамеля / Л. Д. Акуленко [и др.] // Краевые задачи аэрогидромеханики и их приложения. Т. 7. – Изд-во "ДАС" Казань Казань, 2000. – С. 340–341. – (Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского).
46. *Georgievskii D. V.* Analytical and Numerical Simulation of Instability in Non-Linear Media // Proc. 16th IMACS World Congress. Lausanne (Switzerland). 21-25 August 2000. – Lausanne, 2000. – P. 418–418.
47. *Georgievskii D. V.* Viscoplastic Flows with Low Yield Stress // Proc. Annual Meeting GAMM. Goettingen (Germany). 2-7 April 2000. – Goettingen, 2000. – P. 44–44.
48. *Георгиевский Д. В.* Задача о схлопывании кавитационного пузырька в нелинейной среде // Тез. докл. Международ. Конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения". Одесса. 12-14 сентября 2000 г. – "АстроПринт" Одесса, 2000. – С. 69–70.
49. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость процессов деформирования относительно возмущений материальных функций // Тез. докл. 5 Международ. Науч. Симпозиума "Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости". Тверь. 14-16 декабря 2000 г. – Тверь, 2000. – С. 15–15.

2001

50. *Georgievskii D. V.* The generalized Orr - Sommerfeld problem for viscoplastic flows // Proc. Internat. Conf. "Differential Equations and Related Topics", dedicated to the Centenary Anniversary of I.G.Petrovskii. Moscow. 22-27 May 2001. – Moscow, 2001. – P. 145–146.
51. *Георгиевский Д. В.* Гидродинамическая интерпретация постановок некоторых задач сдвиговой устойчивости // Упругость и неупругость / под ред. Д. В. Георгиевский. – Изд-во МГУ Москва Москва, 2001. – С. 365–369.
52. *Георгиевский Д. В.* Интегральные оценки устойчивости процессов деформирования неоднородных вязкопластических и нелинейно-вязких тел // Аннотации докл. VIII Всеросс. съезда по теоретич. и приклад. механике. Пермь. 23-29 августа 2001 г. – Изд-во УрО РАН Екатеринбург, 2001. – С. 179–179.
53. *Георгиевский Д. В.* О тензорно нелинейных эффектах в механике деформируемого твёрдого тела // Proc. Internat. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation". Kiev. 22-25 May 2001. – Киев, 2001. – С. 264–264.
54. *Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрия и механика: задачи, подходы, методы // Тезисы заседаний семинара “Актуальные проблемы геометрии и механики”. Т. 7. – Издательским дом “Открытые системы” Москва, 2001. – С. 301–301. – (Фундаментальная и прикладная математика, 7:1).
55. *Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В.* О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом // Тезисы заседаний семинара “Актуальные проблемы геометрии и механики”. Т. 7. – Издательским дом “Открытые системы” Москва, 2001. – С. 305–305. – (Фундаментальная и прикладная математика, 7:1).
56. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$  // Тезисы заседаний семинара “Актуальные проблемы геометрии и механики”. Т. 7. – Издательским дом “Открытые системы” Москва, 2001. – С. 315–315. – (Фундаментальная и прикладная математика, 7:1).

2003

57. *Georgievskii D. V.* Development of the integral relations method in hydrodynamical stability // Proc. Internat. Conf. "Kolmogorov and Contemporary Mathematics" in commemoration of the Centenary Anniversary of A.N.Kolmogorov. Moscow. 16-21 June 2003. – Moscow, 2003. – P. 742–743.
58. *Георгиевский Д. В., Кириллов А. С.* Нестационарный сдвиг тяжёлой геофизической структуры вдоль наклонной плоскости // Proc. Internat. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation". Kiev. 27-30 May 2003. – Киев, 2003. – С. 292–292.

2004

59. *Klimov D. M., Georgievskii D. V.* Weakly Nonhomogeneous Viscous and Viscoplastic Flows: Stability and Mixing // Proc. 21st Internat. Congress on Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM 2004). Warsaw. 21-25 August 2004. – Warsaw, 2004. – P. 395–395.
60. *Агафонов С. А., Георгиевский Д. В.* Потеря устойчивости нелинейного вязкоупругого стержня под действием следящей силы // Тез. докл. X Международ. научн. Конф. им. М.Кравчука. Киев. 13-15 мая 2004 г. – Киев, 2004. – С. 13–13.



61. *Георгиевский Д. В., Жданова А. В.* Асимптотические разложения в задаче о схлопывании и страгивании газового пузырька // Тез. докл. X Международ. научн. Конф. им. М.Кравчука. Киев. 13-15 мая 2004 г. – Киев, 2004. – С. 74–74.
62. *Георгиевский Д. В., Шамшурин Д. А.* Устойчивость малых колебаний в трёх-слойной упруговязкой среде // Тез. докл. X Международ. научн. Конф. им. М.Кравчука. Киев. 13-15 мая 2004 г. – Киев, 2004. – С. 282–282.
- 2005
63. *Agafonov S. A., Georgievskii D. V.* Instability of non-linear viscoelastic beam under tracking loading // Proc. Internat. Conference "Physics and Control (PhysCon 2005)". Saint-Petersburg. – Saint-Petersburg, 2005. – P. 928–932.
64. *Georgievskii D. V.* Spectral Problems on Hydrodynamic Stability of Flows with Non-Linear Constitutive Relations // Proc. 5th ISAAC Congress. Catania (Italy). 25-30 July 2005. – Catania, 2005. – P. 194–194.
65. *Георгиевский Д. В., Жданова А. В.* Новые асимптотики в задаче о страгивании и схлопывании газового пузырька в вязкопластической среде // Proc. Internat. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation". Kiev. 23-25 May 2005. – Киев, 2005. – С. 266–266.
- 2006
66. *Georgievskii D. V.* Simulation of deformation processes in weakly nonhomogeneous medium (including composites // Proc. Internat. Workshop "Research in Mechanics of Composites 2006". Bad-Herrenalb, Germany. 26-29 November 2006. – KIT Ed Karlsruhe, 2006. – P. 11–11.
67. *Георгиевский Д. В.* Возмущения материальных функций в определяющих соотношениях идеально- и вязкопластических сред // Упругость и неупругость. – УРСС Москва, 2006. – С. 35–43.
68. *Георгиевский Д. В.* Диффузия вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости // Тез. докл. 6 Международ. Науч.Симпозиума "Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости в МДГТ". Тверь. 1-3 марта 2006 г. – Тверь, 2006. – С. 19–20.
69. *Георгиевский Д. В.* Жёсткие зоны в статически определимых и неопределимых задачах вязкопластического течения // Проблемы механики деформируемых твёрдых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е.И.Шемякина. – Физматлит Москва, 2006. – С. 135–141.
70. *Георгиевский Д. В.* Моделирование слабой неоднородности в теории пластического течения // Аннотации докл. IX Всеросс. съезда по теоретич. и приклад. механике. Нижний Новгород. 22-28 августа 2006 г. – Изд-во ННГУ Нижний Новгород, 2006. – С. 65–65.
71. *Георгиевский Д. В., Окулова Н. Н.* Диффузия разрыва касательного напряжения на границе полуплоскости // Тезисы докладов научной конференции "Ломоносовские чтения". – Изд-во Московского университета Москва, 2006. – С. 48.
72. *Кийко И. А., Георгиевский Д. В.* Теория вязкопластических течений: идеи А.А.Ильюшина и их развитие // Тез. докл. Международ. научн. Симпозиума по пробл. механики деформир. тел, посвящ. 95-летию со дня рожд. А.А.Ильюшина. Москва. 19-20 января 2006 г. – Москва, 2006. – С. 9–10.

2007

73. Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Некоторые актуальные задачи геометрии и механики // Геометрия и механика. Т. 23. – РУДН Москва, 2007. – С. 34–34. – (СМФН).
74. Георгиевский Д. В. Автомодельность в задаче об обобщённой диффузии вихря // Proc. Internat. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation". Kiev. 22-25 May 2007. – Киев, 2007. – С. 278–278.
75. Георгиевский Д. В. О связи неустойчивости единственного решения и неединственности в задачах механики // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости. Сб. статей к 75-летию В.Г.Зубчанинова. – Изд-во ТвГТУ Тверь, 2007. – С. 94–97.
76. Георгиевский Д. В. Обобщённая диффузия вихря в нелинейных параболических задачах // Труды Международ. Конф. "Неклассические задачи механики". Кутаиси. 25-27 октября 2007 г. Т. 2. – Изд-во Кутаисского ГУ Кутаиси, 2007. – С. 31–35.
77. Георгиевский Д. В., Окулова Н. Н. Численно-аналитический метод решения одного из вариантов задачи Стефана, возникающей в нестационарной вязкопластичности // Тезисы докладов научной конференции "Ломоносовские чтения". – Изд-во Московского университета Москва, 2007. – С. 55–56.
78. Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, и методы // Геометрия и механика. Т. 23. – РУДН Москва, 2007. – С. 16–16. – (СМФН).
79. Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом // Геометрия и механика. Т. 23. – РУДН Москва, 2007. – С. 19–19. – (СМФН).
80. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Валерий Владимирович Трофимов // Геометрия и механика. Т. 23. – РУДН Москва, 2007. – С. 5–15. – (СМФН). – DOI: 10.1007/s10958-008-9189-x.
81. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафнова // Геометрия и механика. Т. 23. – РУДН Москва, 2007. – С. 16–45. – (СМФН). – DOI: 10.1007/s10958-008-9190-4.
82. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$  // Геометрия и механика. Т. 23. – РУДН Москва, 2007. – С. 24–25. – (СМФН).
83. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$  // Геометрия и механика. Т. 23. – РУДН Москва, 2007. – С. 30–30. – (СМФН).
84. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в  $n$ -мерном пространстве // Геометрия и механика. Т. 23. – РУДН Москва, 2007. – С. 31–31. – (СМФН).

2008

85. Nonsymmetric confusor flows in the Jeffery-Hamel problem / L. D. Akulenko [et al.] // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of

- Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 473–473. – (Journal of Mathematical Sciences).
86. Современное состояние проблемы течений вязкой жидкости в сходящихся каналах / Л. Д. Акуленко [и др.] // Актуальные проблемы механики. – Наука Москва, 2008. – С. 144–169. – (Механика жидкости, газа и плазмы).
  87. *Agafonov S. A., Georgievskii D. V.* Destabilization of a console rod loaded with the following force by the internal viscosity // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 486–487. – (Journal of Mathematical Sciences).
  88. *Georgievskii D. V.* Asymptotic analysis in the Prandtl’ problem // Proc. Conf. "Boundary Value Problems". Santiago de Compostela (Spain). 16-19 September 2008. – Santiago de Compostela, 2008. – P. 71–71.
  89. *Georgievskii D. V.* Concentrated forces in elastic bodies with plane boundaries // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 466–466. – (Journal of Mathematical Sciences).
  90. *Georgievskii D. V.* Diffusion of the tangential stress discontinuity on the boundary of a viscoplastic half-plane // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 489–490. – (Journal of Mathematical Sciences).
  91. *Georgievskii D. V.* Nonlinear tensor functions in the mechanics of continua // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 472–472. – (Journal of Mathematical Sciences).
  92. *Georgievskii D. V.* On Saint-Venant equations of compatibility in an  $n$ -dimensional space // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 485–485. – (Journal of Mathematical Sciences).
  93. *Georgievskii D. V.* On the proof of the  $\pi$ -theorem of dimension theory: history of the problem and priorities // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 491–491. – (Journal of Mathematical Sciences).
  94. *Georgievskii D. V.* On the subject of study and treatment of results in the mechanics of carbon cage structures (fullerens, nanotubes) // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 495–495. – (Journal of Mathematical Sciences).
  95. *Georgievskii D. V.* On the work of the Vth Congress of ISAAC // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow

- State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 494–494. – (Journal of Mathematical Sciences).
96. *Georgievskii D. V.* Perturbations of slip surfaces in the spatial theory of perfect plasticity // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 464–464. – (Journal of Mathematical Sciences).
  97. *Georgievskii D. V.* Rheological constitutive relations of blood in vivo // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 481–481. – (Journal of Mathematical Sciences).
  98. *Georgievskii D. V.* Rigid zones in statically determinable and indeterminable problems of viscoplastic flow // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 488–488. – (Journal of Mathematical Sciences).
  99. *Georgievskii D. V., Osipov M. O.* On diffusion on a vortex layer in a viscoplastic half-plane // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 467–467. – (Journal of Mathematical Sciences).
  100. *Georgievskii D. V., Zhdanova A. V.* Deformation initiation and collapse of a gas bubble: asymptotics and numerical analysis // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 486–486. – (Journal of Mathematical Sciences).
  101. *Petrov A. G., Georgievskii D. V.* Quasistationary motion of weakly nonuniform viscous fluid in a thin layer // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 154. – 2008. – P. 470–470. – (Journal of Mathematical Sciences).
  102. *Георгиевский Д. В.* Асимптотический анализ и система гипотез в классической задаче Прандтля // Проблемы фундаментальной механики в теории обработки давлением. Тез. докл. Научного семинара МАМИ. 2008. – Изд-во МАМИ Москва, 2008. – С. 15–16.
  103. *Георгиевский Д. В.* О линейности касательного напряжения по толщине в задачах о сдавливании тонких идеальножёсткопластических слоёв // Труды IX Международ. Научн. Конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула. 17-21 ноября 2008 г. – Изд-во ТулГУ Тула, 2008. – С. 164–167.
  104. *Георгиевский Д. В., Ожолова Н. Н.* Численно-аналитическое исследование движения границ жёстких зон в нестационарных задачах вязкопластического течения // Тезисы докладов научной конференции "Ломоносовские чтения". – Изд-во Московского университета Москва, 2008. – С. 54–55.

2009

105. *Georgievskii D. V.* Asymptotic Analysis in the Prandtl' Problem // "Mathematical Models in Engineering, Biology, and Medicine". Proceedings of the International Conference on Boundary Value Problems. – American Inst. Phys Melville - New-York, 2009. – P. 166–174.
106. *Georgievskii D. V.* General Asymptotic Expansions by Low Geometric Parameter in Problems of Thin Solid Mechanics // Proc. 7th EUROMECH Solid Mechanics Conf. Lisbon. 7-11 September 2009. – Lisbon, 2009. – P. 35–36.
107. *Georgievskii D. V.* Generalized vortex diffusion: self-similarity and Stefan problem // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 161. – 2009. – P. 608–608. – (Journal of Mathematical Sciences).
108. *Georgievskii D. V.* On flow stability with respect to perturbations of medium material functions // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 161. – 2009. – P. 604–604. – (Journal of Mathematical Sciences).
109. *Georgievskii D. V.* Structure of polynomial solutions of an elasticity theory system of equations in stresses // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 161. – 2009. – P. 612–612. – (Journal of Mathematical Sciences).
110. *Georgievskii D. V.* Theory of viscous-plastic flows: ideas of A.A. Il'yushin and their development // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 161. – 2009. – P. 603–603. – (Journal of Mathematical Sciences).
111. *Georgievskii D. V., Promyslova A. S.* Perturbations of eigenvalues in a certain generalized Rayleigh problem // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 161. – 2009. – P. 614–614. – (Journal of Mathematical Sciences).
112. *Георгиевский Д. В.* Введение // А.А.Ильюшин. Труды. Моделирование динамических процессов в твёрдых телах и инженерные приложения. Т. 4. – Физматлит М, 2009. – С. 7–9.
113. *Георгиевский Д. В.* Задачи на собственные значения для уравнения Орра - Зоммерфельда с неклассическими граничными условиями // Труды Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений". – 2009. – С. 271–271.
114. *Георгиевский Д. В.* Критические числа Рейнольдса в задачах на собственные значения для уравнения Орра - Зоммерфельда // Современные проблемы математики и механики. Т. 2. – Изд-во МГУ Москва, 2009. – С. 17–25. – (2).
115. *Георгиевский Д. В.* Об асимптотиках по малому геометрическому параметру решений первой краевой задачи теории упругости // Труды X Международ.

- Научн. Конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула. 23-27 ноября 2009 г. – Изд-во ТулГУ Тула, 2009. – С. 23–27.
116. *Георгиевский Д. В.* Спектральные задачи устойчивости в механике сплошной среды // Proc. Internat. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation". Kiev. 27-29 May 2009. – Киев, 2009. – С. 192–192.
117. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость деформирования тел с нелинейными определяющими соотношениями // Труды Второй Международ. Конф. "Аэрокосмические технологии". Москва. 19-20 мая 2009 г. – Москва, 2009. – С. 83–84.
118. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара "Актуальные проблемы геометрии и механики" им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Геометрия и механика. Т. 62. – Ин-т кибернетики НАН Грузии Тбилиси, 2009. – С. 3–15. – (Современная математика и ее приложения). – DOI: 10.1007/s10958-009-9591-z.
119. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара "Актуальные проблемы геометрии и механики" им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. Т. 65. – НАН Грузии Тбилиси, 2009. – С. 3–10. – (Современная математика и ее приложения). – DOI: 10.1007/s10958-010-9831-2.
120. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* П-теорема теории размерностей (к 100-летию доказательства) // Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. Т. 65. – НАН Грузии Тбилиси, 2009. – С. 3–3. – (Современная математика и ее приложения).
121. *Климов Д. М., Георгиевский Д. В.* Эволюция слабой начальной неоднородности (начало перемешивания) в сплошной среде // Актуальные проблемы механики. – Наука Москва, 2009. – С. 352–370. – (Механика деформируемого твёрдого тела).
- 2010
122. *Georgievskii D. V.* Asymptotic analysis and hypotheses in the classical Prandtl problem // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 165. – 2010. – P. 611–611. – (Journal of Mathematical Sciences).
123. *Georgievskii D. V.* Asymptotics of solutions of three-dimensional dynamical Lamé equations for compressible and incompressible bodies // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 165. – 2010. – P. 615–615. – (Journal of Mathematical Sciences).
124. *Georgievskii D. V.* Stability problems of flows with nonlinear constitutional relations // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 165. – 2010. – P. 608–609. – (Journal of Mathematical Sciences).

125. *Vaganov P. A., Georgievskii D. V.* On the concept of a domaining wave in gravitationally unstable systems // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 165. – 2010. – P. 612–612. – (Journal of Mathematical Sciences).
126. *Агафонов С. А., Георгиевский Д. В.* Скачки критических следящих сил для вязкоупругих стержней с исчезающе малой внутренней вязкостью // Труды XI Международ. Научн. Конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула. 22-26 ноября 2010 г. – Изд-во ТулГУ Тула, 2010. – С. 22–26.
127. *Георгиевский Д. В.* Асимптотики по малым геометрическим параметрам в краевых задачах для деформируемых тонких тел // Тез. докл. VII Международ. Науч.Симпозиума "Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в МДТТ". Тверь. 16-17 декабря 2010 г. – Изд-во ТвГТУ Тверь, 2010. – С. 23–23. 2011
128. *Георгиевский Д. В.* Критические параметры устойчивости в обобщённой задаче Орра - Зоммерфельда // Труды XII Международ. Научн. Конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула. 19-23 сентября 2011 г. – Изд-во ТулГУ Тула, 2011. – С. 81–83.
129. *Георгиевский Д. В.* Об обобщённых задачах Орра - Зоммерфельда в МСС // Proc. XV Internat. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation". Kiev. 25-27 May 2011. – Киев, 2011. – С. 256–256.
130. *Георгиевский Д. В., Ваганов П. А.* Многослойные вязкие структуры: дисперсионное уравнение и гравитационная неустойчивость // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твёрдого тела. Сб. статей к 80-летию В.Г.Зубчанинова. – Изд-во ТвГТУ Тверь, 2011. – С. 87–90.
131. *Георгиевский Д. В., Вилле Р.* Асимптотическое интегрирование в краевых задачах идеальножёсткопластического течения в тонком слое // Упругость и неупругость / под ред. Д. В. Георгиевский. – Изд-во МГУ Москва, 2011. – С. 52–59. 2012
132. *Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* О роли женщин в развитии современной механики // Геометрия и механика. Т. 76. – НАН Грузии Тбилиси, 2012. – С. 3–3. – (Современная математика и ее приложения).
133. *Георгиевский Д. В.* Асимптотическое интегрирование в задаче о динамическом сжатии тонкого пластического слоя // Труды XVI Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". Т. 1. – Изд-во ЮФУ Ростов-на-Дону, 2012. – С. 60–64.
134. *Георгиевский Д. В.* О постановках динамической задачи в напряжениях в изотропной теории упругости // Упругость и неупругость. – Издательство Московского университета, Москва, 2012. – С. 67–73.
135. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафопова // Геометрия и механика. Т. 76. – НАН Грузии Тбилиси, 2012. – С. 3–10. –

(Современная математика и ее приложения). – DOI: 10.1007/s10958-012-1063-1.

2013

136. *Георгиевский Д. В.* Динамическое сжатие тонкого идеально жёсткопластического слоя плоскими плитами // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 15-23 апреля 2013 г. – Издательство Московского университета Москва, 2013. – С. 40–40.
137. *Георгиевский Д. В.* Динамическое сжатие тонкого плоского идеально жёсткопластического слоя // Труды VI Школы-семинара "Современные проблемы термовязкопластичности в прикладных задачах анализа конструкций и технологий высоких параметров". – Изд-во МГМУ "МАМИ" Москва, 2013. – С. 59–60.
138. *Георгиевский Д. В.* Об обобщении кинематических формул Чезаро на случай конечных деформаций // Труды XIV Международ. Научн. Конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула. 16-20 сентября 2013 г. – Изд-во ТулГУ Тула, 2013. – С. 230–235.
139. *Георгиевский Д. В.* Общие решения ослабленных систем теории упругости в напряжениях // Proc. XVI International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation". – Изд-во КНУ им. Т.Г.Шевченко Kiev, Ukraine, 2013. – С. 266–266. – (Modelling and Stability).
140. *Георгиевский Д. В., Агахи К. А.* Тензорно нелинейные определяющие соотношения с тензорной мерой повреждённости в механике деформируемого твёрдого тела // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 15-23 апреля 2013 г. – Издательство Московского университета Москва, 2013. – С. 16–16.
141. *Георгиевский Д. В., Мюллер В. Х., Абали Б. Э.* Интегральные оценки критических чисел Рейнольдса для уравнения Орра-Зоммерфельда // Материалы Международной конференции "Турбулентность и волновые процессы", посвящённой 100-летию со дня рождения академика М.Д.Миллионщикова, 26-28 ноября 2013 г. – ООО "Интуит.ру" Москва, 2013. – С. 108–110.

2014

142. *Georgievskii D. V.* How to formulate the initial-boundary-value problem of elastodynamics in terms of stresses ? // Continuous and Distributed Systems. T. 211. – Springer Switzerland, 2014. – С. 89–95. – (Solid Mechanics and Its Applications).
143. *Георгиевский Д. В.* О краевых задачах в напряжениях для ослабленных систем уравнений совместности // Труды Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". – Изд-во Тульского ГУ Тула, 2014. – С. 166–168.
144. *Георгиевский Д. В., Агахи К. А., Ковальков В. К.* Экспериментально-теоретическое исследование влияния теплового удара на несущую способность коротких стержневых конструкций // ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ. – Московский университет Москва, 2014. – (Механика).

2015



145. *Garyaeva T. I., Georgievskii D. V.* On the first boundary-value problem of the theory of elasticity for a cylindrical layer with strongly differing characteristic dimensions // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 716–716. – (Journal of Mathematical Sciences).
146. *Georgievskii D. V.* Adjusting experiments for finding material functions for tensor nonlinear defining relations // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 726–727. – (Journal of Mathematical Sciences).
147. *Georgievskii D. V.* Asymptotic analysis of the Prandtl problem in the dynamical statements // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 722–723. – (Journal of Mathematical Sciences).
148. *Georgievskii D. V.* Eigenvalue problem for the generalized Orr-Sommerfeld equation in the theory of hydrodynamical stability // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 718–718. – (Journal of Mathematical Sciences).
149. *Georgievskii D. V.* General solutions of systems in stresses that are not equivalent to the classic system of elasticity theory // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 728–728. – (Journal of Mathematical Sciences).
150. *Georgievskii D. V.* Gravitational stability of some two-layer vertically moving systems // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 722–722. – (Journal of Mathematical Sciences).
151. *Georgievskii D. V.* On generalized Orr-Sommerfeld problems in continuum mechanics // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 723–724. – (Journal of Mathematical Sciences).
152. *Georgievskii D. V.* On the possible statements of the dynamical problem in terms of stresses in the isotropic theory of elasticity // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 715–715. – (Journal of Mathematical Sciences).
153. *Georgievskii D. V.* Symmetrization of the tensor operator of compatibility equations in stresses in the anisotropic elasticity theory // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 731–731. – (Journal of Mathematical Sciences).

154. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Urgent problems of geometry and mechanics: foundations, problems, methods, and applications // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 730–730. – (Journal of Mathematical Sciences). – DOI: 10.1007/s10958-015-2212-0.
155. *Georgievskii D. V., Wille R.* Asymptotical integration in boundary-value problems on a perfect rigid plastic flow in a thin layer // Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov. Vol. 204. – 2015. – P. 721–721. – (Journal of Mathematical Sciences).
156. *Pobedria B. E., Georgievskii D. V.* Uniform Approach to Construction of Non-isothermal Models in the Theory of Constitutive Relations // Continuous and Distributed Systems II. Theory and Applications. Vol. 30. – Springer Switzerland, 2015. – P. 341–352. – (Studies in Systems, Decision and Control).
157. *Георгиевский Д. В.* Квазистатическое и динамическое деформирование идеально жёсткопластического материала в тонком слое // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань 20-24 августа 2015 г.) Т. 20. – Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015. – С. 74–74. – (Файл № 01019).
158. *Георгиевский Д. В.* Об обобщённых кинематических формулах Чезаро для конечных плоских деформаций // Современная математика и ее приложения. Т. 98. – ВИНТИ Москва, 2015. – С. 3–4.
159. *Георгиевский Д. В.* Общие решения ослабленных систем теории упругости в напряжениях // Современная математика и ее приложения. Т. 98. – ВИНТИ Москва, 2015. – С. 5–5.
160. *Георгиевский Д. В.* Одноосное квазистатическое растяжение тонкого пластического листа при наличии шейки // Тезисы докладов VIII Международного Научного симпозиума "Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в МДГТ". – Тверь, 2015. – С. 22–23.
161. *Георгиевский Д. В.* Уравнения совместности в системах, основанных на обобщённых кинематических соотношениях Коши // Современная математика и ее приложения. Т. 98. – ВИНТИ Москва, 2015. – С. 6–6.
162. *Георгиевский Д. В.* Эквивалентность систем уравнений совместности в напряжениях в  $R^n$  // Proc. XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation". – ДП "Информационно-аналитическое агентство" Киев, 2015. – С. 95–95.
163. *Георгиевский Д. В., Тлюстангелов Г. С.* Устойчивость двухслойной системы тяжелых идеальных жидкостей при переносном вертикальном движении // Материалы I Международной научной конференции "Осенние математические чтения в Адыгее", посвященной профессору Казбеку Сагидовичу Мамию. – издательство Адыгейский государственный университет, Майкоп, 2015. – С. 71–73.

164. *Pobedria B. E., Georgievskii D. V.* Two Thermodynamic Laws as the Forth and the Fifth Integral Postulates of Continuum Mechanics // *Advances in Dynamical Systems and Control*. Vol. 69. – Springer Switzerland, 2016. – P. 317–325. – (Studies in Systems, Decision and Control).
165. *Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* История и «математическая формула» онегинской строфы // *Геометрия и механика*. Т. 100. – ГТУ, 2016. – С. 5–5. – (Современная математика и ее приложения).
166. *Георгиевский Д. В.* Спектральные задачи устойчивости нестационарного сдвига вязкого слоя // *Геометрия и механика*. Т. 100. – ГТУ, 2016. – С. 5–5. – (Современная математика и ее приложения).
167. *Георгиевский Д. В.* Эволюция трёхмерной картины возмущений, наложенных на вращательно-осевое течение в цилиндрическом зазоре // *Геометрия и механика*. Т. 100. – ГТУ, 2016. – С. 7–7. – (Современная математика и ее приложения).
168. *Георгиевский Д. В., Тлюстангелов Г. С.* Интегральные оценки роста и затухания возмущений в задаче о растекании-стоке кольца // Тезисы докладов Международной Конференции "Современные проблемы математической физики и вычислительной математики", приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н.Тихонова. – Издательский отдел ВМК МГУ Москва, 2016. – С. 33–33.
169. *Победря Б. Е., Георгиевский Д. В.* Напряжённо-деформированное состояние вблизи шейки в растягиваемом жёсткопластическом стержне // *УПРУГОСТЬ И НЕУПРУГОСТЬ* / под ред. Э. Б. Завойчинская. – Издательство Московского университета, Москва, 2016. – С. 105–110.
- 2017
170. *Akulenko L. D., Georgievskii D. V., Kumakshev S. A.* Multi-Mode Symmetric and Asymmetric Solutions in the Jeffery-Hamel Problem for a Convergent Channel // *Mechanics for Materials and Technologies*. Vol. 46. – Springer, 2017. – P. 1–31. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-319-56050-2\\_1.
171. *Георгиевский Д. В.* Особенности напряжённо-деформированного состояния многомерной упругой сплошной среды // Вопросы прикладной математики и проблема взаимодействия твёрдых тел с жидкой и газовой средой: Сб. тр. Всероссийской конференции, посвящённой 85-летию И.А. Кийко. – Диалог-МИФИ Москва, 2017. – С. 234–241.
172. *Георгиевский Д. В., Шабайкин Р. Р.* Квазистатическое и динамическое сдавливание плоского круглого идеальнопластического слоя жёсткими плитами // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твёрдого тела. – Изд-во ТвГТУ Тверь, 2017. – С. 56–63.
- 2018
173. *Georgievskii D. V.* Constitutive relations in multidimensional isotropic elasticity // Proc. IX Annual International Meeting of the Georgian Mechanical Union. – Kutaisi, 2018. – P. 13–13.
- 2019
174. *Georgievskii D. V.* Procedure of the Galerkin Representation in Transversely Isotropic Elasticity // *Modern Mathematics and Mechanics*. – Springer, 2019. –

- P. 117–124. – (Understanding Complex Systems). – DOI: 10.1007/978-3-319-96755-4\\_7.
175. *Georgievskii D. V.* Types of Physical Nonlinearity in the Theory of Constitutive Relations and the Generalized Poynting Effect // New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. Vol. 108. – Springer Nature Switzerland, 2019. – P. 129–136. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-030-13307-8\\_10.
176. *Georgievskii D. V., Gorbachev V. I.* Pobedrya, Boris Efimovich // Altenbach H., Öchsner A. (eds) Encyclopedia of Continuum Mechanics. – Springer Berlin, Heidelberg, 2019. – DOI: 10.1007/978-3-662-53605-6\\_360-1.
177. *Georgievskii D. V., Ilyushina E. A.* Ilyushin, Alexei Antonovich // Altenbach H., Öchsner A. (eds) Encyclopedia of Continuum Mechanics. – Springer Berlin, Heidelberg, 2019. – DOI: 10.1007/978-3-662-53605-6\\_322-1.
- 2020
178. *Georgievskii D. V.* The Diffusion–Vortex Problems in Terms of Stresses for Bingham Materials // Developments and Novel Approaches in Nonlinear Solid Body Mechanics. Vol. 130. – Switzerland : Springer Nature, 2020. – P. 59–65. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-030-50460-1\\_6.
179. *Георгиевский Д. В.* Интегральные оценки колебательной устойчивости сдвигового течения в плоском вязком слое (трёхмерные возмущения) // Современные вопросы устойчивости, пластичности и ползучести в механике деформируемого твёрдого тела. – Издательство Тверского государственного университета Тверь, 2020. – С. 120–125.
180. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость диффузионно-вихревых ньютоновских течений в полуплоскости // Тезисы докладов XX международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г). – Издательство Южного федерального университета Ростов-на-Дону, 2020. – С. 38–38.
181. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость диффузионно-вихревых ньютоновских течений в полуплоскости // Современные проблемы механики сплошной среды // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX Междунар. конф. (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.) Т. 1. – изд-во ЮФУ Ростов-на-Дону; Таганрог, 2020. – С. 72–76.
- 2021
182. *Georgievskii D. V.* Reduction of the Lamé Tensor Equations to the System of Non-Coupled Tetraharmonic Equations // Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. – Switzerland : Springer Nature, 2021. – P. 27–33. – (Understanding Complex Systems). – DOI: 10.1007/978-3-030-50302-4\\_2.
183. *Georgievskii D. V., Shabaykin R. R.* Quasistatic and Dynamic Deformation of an Asymptotically Thin Perfectly Rigid-Plastic Spherical Layer // Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials. Vol. 141. – New York : Springer, 2021. – P. 155–161. – DOI: 10.1007/978-3-030-54928-2\\_12.

184. *Васин Р. А., Георгиевский Д. В., Чистяков П. В.* Тенденции и возможные подходы к математическому моделированию ретчеттинга // Упругость и Неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. ИЛЬЮШИНА / под ред. Г. Л. Бровко, И. Н. Молодцов, Н. В. Овчинникова. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2021. – С. 38–47.
185. *Георгиевский Д. В., Цветков И. М.* Динамические режимы растяжения идеальножёсткопластического стержня // ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ. – 2021. – С. 58–59. – (Механика).  
2022
186. *Georgievskii D. V.* Two Thermodynamic Laws in Phenomenological Mechanics of Continuum: Postulates or Definitions // Theoretical Analysis, Computations, and Experiments of Multiscale Materials. – Springer, Cham, 2022. – P. 145–154. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-031-04548-6\\_8.  
2023
187. *Георгиевский Д. В.* Квазиполиномиальные скалярные потенциалы в нелинейной теории упругости // Тез. докладов XXI Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". – Издательство ЮФУ Ростов-на-Дону, 2023. – С. 30–30.  
2024
188. *Банько В. А., Георгиевский Д. В.* Разгон сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости с переменным по глубине пределом текучести // X Поляховские чтения : Материалы международной научной конференции по механике, 23–27 сентября 2024 г., – СПб. – Издательство ВВМ Санкт–Петербург, Россия, 2024. – С. 485–488.
189. *Георгиевский Д. В.* Моделирование "ортогональных" эффектов в экспериментальной МДТТ // Математические проблемы механики сплошных сред. Тезисы докладов Всероссийской конференции, посвящённой 105-летию со дня рождения академика РАН Л.В. Овсянникова. – Новосибирск : Сибирское отделение Российской академии наук, 2024. – С. 43–44.  
2025
190. *Georgievskii D. V.* Operator Algebra in Linear Viscoelasticity: Experimental Aspects // Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Vol. 223. – Springer, 2025. – P. 213–222. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-031-90022-8.
191. *Георгиевский Д. В.* Динамическое деформирование тонких идеальножёсткопластических тел // XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 24–28 февраля 2025 г. Тезисы докладов // XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. – ПФИЦ УрО РАН Пермь, 2025. – С. 23–23.
192. *Георгиевский Д. В.* Достаточные оценки устойчивости нестационарного комбинационного сдвигового течения между соосными цилиндрами // Конференция по проблемам механики сплошных сред, посвящённая 90-летию юбилею профессора МГУ М.Э.Эглит: тезисы докладов (15 января 2025 года, Москва, НИИ механики МГУ) / Под редакцией Ю.С. Зайко, М.Э. Эглит / под ред. Ю. С. Зайко, М. Э. Эглит. – Москва : ООО "МАКС Пресс", 2025. – С. 15–15.

193. *Георгиевский Д. В.* Экспоненциальное затухание возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы (Тезисы докладов Международной конференции, посвящённой И.Г.Петровскому). – Москва : Издательский дом МГУ, 2025. – С. 127–129.
194. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* О XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г.) // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики», Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. Т. 238. – ВИНТИ РАН Москва, 2025. – С. 16–16. – (Материалы 6 Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (DYSC 2024). Иркутск, 16–20 сентября 2024 г. Часть 1).







С. В. Тихонов

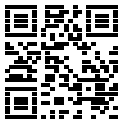
## К ИЗБРАНИЮ ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛИСОВЕНКО ЧЛЕНОМ–КОРРЕСПОНДЕНТОМ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

*Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** Статья посвящена член-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, Дмитрию Сергеевичу Лисовенко. В настоящей библиографической заметке приводятся биографические сведения об этом крупном ученом-механике.

**Ключевые слова:** механика, персоналии, член-корреспондент РАН

**Тихонов Сергей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий; e-mail: strangcheb@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385



**для цитирования:** Тихонов С. В. К избранию Дмитрия Сергеевича Лисовенко членом–корреспондентом Российской академии наук // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 55–76. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.012. EDN: LPOECW

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

S. V. Tikhonov

## ON THE ELECTION OF DMITRY SERGEEVICH LISOVENKO AS A CORRESPONDING MEMBER OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** This article is dedicated to Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dmitry Sergeevich Lisovenko. This bibliographic note provides biographical information about this leading mechanical scientist.

**Keywords:** mechanics, personalities, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences.

Sergey V. Tikhonov, PhD, Assoc. Prof.; e-mail: strangcheb@mail.ru;  
<https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385



**to cite this article:** Tikhonov S. V. On the election of Dmitry Sergeevich Lisovenko as a Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 55–76. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.012

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

Лисовенко Дмитрий Сергеевич родился в 17 февраля 1981 г. в городе Воркута. Среднее образование начал получать в школе №5 города Воркуты. После переезда в Москву продолжил обучение в школе № 155 с 1996 г., которую и закончил в 1998 г. В 1998 г поступил в «МАТИ»-РГТУ им. К.Э. Циолковского (с 01.10.2015 г. НИУ МАИ) на факультет «Авиатехнологический» (кафедра «Физика» (научные руководители кафедры академик РАН Д.М. Климов и член-корр. РАН Р.В. Гольдштейн), с 01.10.2015 г кафедра «Инженерная физика» НИУ МАИ). Закончил в 2003 г. «МАТИ»-РГТУ им. К.Э. Циолковского по специальности «Физика» со специализацией в области механики прочности и разрушения материалов и конструкций. С сентября 2003 г. и по декабрь 2017 г. Лисовенко Д.С. работал сотрудником лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций (руководитель член-корр. РАН Р.В. Гольдштейн) Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН). В ИПМех РАН прошел путь от младшего научного сотрудника до ведущего научного сотрудника. С января 2018 года заведующий лабораторией механики технологических процессов. В 2010 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Описание механических свойств углеродных и неуглеродных нанотрубок и нанотрубок в рамках теории упругости анизотропного тела» (руководитель Городцов В.А., оппоненты – Н.Г. Бураго Николай Георгиевич (ИПМех РАН), Белов Александр Юрьевич (Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН), Ведущая организация - Кафедра теории пластичности механо-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова), а в 2019 г. – докторскую диссертацию «Ауксетическая механика изотропных материалов, кристаллов и анизотропных композитов» (оппоненты — академик РАН Аннин Борис Дмитриевич (Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН), Никитин Илья Степанович (Институт автоматизации проектирования РАН), Шешенин Сергей Владимирович (кафедра теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова), ведущая организация — Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого). Защиты состоялись на заседании Диссертационного совета ИПМех РАН. Профессор РАН с 2022 г., член-корреспондент РАН с 2025 г.

Лисовенко Д.С. – специалист в области механики твердого деформируемого тела и ее приложений в технике. Ему принадлежит ряд фундаментальных результатов в теории упругости анизотропного тела, нано- и микромеханике материалов. В первую очередь, эти исследования были направлены на исследование механических свойств материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков). Лисовенко Д.С. выявил свыше 450 кристаллических

ауксетиков, установил классификационные схемы для ауксетиков из кристаллов различных кристаллических систем. Им развита аналитическая модель цилиндрически анизотропных нано/микротрубок из кристаллов различных кристаллических систем для описания деформаций растяжения и кручения. Установлен линейный прямой и обратный эффект Пойнтинга для хиральных нано/микротрубок. Решены задачи растяжения слоистых пластин и слоистых нано/микротрубок, композитов из ауксетиков и неауксетиков (материалов с положительным коэффициентом Пуассона). Проведен сравнительный анализ поверхностных волн Релея и Лява для изотропных материалов с положительным и отрицательным коэффициентом Пуассона. Изучаются механические свойства ауксетических метаматериалов при пробивании жестким ударником. Установлено отклонение направления движения ударника после вылета из пробиваемого ауксетических хиральных метаматериалов от подлетного направления (нормального к боковой поверхности). Исследована отрицательная ползучесть монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов. Разработан методологический подход для исследования механики разрыва брюшной аневризмы. Результаты своих фундаментальных исследований Лисовенко Д.С. успешно применяет при решении прикладных задач. Лисовенко Д.С. — один из авторов биodeградируемого кардиоваскулярного стента с ауксетическими свойствами. Разрабатываются защитные конструкции на основе ауксетических метаматериалов.

С 2018 г. и по настоящее время Лисовенко Д.С. является членом редколлегии журнала «Известия РАН. Механика твердого тела». С 2020 г. стал в журнале ответственным секретарем редколлегии. Лисовенко Д.С. также является членом редколлегии журналов: «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния», «Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки», «Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика». Был приглашенным редактором в журнале *Crystals*.

Лисовенко Д.С. имеет следующие награды: Медаль РАН для молодых ученых РАН в области проблем машиностроения, механики и процессов управления (2010 г.), Премия Правительства Москвы молодым ученым в номинации «Математика, механика и информатика» (2014 г.), Нагрудный знак «Молодой ученый» Министерства науки и высшего образования (2020 г.), Юбилейная медаль «300 лет Российской академии наук» (2024 г.), Медаль «Наука. Творчество. Космонавтика XXI века» Федерации космонавтики России (2014 г.), Премия «Award for Excellence» («За выдающиеся достижения») в рамках Auxetics Young Researchers Forum 2016 на Международной конференции «Auxetics-2016» (Польша). Он является членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике с 2023 г. Лисовенко Д.С. сочетает научную работу с научно-организационной и педагогической деятельностью. Он является членом диссертационного совета при Институте металлургии и материаловедения имени А.А. Байкова РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова.

С 2003 г. и по 2017 г. Лисовенко Д.С. преподавал в МАИ НИУ (до 01.10.2015 г. «МАТИ»-РГТУ им. К.Э. Циолковского). Д.С. Лисовенко много внимания уделяет работе с научной молодежью. С 2016 г. и по 2019 г. являлся руководителем подготовки магистров в МАИ НИУ по направлению «Механика перспективных конструкционных материалов с учетом их многоуровневой структуры». С 2021 г. профессор в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

29 мая 2025 г. Д.С. Лисовенко был избран членом-корреспондентом РАН.

Друзья и коллеги поздравляют Дмитрия Сергеевича с избранием членом-корреспондентом Российской академии наук и желает ему новых ярких достижений в науке, талантливых учеников и успехов в его многогранной деятельности в области науки и образования.

## Статьи

2005

1. *Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Variability of the elastic properties of multiwalled carbon nanotubes // *Technical Physics Letters*. – Road Town, United Kingdom, 2005. – Vol. 31, no. 1. – P. 18–20. – DOI: 10.1134/1.1859489.
2. *Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Об изменчивости упругих свойств многослойных углеродных нанотрубок // *Письма в "Журнал технической физики"*. – Москва, 2005. – Т. 31, № 1. – С. 35–41.
3. *Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Упругие свойства графитовых стержней и многослойных углеродных нанотрубок (кручение и растяжение) // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2005. – № 4. – С. 42–56.

2006

4. Specific features of the strength of carbon whiskers / V. A. Gorodtsov [et al.] // *Technical Physics Letters*. – Road Town, United Kingdom, 2006. – Vol. 32, no. 10. – P. 837–839. – DOI: 10.1134/S1063785006100051.
5. Некоторые особенности прочности углеродных усов при растяжении / В. А. Городцов [и др.] // *Письма в "Журнал технической физики"*. – Москва, 2006. – Т. 32, № 19. – С. 28–34.

2008

6. *Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Мезомеханика многослойных углеродных нанотрубок и наносуов // *Физическая мезомеханика*. – 2008. – Т. 11, № 6. – С. 25–42.

2009

7. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* About negativity of the Poisson's ratio for anisotropic materials // *Doklady Physics*. – Russian Federation, 2009. – Vol. 54, no. 12. – P. 546–548. – DOI: 10.1134/S1028335809120064.
8. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Mesomechanics of multiwall carbon nanotubes and nanowhiskers // *Physical Mesomechanics*. – Netherlands, 2009. – Vol. 12, no. 1/2. – P. 38–53. – DOI: 10.1016/j.physme.2009.03.005.
9. *Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* К описанию многослойных нанотрубок в рамках моделей цилиндрически анизотропной упругости // *Физическая мезомеханика*. – 2009. – Т. 12, № 5. – С. 5–14.

10. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Об отрицательности коэффициента Пуассона для анизотропных материалов // Доклады Академии наук. – Москва, 2009. – Т. 429, № 5. – С. 614–616.
11. Городцов В. А., Лисовенко Д. С. К механике углеродных и других слоистых нанотрубок // Инженерная физика. – 2009. – № 4. – С. 36–38.  
2010
12. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Auxetic mechanics of crystalline materials // Mechanics of Solids. – United States, 2010. – Vol. 45, no. 4. – P. 529–545. – DOI: 10.3103/S0025654410040047.
13. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. To the description of multi-layered nanotubes in models of cylindrically anisotropic elasticity // Physical Mesomechanics. – Netherlands, 2010. – Vol. 1, no. 13. – P. 12–20. – DOI: 10.1016/j.physme.2010.03.002.
14. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Аномальные величины коэффициента Пуассона для наночастиц // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – Тамбов, 2010. – Т. 15, № 3–1. – С. 816–817.
15. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Аномальные величины коэффициента Пуассона для наночастиц // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – Тамбов, 2010. – Т. 15, № 3–2. – С. 1177–1181.
16. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Ауксетическая механика кристаллических материалов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – № 4. – С. 43–62.
17. Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Коэффициенты Пуассона для анизотропных нанотрубок // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2010. – Т. 53, № 3/2. – С. 61–66.  
2011
18. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Cubic auxetics // Doklady Physics. – Russian Federation, 2011. – Vol. 56, no. 7. – P. 399–402. – DOI: 10.1134/S1028335811120019.
19. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Variability of elastic properties of hexagonal auxetics // Doklady Physics. – Russian Federation, 2011. – Vol. 56, no. 12. – P. 602–605. – DOI: 10.1134/S1028335811120019.
20. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Изменчивость упругих свойств гексагональных ауксетиков // Доклады Академии наук. – Москва, 2011. – Т. 441, № 4. – С. 468–471.
21. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Кубические ауксетика // Доклады Академии наук. – Москва, 2011. – Т. 439, № 2. – С. 184–187.
22. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Модуль Юнга кубических ауксетиков // Письма о материалах. – 2011. – Т. 1, № 3. – С. 127–132. – DOI: 10.22226/2410-3535-2011-3-127-132.  
2012
23. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Relation of Poisson's ratio on average with Young's modulus. Auxetics on average // Doklady Physics. –

- Russian Federation, 2012. – Vol. 57, no. 4. – P. 174–178. – DOI: 10.1134/S102833581204009X.
24. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Модуль сдвига кубических кристаллов // Письма о материалах. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 21–24. – DOI: 10.22226/2410-3535-2012-1-21-24.
25. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Связь среднего коэффициента Пуассона с модулем Юнга для кубических кристаллов. Ауксетики в среднем // Доклады Академии наук. – Москва, 2012. – Т. 443, № 6. – С. 677–681. 2013
26. Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок / Р. В. Гольдштейн [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2013. – Т. 16, № 6. – С. 13–31.
27. Goldshtein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // Physica Status Solidi (B): Basic Research. – United Kingdom, 2013. – Vol. 250, no. 10. – P. 2038–2043. – DOI: 10.1002/pssb.201384233.
28. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Average Poisson's ratio for crystals. Hexagonal auxetics // Letters about materials. – 2013. – Vol. 3, no. 1. – P. 7–11. – DOI: 10.22226/2410-3535-2013-1-7-11.
29. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Young's moduli and Poisson's ratio of curvilinear anisotropic hexagonal and rhombohedral nanotubes. Nanotubes-auxetics // Doklady Physics. – Russian Federation, 2013. – Vol. 58, no. 9. – P. 400–404. – DOI: 10.1134/S1028335813090097.
30. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Модули Юнга и коэффициенты Пуассона криволинейно анизотропных гексагональных и ромбоэдрических нанотрубок. Нанотрубки-ауксетики // Доклады Академии наук. – Москва, 2013. – Т. 452, № 3. – С. 279–283. 2014
31. Negative Poisson's ratio for cubic crystals and nano/microtubes / R. V. Goldstein [et al.] // Physical Mesomechanics. – Netherlands, 2014. – Vol. 17, no. 3. – P. 97–115. – DOI: 10.1134/S1029959914020027.
32. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Rayleigh and Love surface waves in isotropic media with negative Poisson's ratio // Mechanics of Solids. – United States, 2014. – Vol. 49, no. 4. – P. 422–434. – DOI: 10.3103/S0025654414040074.
33. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона для 7-константных тетрагональных кристаллов и нано/микротрубок из них // Физическая мезомеханика. – 2014. – Т. 17, № 5. – С. 5–14.
34. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Поверхностные волны Релея и Лява при отрицательном коэффициенте Пуассона изотропных сред // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 74–89. 2015
35. Auxetics among 6-constant tetragonal crystals / R. V. Goldstein [et al.] // Letters about materials. – 2015. – Vol. 5, no. 4. – P. 409–413. – DOI: 10.22226/2410-3535-2015-4-409-413.

36. Negative Poisson's ratio for six-constant tetragonal nano/microtubes / R. V. Goldstein [et al.] // *Physica Status Solidi (B): Basic Research*. – United Kingdom, 2015. – Vol. 252, no. 7. – P. 1580–1586. – DOI: 10.1002/pssb.201451649.
37. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Linear Poynting's effect at torsion and extension of curvilinearly anisotropic tubes // *Doklady Physics*. – Russian Federation, 2015. – Vol. 60, no. 9. – P. 396–399. – DOI: 10.1134/S1028335815090025.
38. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Young's modulus and Poisson's ratio for seven-constant tetragonal crystals and nano/microtubes // *Physical Mesomechanics*. – Netherlands, 2015. – Vol. 18, no. 3. – P. 213–222. – DOI: 10.1134/S1029959915030054.
39. *Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Кручение цилиндрически анизотропных нано/микротрубок из 7-константных тетрагональных кристаллов. Эффект Пойнтинга // *Физическая мезомеханика*. – 2015. – Т. 18, № 6. – С. 5–11.
40. *Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Линейный эффект Пойнтинга при кручении и растяжении криволинейно-анизотропных трубок // *Доклады Академии наук*. – Москва, 2015. – Т. 464, № 1. – С. 35–38.  
2016
41. Auxeticity in nano/microtubes produced from orthorhombic crystals / R. V. Goldstein [et al.] // *Smart Materials and Structures*. – [Bristol, UK], England, 2016. – Vol. 25, no. 5. – P. 054006. – DOI: 10.1088/0964-1726/25/5/054006.
42. Equilibrium diamond-like carbon nanostructures with cubic anisotropy: elastic properties / D. S. Lisovenko [et al.] // *Physica Status Solidi (B): Basic Research*. – United Kingdom, 2016. – Vol. 253, no. 7. – P. 1295–1302. – DOI: 10.1002/pssb.201600049.
43. Two-layer tubes from cubic crystals / R. V. Goldstein [et al.] // *Doklady Physics*. – 2016. – Vol. 61, no. 12. – P. 604–610. – DOI: 10.1134/S1028335816120016.
44. Двухслойные трубки из кубических кристаллов / Р. В. Гольдштейн [и др.] // *Доклады Академии наук*. – Москва, 2016. – Т. 471, № 4. – С. 414–420.
45. Механические характеристики 7-ми константных ромбоэдрических кристаллов и нано/микротрубок из них / Р. В. Гольдштейн [и др.] // *Письма о материалах*. – 2016. – Т. 6, № 2. – С. 93–97. – DOI: 10.22226/2410-3535-2016-2-93-97.
46. Упругие свойства фуллерита / Л. Х. Рысаева [и др.] // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2016. – Т. 13, № 1. – С. 105–109.
47. *Epishin A. I., Lisovenko D. S.* Extreme values of the Poisson's ratio of cubic crystals // *Technical Physics*. – Russian Federation, 2016. – Vol. 61, no. 10. – P. 1516–1524. – DOI: 10.1134/S1063784216100121.
48. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Poynting's effect of cylindrically anisotropic nano/microtubes // *Physical Mesomechanics*. – Netherlands, 2016. – Т. 19, № 3. – С. 229–238. – DOI: 10.1134/S1029959916030012.
49. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* The elastic properties of hexagonal auxetics under pressure // *Physica Status Solidi (B): Basic Research*. – United Kingdom, 2016. – Vol. 253, no. 7. – P. 1261–1269. – DOI: 10.1002/pssb.201600054.



50. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Torsion of cylindrically anisotropic nano/microtubes from seven-constant tetragonal crystals. Poynting's effect // *Physical Mesomechanics*. – Netherlands, 2016. – Vol. 19, no. 4. – P. 349–354. – DOI: 10.1134/S1029959916040019.
51. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Torsion of cylindrically anisotropic nano/microtubes of the cubic crystals obtained by rolling the crystal planes (011) // *Письма о материалах*. – 2016. – Т. 6, № 4. – С. 249–252. – DOI: 10.22226/2410-3535-2016-4-249-252.
52. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Изменчивость коэффициента Пуассона для гексагональных кристаллов под давлением // *Труды МАИ*. – М., 2016. – № 87. – С. 1–22.
53. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Эффект Пойнтинга для цилиндрически-анизотропных нано/микротрубок // *Физическая мезомеханика*. – 2016. – Т. 19, № 1. – С. 5–14.
54. Епшин А. И., Лисовенко Д. С. Экстремальные значения коэффициента Пуассона кубических кристаллов // *Журнал технической физики*. – СПб., 2016. – Т. 86, № 10. – С. 74–82.
- 2017
55. Auxetic behaviour of carbon nanostructures / J. A. Baimova [et al.] // *Materials Physics and Mechanics*. – 2017. – Vol. 33, no. 1. – P. 1–11. – DOI: 10.18720/MPM.3312017\\_1.
56. Equilibrium structures of carbon diamond-like clusters and their elastic properties / D. S. Lisovenko [et al.] // *Physics of the Solid State*. – Road Town, United Kingdom, 2017. – Vol. 59, no. 4. – P. 820–828. – DOI: 10.1134/S106378341704014X.
57. Extreme values of the shear modulus for hexagonal crystals / R. V. Goldstein [et al.] // *Scripta Materialia*. – United Kingdom, 2017. – Vol. 140. – P. 55–58. – DOI: 10.1016/j.scriptamat.2017.07.002.
58. Two-Layered tubes from cubic crystals: Auxetic tubes / R. V. Goldstein [et al.] // *Physica Status Solidi (B): Basic Research*. – United Kingdom, 2017. – Vol. 254, no. 12. – P. 1600815. – DOI: 10.1002/pssb.201600815.
59. Исследование металлических нанотрубок методом молекулярной динамики / Ю. А. Баимова [и др.] // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2017. – Т. 14, № 4. – С. 496–501.
60. Равновесные структуры из углеродных алмазоподобных кластеров и их упругие свойства / Д. С. Лисовенко [и др.] // *Физика твердого тела*. – СПб., 2017. – Т. 59, № 4. – С. 801–809. – DOI: 10.21883/ФТТ.2017.04.44286.100.
61. Экспериментальное изучение ауксетического поведения вогнутой ячеистой решетки с криволинейными элементами / Р. В. Гольдштейн [и др.] // *Письма о материалах*. – 2017. – Т. 7, № 2. – С. 81–84. – DOI: 10.22226/2410-3535-2017-2-81-84.
62. Экспериментальное изучение влияния дефектов на ауксетическое поведение ячеистой конструкции с криволинейными элементами / Р. В. Гольдштейн [и др.] // *Письма о материалах*. – 2017. – Т. 7, № 4. – С. 355–358. – DOI: 10.22226/2410-3535-2017-4-355-358.

63. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Longitudinal elastic tension of two-layered plates from isotropic auxetics-nonauxetics and cubic crystals // *European Journal of Mechanics, A/Solids*. – Netherlands, 2017. – Vol. 2017, no. 63. – P. 122–127. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2017.01.001.  
2018
64. Anisotropy of the mechanical properties of TbF3 crystals / D. N. Karimov [et al.] // *Crystallography Reports*. – Russian Federation, 2018. – Vol. 63, no. 1. – P. 96–103. – DOI: 10.1134/s1063774518010108.
65. Deformation behaviour of re-entrant carbon honeycomb structures / L. K. Rysaeva [et al.] // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – Krakow, 2018. – Vol. 447. – P. 012035. – DOI: 10.1088/1757-899X/447/1/012035.
66. The Poisson's ratio of dentin as anisotropic medium with hexagonal symmetry / S. A. Muslov [et al.] // *Russian Journal of Biomechanics*. – Perm, Russia, 2018. – Vol. 22, no. 4. – P. 472–479. – DOI: 10.15593/RJBiomech/2018.4.09.
67. Анизотропия механических свойств кристаллов TbF3 / Д. Н. Каримов [и др.] // *Кристаллография*. – Москва, 2018. – Т. 63, № 1. – С. 106–113. – DOI: 10.7868/S0023476118010101.
68. Влияние морфологии ячеистых структур на основе углеродных нанолент на их устойчивость / Л. Х. Рысаева [и др.] // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2018. – Т. 15, № 2. – С. 238–243. – DOI: 10.25712/ASTU.1811-1416.2018.02.011.
69. Тонкие однородные двухслойные пластины из кубических кристаллов с различной ориентацией слоев / Р. В. Гольдштейн [и др.] // *Физическая мезомеханика*. – 2018. – Т. 21, № 2. – С. 5–13. – DOI: 10.24411/1683-805X-2018-12001.
70. *Chentsov A. V., Lisovenko D. S.* Experimental study of auxetic behavior of cellular structure // *Journal of Physics: Conference Series*. – [Bristol, UK], England, 2018. – Vol. 991. – P. 012017. – DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012017.
71. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Chiral elasticity of nano/microtubes from hexagonal crystals // *Acta Mechanica*. – Germany, 2018. – Vol. 229, no. 5. – P. 2189–2201. – DOI: 10.1007/s00707-017-2088-9.
72. *Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S., Lim T. C.* Three-layered plate exhibiting auxeticity based on stretching and bending modes // *Composite Structures*. – Netherlands, 2018. – Vol. 194. – P. 643–651. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.03.092.
73. *Komarova M. A., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Variability of Young's modulus and Poisson's ratio of hexagonal crystals // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – Krakow, 2018. – Vol. 347. – P. 012019. – DOI: 10.1088/1757-899x/347/1/012019.
74. *Muslov S. A., Lisovenko D. S., Lotkov A. I.* Poisson's ratio of hard tissues of tooth // *AIP Conference Proceedings*. – 2018. – Vol. 2051. – P. 020206. – DOI: 10.1063/1.5083449.
75. *Novikova N. E., Lisovenko D. S., Sizova N. L.* Peculiarities of the Structure, Moduli of Elasticity, and Knoop Indentation Patterns of Deformation and Fracture of Single Crystals of Potassium, Rubidium, Cesium, and Ammonium Hydrophthalates // *Crystallography Reports*. – Russian Federation, 2018. – Vol. 63, no. 3. – P. 438–450. – DOI: 10.1134/S1063774518030197.

76. *Муслов С. А., Лисовенко Д. С.* Коэффициент Пуассона дентина как анизотропной среды с гексагональной симметрией // Международный научно-исследовательский журнал. – Екатеринбург, 2018. – 7 (73). – С. 18–24.
77. *Муслов С. А., Лисовенко Д. С.* Упругая анизотропия дентина и эмали // Письма о материалах. – 2018. – Т. 8, № 3. – С. 288–293. – DOI: 10.22226/2410-3535-2018-3-288-293.
78. *Новикова Н. Е., Лисовенко Д. С., Сизова Н. Л.* Особенности структуры, упругие модули и картина деформации и разрушения по Кнупу монокристаллов гидрофталатов калия, рубидия, цезия и аммония // Кристаллография. – Москва, 2018. – Т. 63, № 3. – С. 425–440. – DOI: 10.7868/S0023476118030128. 2019
79. Elastic properties of diamond-like phases based on carbon nanotubes / L. K. Rysaeva [et al.] // *Diamond and Related Materials*. – Netherlands, 2019. – Vol. 97. – P. 107411. – DOI: 10.1016/j.diamond.2019.04.034.
80. Elastic Properties of Fullerenes and Diamond-Like Phases / L. K. Rysaeva [et al.] // *Physica Status Solidi (B): Basic Research*. – United Kingdom, 2019. – Vol. 256, no. 1. – P. 1800049. – DOI: 10.1002/pssb.201800049.
81. Mechanical properties of CeF<sub>3</sub> single crystals / N. L. Sizova [и др.] // *Crystallography Reports*. – Russian Federation, 2019. – Т. 64, № 6. – С. 942–946. – DOI: 10.1134/S1063774519060208.
82. Thin Homogeneous Two-Layered Plates of Cubic Crystals with Different Layer Orientation / R. V. Goldstein [et al.] // *Physical Mesomechanics*. – Netherlands, 2019. – Vol. 22, no. 4. – P. 261–268. – DOI: 10.1134/s1029959919040015.
83. Исследование контактного взаимодействия высокоуглеродистой проволоки и волоки в процессе комбинированной деформационной обработки / Д. С. Лисовенко [и др.] // Бюллетень научно-технической и экономической информации "Черная металлургия". – 2019. – Т. 75, № 5. – С. 607–616. – DOI: 10.32339/0135-5910-2019-5-607-616.
84. Механические свойства кристаллов CeF<sub>3</sub> / Н. Л. Сизова [и др.] // Кристаллография. – Москва, 2019. – Т. 64, № 6. – С. 935–939. – DOI: 10.1134/S0023476119060201.
85. Особенности контактного взаимодействия высокоуглеродистой проволоки с волокой при комбинировании волочения с кручением / Д. С. Лисовенко [и др.] // Заготовительные производства в машиностроении. – Москва, 2019. – Т. 17, № 8. – С. 360–365.
86. Экспериментальное исследование контактного взаимодействия высокоуглеродистой проволоки и волоки при комбинированной деформационной обработке волочением с кручением / Д. С. Лисовенко [и др.] // Теория и технология металлургического производства. – Магнитогорск, 2019. – № 1. – С. 35–40.
87. *Bryukhanov I. A., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Chiral Fe nanotubes with both negative Poisson's ratio and Poynting's effect. Atomistic simulation // *Journal of Physics Condensed Matter*. – [Bristol, UK], England, 2019. – Vol. 31, no. 47. – P. 475304. – DOI: 10.1088/1361-648X/ab3a04.
88. *Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Tension of thin two-layered plates of hexagonal crystals // *Composite Structures*. – Netherlands, 2019. – Vol. 209. – P. 453–459. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.10.063.

89. Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S., Ustinov K. B. Spherical Inclusion in an Elastic Matrix in the Presence of Intrinsic Deformations, Taking Into Account the Influence of the Properties of the Interface, Considered as the Limit of a Layer of Finite Thickness // *Mechanics of Solids*. – United States, 2019. – Vol. 54, no. 4. – P. 514–522. – DOI: 10.3103/S0025654419040034.
90. Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Extreme values of Young's modulus and Poisson's ratio of hexagonal crystals // *Mechanics of Materials*. – Netherlands, 2019. – Vol. 134. – P. 1–8. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2019.03.017.
91. Volkov M. A., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Variability of elastic properties of chiral monoclinic tubes under extension and torsion // *Letters about materials*. – 2019. – Vol. 9, no. 2. – P. 202–206. – DOI: 10.22226/2410-3535-2019-2-202-206.
92. Брюханов И. А., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Атомистическое моделирование механических свойств хиральных металлических нанотрубок // *Физическая мезомеханика*. – 2019. – Т. 22, № 6. – С. 48–57. – DOI: 10.24411/1683-805X-2019-16005.
93. Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига для гексагональных кристаллов // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2019. – 2(40). – С. 91–116. – DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.009.
94. Городцов В. А., Лисовенко Д. С., Устинов К. Б. Шарообразное включение в упругой матрице при наличии собственных деформаций с учетом влияния свойств поверхности раздела, рассматриваемой как предел слоя конечной толщины // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2019. – № 3. – С. 30–40. – DOI: 10.1134/S0572329919030085.
95. Устинов К. Б., Лисовенко Д. С., Ченцов А. В. Ортотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной под произвольными нормальными нагрузками, приложенными вдали от вершины трещины // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. – Самара, 2019. – Т. 23, № 4. – С. 657–670. – DOI: 10.14498/vsgtu1736.
- 2020
96. Elastic damper based on the carbon nanotube bundle / L. K. Rysaeva [et al.] // *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. – 2020. – Vol. 18, no. 1. – P. 1–12. – DOI: 10.22190/FUME200128011R.
97. Stability, elastic properties and deformation behavior of graphene-based diamond-like phases / L. K. Rysaeva [et al.] // *Computational Materials Science*. – Netherlands, 2020. – Vol. 172. – P. 109355. – DOI: 10.1016/j.commatsci.2019.109355.
98. Двухслойные пластины из гексагональных и кубических кристаллов / М. А. Волков [и др.] // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2020. – Т. 2, № 44. – С. 101–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.011.
99. Механика деформирования и разрушения в работах Р.В. Гольдштейна / Д. С. Лисовенко [и др.] // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2020. – Т. 2, № 44. – С. 5–18. – DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.001.

100. Поведение линейных полиэфигов в модельных условиях желчных протоков / О. А. Легонькова [и др.] // Все материалы. Энциклопедический справочник. – Москва, 2020. – № 9. – С. 22–28. – DOI: 10.31044/1994-6260-2020-0-9-22-28.
  101. *Alexandrov S., Lisovenko D., Vilotic M.* An Upper Bound Solution for Continued Compression of a Cylinder // *Tehnicki Vjesnik*. – Croatia, 2020. – Vol. 27, no. 2. – P. 627–632. – DOI: 10.17559/tv-20181106002705.
  102. *Bryukhanov I. A., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Modeling of the Mechanical Properties of Chiral Metallic Nanotubes // *Physical Mesomechanics*. – Netherlands, 2020. – Vol. 23, no. 6. – P. 477–486. – DOI: 10.1134/S102995992006003X.
  103. *Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Auxetics among Materials with Cubic Anisotropy // *Mechanics of Solids*. – United States, 2020. – Vol. 55, no. 4. – P. 461–474. – DOI: 10.3103/s0025654420040044.
  104. *Ustinov K. B., Massabò R., Lisovenko D. S.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Engineering Failure Analysis*. – United Kingdom, 2020. – Vol. 110. – P. 104410. – DOI: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410.
  105. *Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2020. – № 4. – С. 7–24. – DOI: 10.31857/S0572329920040054.
  106. *Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Поперечное растяжение тонких двухслойных пластин из одинаково ориентированных гексагональных кристаллов // *Физическая мезомеханика*. – 2020. – Т. 23, № 5. – С. 34–42. – DOI: 10.24411/1683-805X-2020-15003.
- 2021
107. Bridgman Growth and Physical Properties Anisotropy of CeF<sub>3</sub> Single Crystals / D. N. Karimov [et al.] // *Crystals*. – Basel, Switzerland, 2021. – Vol. 11, no. 7. – P. 793–793. – DOI: 10.3390/cryst11070793.
  108. Effective elastic properties variability for two-layered plates of hexagonal and cubic crystals under longitudinal tension / M. A. Volkov [et al.] // *Composite Structures*. – Netherlands, 2021. – Vol. 274. – P. 114300. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.114300.
  109. Elastic Properties of Chiral Metallic Nanotubes Formed from Cubic Crystals / I. A. Bryukhanov [et al.] // *Physical Mesomechanics*. – Netherlands, 2021. – Vol. 24, no. 4. – P. 464–474. – DOI: 10.1134/s1029959921040111.
  110. Stretching of chiral tubes obtained by rolling-up plates of cubic crystals with various orientations / M. A. Volkov [et al.] // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. – United States, 2021. – Vol. 16, no. 2. – P. 139–157. – DOI: 10.2140/jomms.2021.16.139.
  111. The Behavior of Linear Polyesters in Model Conditions of Bile Ducts / O. A. Legon'kova [et al.] // *Polymer Science - Series D*. – Germany, 2021. – Vol. 14, no. 1. – P. 106–111. – DOI: 10.1134/s1995421221010159.
  112. Об упругих свойствах хиральных металлических нанотрубок из кубических кристаллов / И. А. Брюханов [и др.] // *Физическая мезомеханика*. – 2021. – Т. 24, № 1. – С. 37–49. – DOI: 10.24412/1683-805X-2021-1-37-49.

113. *Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Out-of-Plane Tension of Thin Two-Layered Plates of Identically Oriented Hexagonal Crystals // *Physical Mesomechanics*. – Netherlands, 2021. – Vol. 24, no. 2. – P. 146–154. – DOI: 10.1134/s1029959921020041.
114. *Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* The Extreme Values of Young's Modulus and the Negative Poisson's Ratios of Rhombic Crystals // *Crystals*. – Basel, Switzerland, 2021. – Vol. 11, no. 8. – P. 863–863. – DOI: 10.3390/cryst11080863.
115. *Gorodtsov V. A., Tkachenko V. G., Lisovenko D. S.* Extreme values of Young's modulus of tetragonal crystals // *Mechanics of Materials*. – Netherlands, 2021. – Vol. 154. – P. 103724. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2020.103724.
116. *Gorodtsov V. A., Volkov M. A., Lisovenko D. S.* Out-of-plane tension of thin two-layered plates of cubic crystals // *Physica Status Solidi (B): Basic Research*. – United Kingdom, 2021. – P. 2100184. – DOI: 10.1002/pssb.202100184.
- 2022
117. *Epishin A. I., Lisovenko D. S.* Influence of the Crystal Structure and Type of Interatomic Bond on the Elastic Properties of Monatomic and Diatomic Cubic Crystals // *Mechanics of Solids*. – United States, 2022. – Vol. 57, no. 6. – P. 1344–1358. – DOI: 10.3103/s0025654422060206.
118. *Эпишин А. И., Лисовенко Д. С.* Влияние кристаллической структуры и типа межатомной связи на упругие свойства одноатомных и двухатомных кубических кристаллов // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2022. – № 6. – С. 79–96. – DOI: 10.31857/S0572329922060058.
- 2023
119. Auxetics among Two-Layered Composites Made of Cubic Crystals. Analytical and Numerical Analysis / A. I. Demin [et al.] // *Mechanics of Solids*. – United States, 2023. – Vol. 58, no. 1. – P. 140–152. – DOI: 10.3103/s0025654422601379.
120. Elastic properties of diamane / P. V. Polyakova [et al.] // *Letters about materials*. – 2023. – Vol. 13, no. 2. – P. 171–176. – DOI: 10.22226/2410-3535-2023-2-171-176.
121. Experimental Investigation of the Properties of Auxetic and Non-Auxetic Metamaterials Made of Metal During Penetration of Rigid Strikers / S. Y. Ivanova [et al.] // *Mechanics of Solids*. – United States, 2023. – Vol. 58, no. 2. – P. 524–528. – DOI: 10.3103/s0025654422601616.
122. Studying the Properties of Metamaterials with a Negative Poisson's Ratio when Punched by a Rigid Impactor / S. Y. Ivanova [et al.] // *Mechanics of Solids*. – United States, 2023. – Vol. 58, no. 5. – P. 1536–1544. – DOI: 10.3103/S0025654423600897.
123. Ауксетики среди двухслойных композитов из кристаллов с кубической симметрией. Аналитический и численный анализ / А. И. Демин [и др.] // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2023. – № 1. – С. 166–180. – DOI: 10.31857/S0572329922600761.
124. Изучение свойств метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2023. – № 5. – С. 120–130. – DOI: 10.31857/S0572329923600366.
125. Экспериментальное исследование свойств ауксетических и неауксетических метаматериалов из металла при проникании в них жестких ударников / С. Ю.

- Иванова [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 2. – С. 176–180. – DOI: 10.31857/S0572329922600773.
126. *Epishin A. I., Lisovenko D. S.* Comparison of Isothermal and Adiabatic Elasticity Characteristics of the Single Crystal Nickel-Based Superalloy CMSX-4 in the Temperature Range Between Room Temperature and 1300°C // *Mechanics of Solids.* – United States, 2023. – Vol. 58, no. 5. – P. 1587–1598. – DOI: 10.3103/S0025654423601301.
127. *Epishin A. I., Lisovenko D. S.* Model for the Pore Formation During Incipient Melting of Single-Crystal Nickel-Based Superalloys // *Mechanics of Solids.* – United States, 2023. – Vol. 58, no. 6. – P. 2132–2143. – DOI: 10.3103/S002565442360174X.
128. *Lisovenko D. S., Epishin A. I.* Anisotropy of Residual Stress Energy in Two-Component Plate Crystal Structures // *Mechanics of Solids.* – United States, 2023. – Vol. 58, no. 6. – P. 2043–2057. – DOI: 10.3103/S0025654423601179.
129. *Volkov M. A., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Elastic properties of two-layered tubes from seven-constant tetragonal crystals // *Mechanics of Solids.* – United States, 2023. – Vol. 58, no. 9. – P. 3102–3110. – DOI: 10.3103/S0025654423602124.
130. *Volkov M. A., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S.* Variability of Elastic Properties of Two-Layered Tubes from Six-Constant Tetragonal Crystals // *Symmetry.* – Basel, Switzerland, 2023. – Vol. 15, no. 3. – P. 685–685. – DOI: 10.3390/sym15030685.
131. *Лисовенко Д. С., Епишин А. И.* Анизотропия энергии остаточных напряжений в двухкомпонентных пластинчатых кристаллических структурах // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.* – 2023. – № 6. – С. 136–154. – DOI: 10.31857/S0572329923600524.
- 2024
132. Chemical Reaction and Strength of Tricalcium Phosphate Nano-Coating Application on Dental Implants by Atomistic Calculations / A. V. Balueva [et al.] // *Applied Mathematical Modelling.* – Netherlands, 2024. – Vol. 127. – P. 640–654. – DOI: 10.1016/j.apm.2023.12.028.
133. Compression and oxidation testing of Co-Al-W-Ta single-crystal specimens directionally solidified with a flat front / A. I. Epishin [et al.] // *Mechanics of Solids.* – United States, 2024. – Vol. 59, no. 1. – P. 537–540. – DOI: 10.1134/S0025654424602969.
134. Elastic constants of graphane, graphyne, and graphdiyne / P. V. Polyakova [et al.] // *Computational Materials Science.* – Netherlands, 2024. – Vol. 244. – P. 113171. – DOI: 10.1016/j.commatsci.2024.113171.
135. Experimental Study of the Properties of Metamaterials Based on PLA Plastic when Perforated by a Rigid Striker / S. Y. Ivanova [et al.] // *Mechanics of Solids.* – United States, 2024. – Vol. 59, no. 4. – P. 1967–1972. – DOI: 10.1134/S0025654424604695.
136. Investigation of the effect of a viscous filler on the punching process of auxetic and non-auxetic metamaterials / S. Y. Ivanova [et al.] // *Mechanics of Solids.* – United States, 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3727–3734. – DOI: 10.1134/S0025654424606633.

137. Measurement Of Elastic Characteristics Of Single-Crystals Of A Nickel-Base Superalloy By Speckle Interferometry / A. I. Epishin [et al.] // *Mechanics of Solids*. – United States, 2024. – Vol. 59, no. 6.
138. Измерение упругих характеристик монокристаллов никелевого жаропрочного сплава методом спекл-интерферометрии / А. И. Епишин [и др.] // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2024. – № 6. – С. 187–204. – DOI: 10.31857/S1026351924060114.
139. Исследование влияния вязкого заполнителя на механические свойства метаматериалов с отрицательным и положительным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2024. – № 4. – С. 62–75. – DOI: 10.37972/chgru.2024.62.4.005.
140. Экспериментальное исследование свойств метаматериалов на основе PLA пластика при пробивании жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2024. – № 4. – С. 207–214. – DOI: 10.31857/S1026351924040146.
141. *Epishin A. I., Lisovenko D. S.* Negative Creep of Single Crystals of Nickel-Based Superalloys // *Mechanics of Solids*. – United States, 2024. – Vol. 59, no. 3. – P. 1321–1329. – DOI: 10.1134/s0025654424604452.
142. *Епишин А. И., Лисовенко Д. С.* Определение изотермических постоянных упругости монокристаллического никелевого жаропрочного сплава в широком температурном интервале // *Авиационные материалы и технологии*. – 2024. – № 2. – С. 122–136. – DOI: 10.18577/2713-0193-2024-0-2-122-136.
143. *Епишин А. И., Лисовенко Д. С.* Отрицательная ползучесть монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2024. – № 3. – С. 199–216. – DOI: 10.31857/S1026351924030131.

2025

144. Mechanics of blood flow and wall deformation in the abdominal aorta / N. A. Verezub [et al.] // *Mechanics of Solids*. – United States, 2025. – Vol. 60, no. 2. – P. 857–871. – DOI: 10.1134/S0025654425600175.
145. On the influence of viscous filler on the impact resistance of flexible metamaterials with auxetic properties / S. Y. Ivanova [et al.] // *Mechanics of Solids*. – United States, 2025. – Vol. 60, no. 1. – P. 958–964. – DOI: 10.1134/S0025654424607225.
146. Temperature Influence of Metamaterials Based on Flexible TPU 95A Plastic on Resistance to Penetration by a Rigid Striker / S. Y. Ivanova [et al.] // *Mechanics of Solids*. – United States, 2025. – Vol. 60, no. 1. – P. 128–135. – DOI: 10.1134/S0025654424606797.
147. Влияние температуры метаматериалов на основе гибкого пластика TPU 95A на сопротивление пробиванию жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2025. – № 1. – С. 197–208. – DOI: 10.31857/S1026351925010108.



148. Исследование сопротивления пластической деформации и жаростойкости монокристаллов сплава Co-Al-W-Ta полученных методом направленной кристаллизации с плоским фронтом / А. И. Епишин [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2025. – № 1. – С. 249–258.
149. Механика кровотока и деформирования стенок брюшной аорты / Н. А. Вереzub [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2025. – № 2. – С. 96–118. – DOI: 10.31857/S1026351925020068.
150. О влиянии вязкого заполнителя на сопротивление пробиванию ударником гибких метаматериалов с ауксетическими свойствами / С. Ю. Иванова [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2025. – № 2. – С. 267–278. – DOI: 10.31857/S1026351925020156.
151. *Epishin A. I., Lisovenko D. S., Alymov M. I.* Model of Diffusion Annihilation of Gas-Filled Spherical Pores During Hot Isostatic Pressing // *Mechanics of Solids*. – United States, 2025. – Vol. 60, no. 1. – P. 88–102. – DOI: 10.1134/S0025654424604981.
152. *Епишин А. И., Лисовенко Д. С., Алымов М. И.* Модель диффузионной аннигиляции газонаполненных сферических пор в процессе горячего изостатического прессования // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2025. – № 1. – С. 136–157. – DOI: 10.31857/S1026351925010071.

## Материалы конференций

2015

1. *Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Эффект Пойнтинга для цилиндрически анизотропных трубок // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань 20-24 августа). Аннотации докладов. – Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015. – С. 1024–1026.

2016

2. Growth and characterization of terbium fluoride crystals / D. N. Karimov [et al.] // 18th International Conference on Crystal Growth and Epitaxy (ICCGE-18). Nagoya (Japan). 07-12 august 2016. – Japan, 2016. – P. 148–148. – (Abstract Book).
3. The two-layer tubes-auxetics of cubic crystals / R. V. Goldstein [et al.] // 7th International Conference Auxetics and other materials and models with «negative» characteristics and 12th International Workshop Auxetics and related systems «Auxetics-2016». Poland, Szymbark. 12-16.09.2016. Abstract book (ISBN 978-83-937979-9-8). – Poland, Szymbark, 2016. – P. 23–23.
4. *Лисовенко Д. С.* Линейный эффект Пойнтинга для цилиндрически-анизотропных нано/микротрубок // XLII Гагаринские чтения. Международная молодежная научная конференция. Москва, 12-15 апреля 2016 г. Сборник тезисов докладов (ISBN 978-5-90363-071-4). Т. 1. – МАИ (НИУ) Москва, 2016. – С. 131–132.
5. *Лисовенко Д. С.* Линейный эффект пойнтинга для цилиндрически-анизотропных нано/микротрубок // МЕЖДУНАРОДНАЯ МОЛОДЕЖНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "XLII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ". – 2016. – С. 50–51.

6. Лисовенко Д. С., Городцов В. А., Гольдштейн Р. В. Растяжение двухслойных пластин из кубического материала. Научные чтения им. член-корр. АН СССР И.А. Одингга «Механические свойства современных конструкционных материалов». Москва, 06-07 сентября 2016 г. Сборник материалов // Научные чтения им. член-корр. АН СССР И.А. Одингга «Механические свойства современных конструкционных материалов, 06-07 сентября 2016 г. Сборник материалов (ISBN 978-5-4465-1200-3). – ИМЕТ РАН Москва, 2016. – С. 78–78.
  7. Лисовенко Д. С., Городцов В. А., Гольдштейн Р. В. Растяжение и кручение нанотрубок и микротрубок с кубической цилиндрической анизотропией, полученных сворачиванием кристаллических плоскостей (011) // Научные чтения им. член-корр. АН СССР И.А. Одингга «Механические свойства современных конструкционных материалов, 06-07 сентября 2016 г. Сборник материалов (ISBN 978-5-4465-1200-3). – ИМЕТ РАН Москва, 2016. – С. 77–77.
  8. Лисовенко Д. С., Ченцов А. В., Шушпанников П. С. Разработка и расчет дизайна биodeградируемых стентов с ауксетическими свойствами // Научные чтения им. член-корр. АН СССР И.А. Одингга «Механические свойства современных конструкционных материалов, 06-07 сентября 2016 г. Сборник материалов (ISBN 978-5-4465-1200-3). – ИМЕТ РАН Москва, 2016. – С. 140–140.
  9. Ченцов А. В., Лисовенко Д. С. Численно-аналитическое моделирование упругих свойств VN нанотрубок // XLII Гагаринские чтения. Международная молодежная научная конференция. Москва, 12-15 апреля 2016 г. Сборник тезисов докладов (ISBN 978-5-90363-071-4). Т. 1. – МАИ (НИУ) Москва, 2016. – С. 171–172.
  10. Ченцов А. В., Лисовенко Д. С. Численно-аналитическое моделирование упругих свойств VN нанотрубок // МЕЖДУНАРОДНАЯ МОЛОДЁЖНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "XLII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ". – 2016. – С. 92–93.
  11. Шушпанников П. С., Ченцов А. В., Лисовенко Д. С. Дизайн биodeградируемых кардиоваскулярных стентов из полилактида с ауксетическими свойствами // XLII Гагаринские чтения. Международная молодежная научная конференция. Москва, 12-15 апреля 2016 г. Сборник тезисов докладов (ISBN 978-5-90363-071-4). Т. 1. – МАИ (НИУ) Москва, 2016. – С. 177–178.
  12. Шушпанников П. С., Ченцов А. В., Лисовенко Д. С. Дизайн биodeградируемых кардиоваскулярных стентов из полилактида с ауксетическими свойствами // МЕЖДУНАРОДНАЯ МОЛОДЁЖНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "XLII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ". – 2016. – С. 99.
- 2017
13. Elastic properties of hybrid sp<sup>2</sup>-sp<sup>3</sup> carbon nanomaterials / S. V. Dmitriev [et al.] // Abstract book 8th International Conference Auxetics and other materials and models with «negative» characteristics and 13th International Workshop Auxetics and related systems «Auxetics-2017» (ISBN 978-83-7712-172-6). – Greece, Crete, 2017. – P. 13–13.
  14. Влияние молекулярного состава фуллерита на его константы упругости / Л. Х. Рысаева [и др.] // XLIII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ. – 2017. – С. 69–70.
  15. Chentsov A. V., Lisovenko D. S. Two-dimensional auxetic design for biodegradable stent // Proc. V International Conference on Topical Problems of Continuum

- Mechanics (ISBN 978-9939-63-285-8). – Tsaghkadzor, Armenia, 2017. – P. 169–170.
16. *Chentsov A. V., Lisovenko D. S.* Two-dimensional auxetic design for biodegradable stent // Current Issues in Continuum Mechanics. Proceedings of the 5th International Conference, October 2–7, 2017, Tsaghkadzor, Armenia. – NUASA Yerevan, 2017. – P. 159–160.
  17. *Жезлова Е. А., Куренков И. Э., Лисовенко Д. С.* Растяжение нано/микротрубок с гексагональной цилиндрической анизотропией, полученных сворачиванием кристаллических плоскостей (100) // XLIII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ. – 2017. – С. 30–31.
  18. *Комарова М. А., Лисовенко Д. С.* Экстремальные значения модуля сдвига гексагональных кристаллов // XLIII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ. – 2017. – С. 44–45.
  19. *Лисовенко Д. С., Городцов В. А., Гольдштейн Р. В.* Упругие свойства нано/микротрубок из гексагональных кристаллов. Эффект Пойнтинга // VII Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». Москва. 7-10 ноября 2017 г./ Сборник материалов. – ИМЕТ РАН Москва, 2017. – С. 822–823.
  20. *Лисовенко Д. С., Городцов В. А., Комарова М. А.* Экстремальные значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига для гексагональных кристаллов // VII Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». Москва. 7-10 ноября 2017 г./ Сборник материалов. – ИМЕТ РАН Москва, 2017. – С. 821–822.
  21. *Лисовенко Д. С., Ченцов А. В., Гольдштейн Р. В.* Применение метода корреляции цифровых изображений для экспериментального исследования механического поведения двумерной ауксетической конструкции // XLIII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ. – 2017. – С. 50–51.
  22. *Рысаева Л. Х., Баимова Ю. А., Лисовенко Д. С.* Многообразие и свойства углеродных алмазоподобных фаз // Сборник тезисов XVIII Всероссийской школы-семинара по проблемам физики конденсированного состояния вещества (СПФКС-18), Екатеринбург, Россия, 16-23 ноября 2017. Т. 1. – Институт физики металлов УрО РАН Екатеринбург, ИФМ УрО РАН, 2017. – С. 197–197.
  23. *Ченцов А. В., Лисовенко Д. С.* Применение метода корреляции цифровых изображений для экспериментального исследования механического поведения двумерной ауксетической конструкции // XLIII Гагаринские чтения. Международная молодежная научная конференция. Москва, 5-19 апреля 2017 г. Т. 1. – Сборник тезисов докладов (ISBN 978-5-90363-115-5). МАИ (НИУ Москва), 2017. – С. 369–369.
- 2018
24. Механические свойства двумерных ауксетических плоскостей при растяжении / С. Ю. Лаврентьев [и др.] // Четвертый междисциплинарный молодежный научный форум с международным участием «Новые материалы и перспективные технологии». Т. 1. – ООО «Буки Веди» Москва, 2018. – С. 692–695.
  25. *Брюханов И. А., Лисовенко Д. С., Городцов В. А.* Молекулярно-динамическое моделирование металлических хиральных нанотрубок // Механика и моделирование материалов и технологий. Сборник трудов Секции Международной

- молодёжной научной конференции «XLIV Гагаринские чтения» 17-20 апреля 2018, Москва. – ИПМех РАН Москва, 2018. – С. 22–23.
26. Брюханов И. А., Лисовенко Д. С., Городцов В. А. Молекулярно-динамическое моделирование металлических хиральных нанотрубок // Международная молодёжная научная конференция «XLIV Гагаринские чтения». Москва, 17-20 апреля 2018 г. – ИПМех РАН М, 2018. – С. 22–23. – (Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий (ISBN 978-5-91741-213-9)).
27. Волков М. А., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Изменчивость модуля Юнга и коэффициентов Пуассона цилиндрически-анизотропных хиральных трубок из моноклинных кристаллов // Механика и моделирование материалов и технологий. Сборник трудов Секции Международной молодёжной научной конференции «XLIV Гагаринские чтения» 17-20 апреля 2018, Москва. – ИПМех РАН Москва, 2018. – С. 29–31.
28. Волков М. А., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Изменчивость модуля Юнга и коэффициентов Пуассона цилиндрически-анизотропных хиральных трубок из моноклинных кристаллов // Международная молодёжная научная конференция «XLIV Гагаринские чтения». Москва, 17-20 апреля 2018 г. – ИПМех РАН М, 2018. – С. 29–31. – (Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий (ISBN 978-5-91741-213-9)).
29. Демин А. И., Лисовенко Д. С. Определение участков магистрального трубопровода с непроектными нагрузками по результатам анализа данных внутритрубной диагностики // Механика и моделирование материалов и технологий. Сборник трудов Секции Международной молодёжной научной конференции «XLIV Гагаринские чтения» 17-20 апреля 2018, Москва. – ИПМех РАН Москва, 2018. – С. 48–49.
30. Демин А. И., Лисовенко Д. С. Определение участков магистрального трубопровода с непроектными нагрузками по результатам анализа данных внутритрубной диагностики // Международная молодёжная научная конференция «XLIV Гагаринские чтения». Москва, 17-20 апреля 2018 г. – ИПМех РАН М, 2018. – С. 48–49. – (Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий (ISBN 978-5-91741-213-9)).
31. Комарова М. А., Лисовенко Д. С., Городцов В. А. Экстремальные значения основных упругих характеристик для гексагональных кристаллов // Механика и моделирование материалов и технологий. Сборник трудов Секции Международной молодёжной научной конференции «XLIV Гагаринские чтения» 17-20 апреля 2018, Москва. – ИПМех РАН Москва, 2018. – С. 66–68.
32. Комарова М. А., Лисовенко Д. С., Городцов В. А. Экстремальные значения основных упругих характеристик для гексагональных кристаллов // Международная молодёжная научная конференция «XLIV Гагаринские чтения». Москва, 17-20 апреля 2018 г. – ИПМех РАН М, 2018. – С. 66–68. – (Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий (ISBN 978-5-91741-213-9)).
33. Лаврентьев С. Ю., Лисовенко Д. С., Ченцов А. В. Механические свойства двумерной ауксетической конструкции // Механика и моделирование материалов и технологий. Сборник трудов Секции Международной молодёжной научной

- конференции «XLIV Гагаринские чтения» 17-20 апреля 2018, Москва. – ИПМех РАН Москва, 2018. – С. 76–78.
34. *Лаврентьев С. Ю., Лисовенко Д. С., Ченцов А. В.* Механические свойства двумерной ауксетической конструкции // Международная молодежная научная конференция «XLIV Гагаринские чтения». Москва, 17-20 апреля 2018 г. – ИПМех РАН М, 2018. – С. 76–78. – (Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий (ISBN 978-5-91741-213-9)).
35. *Муслов С. А., Лисовенко Д. С.* Анизотропия и экстремальные значения коэффициента Пуассона дентина и эмали зубов. II Международный круглый стол «Фундаментальные и прикладные разработки в области технических и физико-математических наук // Сборник научных статей II Международного круглого стола «Фундаментальные и прикладные разработки в области технических и физико-математических наук». – Конверт Москва, 2018. – С. 89–93. 2019
36. Применение методов машинного обучения при решении обратной задачи изгиба трубопровода / А. И. Демин [и др.] // Сборник Трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 3. – Уфа, 2019. – С. 1312–1314. – DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v3.
37. *Брюханов И. А., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Атомистическое моделирование механических свойств металлических хиральных нанотрубок // Сборник Трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 3. – Уфа, 2019. – С. 1399–1401. – DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v3.
38. *Волков М. А., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Растяжение двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов // Международная молодежная научная конференция «XLV Гагаринские чтения». Москва, 16-19 апреля 2019 г. – ИПМех РАН Москва, 2019. – С. 34–36. – (Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий (ISBN 978-5-91741-244-3)).
39. *Волков М. А., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Растяжение двухслойных пластин из различным образом ориентированных гексагональных и кубических кристаллов // Сборник Трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 3. – Уфа, 2019. – С. 1405–1407. – DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v3.
40. *Демин А. И., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Численное решение задачи о растяжении двухслойной пластины из кубических кристаллов с ауксетическим слоем // Международная молодежная научная конференция «XLV Гагаринские чтения». Москва, 16-19 апреля 2019 г. – ИПМех РАН Москва, 2019. – С. 67–69. – (Сборник трудов секции Механика и моделирование материалов и технологий (ISBN 978-5-91741-244-3)).
41. *Лисовенко Д. С., Городцов В. А.* Растяжение слоистых композитов с ауксетическими слоями // Сборник Трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 3. – Уфа, 2019. – С. 1438–1440. – DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v3.

2021

42. *Городцов В. А., Лисовенко Д. С.* Модуль Юнга орторомбических материалов // Упругость и Неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. ИЛЬЮШИНА / под ред. Г. Л. Бровко, И. Н. Молодцов, Н. В. Овчинникова. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2021. – С. 255–262.

2022

43. *Лисовенко Д. С., Городцов В. А.* Растяжение слоистых композитов, содержащих ауксетический слой // Материалы VI Дальневосточной конференции с международным участием "Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении". – Комсомольск-на-Амуре, 2022. – С. 226–227.

2023

44. Экспериментальное исследование по пробиванию хрупких слоистых и ячеистых преград / Н. В. Баничук [и др.] // XIII ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ сборник тезисов докладов : в 4 т. Т. 3. – Политех-Пресс Санкт-Петербург, 2023. – С. 1197–1199.
45. *Лисовенко Д. С.* Механические свойства кубических кристаллов с отрицательным коэффициентом Пуассона // XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред Пермь, 13 – 17 февраля 2023г. Тезисы докладов. – Пермь: ПФИЦ УрО РАН, 2023. – С. 198–198.

Д. С. Дудин, И. Э. Келлер

## ОПИСАНИЕ СУЛЬФИДНО-ОКСИДНОЙ И ХЛОРИДНОЙ КОРРОЗИИ ЖАРОПРОЧНЫХ СПЛАВОВ С УЧЁТОМ НАПРЯЖЕНИЙ. II. РАСЧЕТ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

**Аннотация.** Сульфидно-оксидная коррозия оказывает негативное влияние на ресурс деталей авиационных двигателей, ослабляя трещиностойкость поверхностного слоя материала. Поверхность приобретает слоистую структуру, состоящую из оксидных слоёв и сульфидного подслоя, в которых возникают остаточные напряжения; материал вблизи поверхности обедняется легирующими элементами. Для описания этого процесса используется построенная ранее связанная модель, описывающая взаимную диффузию компонент сплава и агрессивной среды, их химические реакции, деформации набухания, создающие напряжения, и пластические деформации, способствующие их релаксации. Рассматривается одномерная задача для полупространства, напряженно-деформированное состояние которого удовлетворяет некоторым ограничениям, упрощающим численный расчёт. Решение полной системы связанных уравнений реализовано в прикладном пакете *COMSOL Multiphysics*. Рассчитывается процесс окисления и сульфидно-оксидной коррозии жаропрочной стали. Получены профили массовых долей компонентов металла, агрессивных веществ, продуктов коррозии, а также профили собственных деформаций и остаточных напряжений. Результаты показывают формирование нескольких диффузионных зон: зоны оксидов, сульфида и промежуточных зон. В зонах оксидов и сульфида наблюдается равномерное распределение компонентов металла. Выявлены два режима протекания коррозии, в которых её скорость контролируется кинетикой химических реакций либо кинетикой взаимной диффузии. Первый режим оказывается непродолжительным и определяет скорость формирования слоистой структуры. Второй режим отвечает за продвижение коррозионных слоёв вглубь металла и является ключевым для прогнозирования роста коррозионных слоёв. В последних образуются растягивающие пластические деформации и сжимающие остаточные напряжения. В материале под коррозионным слоем остаточные напряжения растягивающие, что может служить причиной образования и роста поверхностных микротрещин и последующего разрушения.

**Ключевые слова:** сульфидно-оксидная коррозия, модель, расчет, взаимная диффузия, напряжения, упругопластичность, химические реакции, связанные процессы

Дудин Дмитрий Сергеевич, ведущий инженер лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: dudin.d@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0002-1911-8899>; AuthorID: 1110725

Келлер Илья Эрнстович, доктор физико-математических наук, заведующий лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: kie@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 11695



**для цитирования:** Дудин Д. С., Келлер И. Э. Описание сульфидно-оксидной и хлоридной коррозии жаропрочных сплавов с учётом напряжений. II. Расчет и сравнение с экспериментом // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 77–86. DOI: 10.37972/chgru.2025.64.2.001. EDN: WIAOVM

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.



D. S. Dudin, I. E. Keller

## DESCRIPTION OF SULFIDE-OXIDE AND CHLORIDE CORROSION OF HEAT-RESISTANT ALLOYS TAKING INTO ACCOUNT STRESSES. II. CALCULATION AND COMPARISON WITH EXPERIMENT

*Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia*

**Abstract.** Sulfide-oxide corrosion has a negative impact on the life of aircraft engine parts, weakening the crack resistance of the surface layer of the material. The surface acquires a layered structure consisting of oxide layers and a sulfide sublayer, in which residual stresses occur; the material near the surface is depleted by alloying elements. To describe this process, a previously constructed related model is used that describes the mutual diffusion of alloy components and aggressive media, their chemical reactions, swelling deformations that create stresses, and plastic deformations that promote their relaxation. A one-dimensional problem for a half-space is considered, the stress-strain state of which satisfies certain constraints simplifying numerical calculation. The solution of the complete system of related equations is implemented in the application package *COMSOL Multiphysics*. The process of oxidation and sulfide-oxide corrosion of heat-resistant steel is calculated. Profiles of the mass fractions of metal components, aggressive substances, and corrosion products, as well as profiles of intrinsic deformations and residual stresses, were obtained. The results show the formation of several diffusion zones: zones of oxides, sulfides, and intermediate zones. A uniform distribution of metal components is observed in the zones of oxides and sulfide. Two modes of corrosion have been identified, in which its rate is controlled by the kinetics of chemical reactions or the kinetics of mutual diffusion. The first mode is short-lived and determines the rate of formation of the layered structure. The second mode is responsible for advancing the corrosion layers deep into the metal and is key for predicting the growth of corrosion layers. In the latter, tensile plastic deformations and compressive residual stresses are formed. In the material under the corrosion layer, the residual stresses are tensile, which can cause the formation and growth of surface microcracks and subsequent destruction.

**Keywords:** high-temperature corrosion, model, calculation, interdiffusion, stresses, elastoplasticity, chemical reactions, coupled processes

**Dmitrii S. Dudin**, Leading Engineer of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids; e-mail: dudin.d@icmm.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-1911-8899>; AuthorID: 1110725

**Ilya E. Keller**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids; e-mail: kie@icmm.ru;

<https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 11695

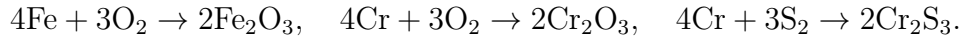


**to cite this article:** Dudin D. S., Keller I. E. Description of sulfide-oxide and chloride corrosion of heat-resistant alloys taking into account stresses. II. Calculation and comparison with experiment // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 77–86. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.001

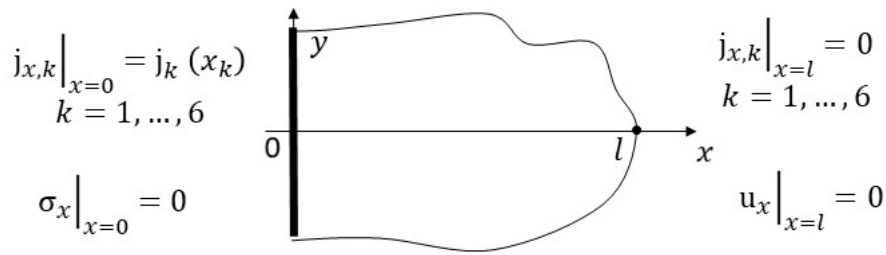
*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** Сульфидно-оксидная коррозия оказывает негативное влияние на ресурс деталей авиационных двигателей, ослабляя трещиностойкость поверхностного слоя материала. Поверхность приобретает слоистую структуру, состоящую из оксидных слоёв и сульфидного подслоя, в которых возникают остаточные напряжения; материал вблизи поверхности обедняется легирующими элементами. Для описания этого процесса используется построенная ранее связанная модель, описывающая взаимную диффузию компонент сплава и агрессивной среды, их химические реакции, деформации набухания, создающие напряжения, и пластические деформации, способствующие их релаксации. В первой части [1] сформулирована модель, уравнения которой записаны для хромированной жаропрочной стали  $Fe_\xi Cr_{1-\xi}$ , которая подвергается химическому воздействию кислорода и серы при высокой температуре.

**1. Постановка задачи.** В модели учитывается семь компонентов:  $O_2$ ,  $Fe$ ,  $Cr$ ,  $S_2$ ,  $Fe_2O_3$ ,  $Cr_2O_3$ ,  $Cr_2S_3$ . Последние три из них — продукты коррозии, и возникают вследствие следующих химических реакций компонентов металла с проникающими внутрь материала атомами кислорода и серы:



Химический состав в точке определяется массовыми долями  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, 7$ . Напряжённо-деформированное состояние характеризуется тензором напряжений Коши  $\sigma$  и тензором линейных деформаций  $\epsilon$ . Элементарный материальный объём претерпевает деформации набухания  $\epsilon^s$ , вызванные изменением химического состава, а также упругие  $\epsilon^e$  и пластические  $\epsilon^p$  деформации.



**Рис. 1.** Расчётная схема задачи

Ставится наиболее простая одномерная задача о полупространстве (см. рис. 1) в которой принимаются гипотезы:

- взаимная диффузия компонентов может происходить вдоль единственного направления  $x$

$$x_k = x_k(x, t), \quad k = 1, \dots, 7;$$

- полные деформации имеют единственную ненулевую компоненту

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}(x, t) \neq 0, \quad \epsilon_{ij} = 0, \quad ij = \{yy, zz, xy, xz, yz\};$$

- тангенциальные компоненты тензора напряжений не равны нулю

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma(x, t) \neq 0, \quad \sigma_{ij} = 0, \quad ij = \{xx, xy, xz, yz\}.$$

Наложенные ограничения на деформации и напряжения не противоречат друг другу и позволяют решать одномерную задачу.

Молекулярный кислород и сера проникают через свободную материальную поверхность полупространства  $x = 0$ , вызывая взаимные диффузионные потоки компонентов металла и образование коррозионной плёнки. Отсутствие диффузионных потоков  $j_{x,k}$ ,  $k = 1, \dots, 7$  и перемещений  $u_x$  на границе  $x = l$  имитируют граничные условия на бесконечности для полупространства в численной постановке задачи. Расчёт производится в прикладном пакете *COMSOL Multiphysics*, позволяющем решать пользовательские уравнения в частных производных с применением метода конечных элементов и неявных методов интегрирования по времени.

**2. Результаты расчёта процесса окисления.** Для идентификации параметров химической и диффузионной кинетики модели при температуре 600 °С были использованы данные о росте толщин оксидных слоев [2] в процессе окисления жаропрочной стали в течение 48 ч. Результаты расчётов приведены на рис. 2.

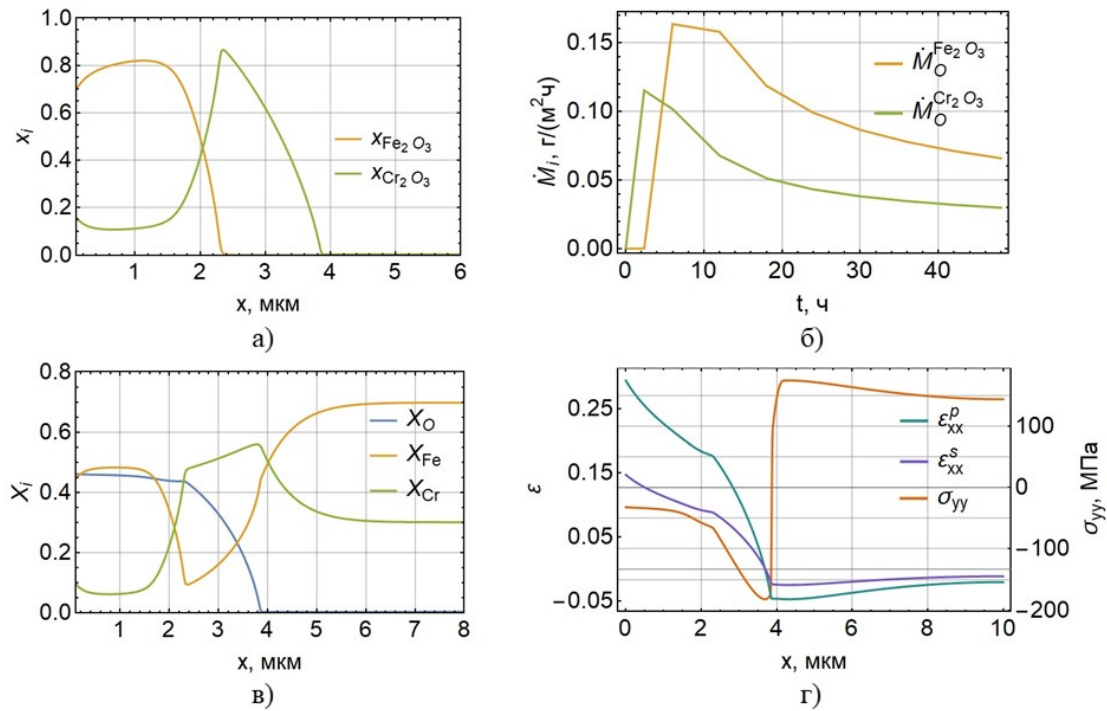
Массовые доли элементов, изображенные на рис. 2в характеризуют суммарную массовую долю химического элемента, который находится в свободном и химически связанном состоянии в точке после испытания, когда свободный кислород улетучивается. Они рассчитывались следующим образом

$$X_{Cr} = \frac{\rho_{Cr}^{free} + \rho_{Cr}^{Cr_2O_3}}{\rho - \rho_O^{free}}, \quad X_{Fe} = \frac{\rho_{Fe}^{free} + \rho_{Fe}^{Fe_2O_3}}{\rho - \rho_O^{free}}, \quad X_O = \frac{\rho_O^{Cr_2O_3} + \rho_O^{Fe_2O_3}}{\rho - \rho_O^{free}}, \quad (1)$$

где  $\rho_k^{free}$  — плотность  $k$ -ого компонента в свободном состоянии,  $\rho_k^i$  — плотность  $k$ -ого компонента в  $i$ -ом химическом соединении,  $\rho$  — суммарная плотность массы.

В слоистой структуре выделяются четыре диффузионные зоны (рис. 2, а, в). В диапазоне  $0 \leq x \leq 1.4$  мкм располагается зона оксида железа, которая характеризуется равномерным распределением массы Fe. В ней происходит диффузия  $O_2$  через оксид железа. В переходной зоне между оксидами  $1.4 \leq x \leq 2.4$  мкм протекает взаимная диффузия  $O_2$  и Fe. В диапазоне  $2.4 \leq x \leq 3.8$  мкм находится зона оксида хрома, характеризуемая близким к равномерному распределению массы Cr. Эта зона является зоной взаимной диффузии  $O_2$ , Fe и Cr. В четвёртой зоне  $3.8 \leq x \leq 5.8$  мкм кислород отсутствует, но происходит взаимная диффузия Fe и Cr.

Слоистая структура оксидов формируется при выполнении двух условий: а) скорость окисления Cr значительно выше, чем скорость окисления Fe; б) скорость диффузии Fe через оксид хрома значительно выше, чем в металле. Формирование слоистой структуры происходит следующим образом. На поверхности кислород реагирует с хромом, вызывая недостаток свободного Cr для продолжения химической реакции (рис. 2, б, участок кривой до 2.5 ч.). Затем



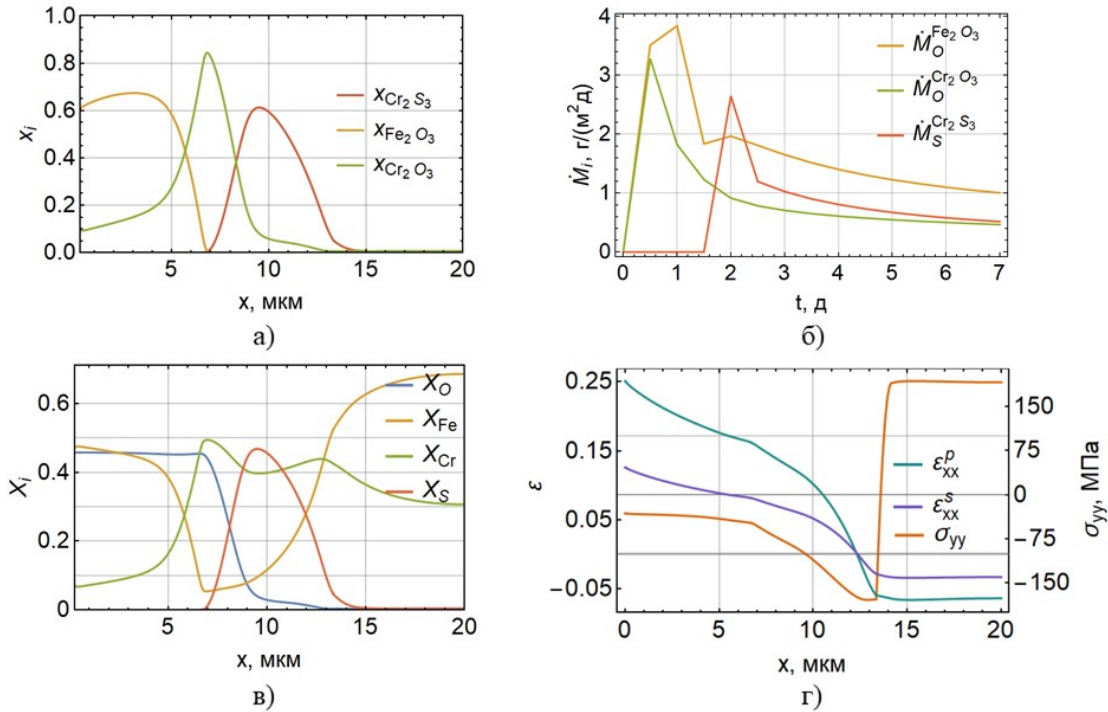
**Рис. 2.** Результаты расчёта процесса окисления: а) профили массовых долей оксидов железа и хрома в конечный момент времени, б) скорость изменения массы кислорода в оксидах железа и хрома, в) профили массовых долей элементов в конечный момент времени, г) профили пластических деформаций, деформаций набухания и напряжений в конечный момент времени

на поверхности происходит реакция с Fe и формируется слоистая структура оксидов (участок кривой до 6 ч.). На этих этапах скорость коррозии контролируется скоростью химических реакций. Наконец, слоистая структура движется вглубь материала со скоростью  $v \sim 1/t$  (участок кривой после 6 ч.), то есть далее скорость коррозии контролируется диффузией [3]. Определенные по данным эксперимента коэффициенты диффузии в оксидных слоях соответствуют значениям коэффициентов диффузии компонентов по границам зёрен [4].

Поля деформаций набухания, пластических деформаций и остаточных напряжений показаны на рис. 2, г. Поскольку плотность оксидов ниже, чем плотность материала, в зоне оксидных слоев  $0 \leq x \leq 3.8$  мкм возникают растягивающие деформации набухания  $\varepsilon_{xx}^s$ , достигающие в максимуме 15%. Материал, сопротивляясь этим деформациям, порождает поле сжимающих остаточных напряжений  $\sigma_{yy}$  в оксидной плёнке и поле растягивающих остаточных напряжений под ней. Величины напряжений при рассматриваемых высоких температурах оказываются достаточными для пластического деформирования оксидов и металла под ними. Максимальное значение пластических деформаций  $\varepsilon_{xx}^p$  достигает 26% в оксидной плёнке на поверхности.

### 3. Результаты расчёта процесса сульфидно-оксидной коррозии.

Далее рассматривается процесс сульфидно-оксидной коррозии жаропрочной стали при 800 °С. Для идентификации модели использовались экспериментальные данные о росте толщины оксидных слоёв и сульфидного подслоя [5] в течение 7 суток. Результаты расчётов приведены на рис. 3.



**Рис. 3.** Результаты расчёта процесса сульфидно-оксидной коррозии: а) профили массовых долей оксидов железа и хрома и сульфида хрома в конечный момент времени, б) скорость изменения массы кислорода в оксидах железа и хрома и массы серы в сульфиде хрома, в) профили массовых долей элементов в конечный момент времени, г) профили пластических деформаций, деформаций набухания и напряжений в конечный момент времени

Массовые доли элементов, изображенные на рис. 3, в, рассчитывались аналогично (1) следующим образом

$$X_{Cr} = \frac{\rho_{Cr}^{free} + \rho_{Cr}^{Cr_2O_3} + \rho_{Cr}^{Cr_2S_3}}{\rho - \rho_O^{free} - \rho_S^{free}}, \quad X_{Fe} = \frac{\rho_{Fe}^{free} + \rho_{Fe}^{Fe_2O_3}}{\rho - \rho_O^{free} - \rho_S^{free}},$$

$$X_O = \frac{\rho_O^{Cr_2O_3} + \rho_O^{Fe_2O_3}}{\rho - \rho_O^{free} - \rho_S^{free}}, \quad X_S = \frac{\rho_S^{Cr_2S_3}}{\rho - \rho_O^{free} - \rho_S^{free}}.$$

Результаты вычислительных экспериментов, подбора таких значений коэффициентов диффузии, чтобы описать динамику роста слоистой структуры продуктов коррозии, позволили сделать следующие качественные выводы.

В слоистой структуре выделяются пять диффузионных зон (рис. 3, а, в). В зоне оксида железа  $0 \leq x \leq 3.5$  мкм происходит диффузия кислорода и серы внутрь материала. В этой зоне масса железа распределена равномерно. На отрезке  $3.5 \leq x \leq 7$  мкм располагается зоной взаимной диффузии Fe, O<sub>2</sub> и S<sub>2</sub>. Далее идут зоны оксида хрома  $7 \leq x \leq 8.5$  мкм и сульфида хрома  $8.5 \leq x \leq 13$  мкм, в которых протекает взаимная диффузия O<sub>2</sub>, Fe, Cr и S<sub>2</sub>. В этих зонах масса Cr изменяется незначительно. В зоне без агрессивных веществ  $13 \leq x \leq 19$  мкм имеет место взаимная диффузия Cr и Fe.

Для формирования сульфидного подслоя необходимо, чтобы скорость диффузии серы через оксиды железа и хрома была выше, чем у кислорода. Также для поддержания распространения слоя оксида железа вглубь материала необходимо, чтобы скорость диффузии Fe через сульфид хрома была больше, чем в металле. Формирование сульфидного подслоя происходит следующим образом. Сера проникает через сформированные оксидные слои и, двигаясь быстрее, чем O<sub>2</sub>, реагирует с Cr. В диапазоне времени до 2 суток скорость роста сульфида хрома контролируется химической кинетикой (см. рис. 3, б). Далее скорость распространения продуктов коррозии определяется скоростью  $v \sim 1/t$ , так далее контролируется взаимной диффузией. Как в случае окисления, диффузия компонентов в продуктах коррозии происходит преимущественно вдоль границ зёрен [6], что подтверждается значениями идентифицируемых коэффициентов диффузии. Продукты коррозии диффундируют относительно материала, что обеспечивает сохранение и распространение слоёв вглубь.

Поля деформаций набухания, пластических деформаций и остаточных напряжений, изображенные на рис. 3, г, похожи на поля, полученные при расчёте процесса окисления. Сульфид хрома, также как и оксиды железа и хрома, имеет меньшую плотность, чем металл, что приводит к растягивающим деформациям набухания  $\varepsilon_{xx}^s$  с максимальным значением в 14% на поверхности. В ответ на эти деформации появляются сжимающие остаточные напряжения  $\sigma_{yy}$  в коррозионных слоях и растягивающие — в металле под ними. Величина напряжений достаточна для пластического деформирования, приводящего к релаксации остаточных напряжений, вызванных собственными деформациями набухания, причём в коррозионных слоях пластические деформации  $\varepsilon_{xx}^p$  растягивающие, а в металле - сжимающие. Максимальные значения пластических деформаций 25% наблюдаются на поверхности. Взаимодействие объемных и сдвиговых деформаций (и напряжений) здесь объясняется рассматриваемой расчетной схемой.

**Заключение.** Связанная модель процессов взаимной диффузии и химических реакций компонентов металлического сплава в агрессивной среде с учетом роста и релаксации напряжений и их влияния на диффузионную и химическую кинетику применена для описания образования слоистой структуры продуктов коррозии при окислении и сульфидно-оксидной коррозии жаропрочной стали при повышенных температурах. Расчёт показал существование двух режимов

протекания коррозии: контролируемого скоростью химических реакций и контролируемого скоростью взаимной диффузии компонентов. Первому режиму соответствует начальный этап процесса, когда слои находятся в стадии формирования, но на больших временах он оказывается незначительным для прогнозирования толщины коррозионных слоёв. Разница в плотности продуктов коррозии и металла привела к значительным сжимающим остаточным напряжениям в коррозионной плёнке и значительным растягивающим остаточным напряжениям в металле под ней. Оба фактора могут стимулировать рост микродефектов и разрушение поверхности.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Д. С. Дудин — численный расчет, написание текста рукописи, И. Э. Келлер — критический анализ работы, редактирование текста рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена в рамках госзадания по теме Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН, № ГР АААА-А20-120022590044-7.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** D. S. Dudin — numerical calculations, writing the text of the manuscript, I. E. Keller — critical analysis of the work, editing the text of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, State Registration Numbers АААА-А20-120022590044-7.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин Д. С., Келлер И. Э. Описание сульфидно-оксидной и хлоридной коррозии жаропрочных сплавов с учётом напряжений. II. Математическая модель // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2025. – 1 (63). – С. 123–133.
2. Secondary corrosion protection of FeCr(Al) model alloys at 600 °C – The influence of Cr and Al after breakaway corrosion / J. Eklund [et al.] // Corrosion Science. – 2021. – No. 189. – P. 109584. – DOI: 10.1016/j.corsci.2021.109584.
3. Mehrer H. Diffusion in solids. Fundamentals, Methods, Materials, Diffusion-Controlled Processes. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. – 654 p.
4. Study of ion diffusion in oxidation films grown on a model Fe-15%Cr alloy / A. C. S. Sabioni [et al.] // Solid State Ionics. – 2015. – No. 276. – P. 1–8. – DOI: 10.1016/j.ssi.2015.03.027.
5. Effects of imposed stresses on high temperature corrosion behavior of T91 / Z. Ning [et al.] // Corrosion Science. – 2021. – No. 189. – P. 109595. – DOI: 10.1016/j.corsci.2021.109595.
6. Sulphur diffusion through a growing chromia scale and effects of water vapor / C. Sha [et al.] // Corrosion Science. – 2023. – No. 222. – P. 111410. – DOI: 10.1016/j.corsci.2023.111410.

**REFERENCES**

1. *Dudin D. S., Keller I. E.* Description of sulfide-oxide and chloride corrosion of heat-resistant alloys taking into account stresses. I. Mathematical model // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.* – 2025. – Vol. 63, no. 1. – P. 123–133.
2. Secondary corrosion protection of FeCr(Al) model alloys at 600°C – The influence of Cr and Al after breakaway corrosion / J. Eklund [et al.] // *Corrosion Science.* – 2021. – Vol. 189. – P. 109584. – DOI: 10.1016/j.corsci.2021.109584.
3. *Mehrer H.* Diffusion in Solids. Fundamentals, Methods, Materials, Diffusion-Controlled Processes. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. – 654 p.
4. Study of ion diffusion in oxidation films grown on a model Fe-15%Cr alloy / A. C. S. Sabioni [et al.] // *Solid State Ionics.* – 2015. – Vol. 276. – P. 1–8. – DOI: 10.1016/j.ssi.2015.03.027.
5. Effects of imposed stresses on high temperature corrosion behavior of T91 / Z. Ning [et al.] // *Corrosion Science.* – 2021. – Vol. 189. – P. 109595. – DOI: 10.1016/j.corsci.2021.109595.
6. Sulphur diffusion through a growing chromia scale and effects of water vapor / C. Sha [et al.] // *Corrosion Science.* – 2023. – Vol. 222. – P. 111410. – DOI: 10.1016/j.corsci.2023.111410.



И. В. Канашин<sup>1</sup>, А. Л. Григорьева<sup>1</sup>, Я. Ю. Григорьев<sup>1</sup>

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И ФОРМЫ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРАНИЦЫ ПРИ ВДАВЛИВАНИИ КЛИНА В ЗАГОТОВКУ ВЫПУКЛОЙ ФОРМЫ

<sup>1</sup>Комсомольский-на-Амуре государственный университет,  
Комсомольск-на-Амуре, Россия

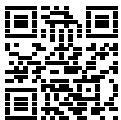
**Аннотация.** Целью работы является математическое моделирование пластического течения, возникающего в процессе внедрения клина в выпуклую заготовку. В ходе решения поставленной задачи были выведены: система уравнений для построения пластической области и деформированной поверхности материала в каждый момент времени; соотношение, позволяющее определить необходимую для внедрения клина нагрузку; выражения для расчёта деформаций, получаемых частицами материала на линии разрыва скоростей перемещений и в центре веера линий скольжения. Получено численное решение частного случая задачи о внедрении клина в гиперболический цилиндр, для которого: построены графики изменения угла раскрытия веера характеристик и необходимой для внедрения клина нагрузки, пластическая область и деформированная поверхность; рассчитаны деформации, получаемые частицами материала в окрестностях особенностей поля линий скольжения.

**Ключевые слова:** математическая модель, плоская деформация, пластическое течение, модель жесткопластического тела, тензор деформаций Альманси

**Канашин Илья Валерьевич**, старший преподаватель кафедры прикладной математики; e-mail: kanashin94@mail.ru; AuthorID: 1094116

**Григорьева Анна Леонидовна**, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики; e-mail: naj198282@mail.ru; AuthorID: 166322

**Григорьев Ян Юрьевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики; e-mail: prorector-ur@knastu.ru; AuthorID: 166323



**для цитирования:** Канашин И. В., Григорьева А. Л., Григорьев Я. Ю. Моделирование процесса определения деформаций и формы деформируемой границы при вдавливании клина в заготовку выпуклой формы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 87–104. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.003. EDN: XIZORA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

I. V. Kanashin<sup>1</sup>, A. L. Grigorieva<sup>1</sup>, Ya. Yu. Grigoriev<sup>1</sup>

**MODELLING OF THE PROCESS OF DETERMINING THE DEFORMATIONS AND THE SHAPE OF THE DEFORMED BOUNDARY DURING THE INDENTATION OF A WEDGE IN A CONVEX SHAPED WORK PIECE.**

<sup>1</sup>*Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

**Abstract.** The aim of the work is the mathematical modelling of the plastic flow generated during the process of wedge insertion into a convex workpiece. In the course of solving the problem, the following equations were derived: a system of equations for the construction of the plastic region and the deformed surface of the material at each instant; a relation that allows us to determine the load required for the introduction of the wedge; expressions for calculating the deformations produced by the material particles on the displacement velocity gap line and in the center of the fan of slip lines. A numerical solution of a special case of the problem of wedge insertion in a hyperbolic cylinder has been obtained, for which: plots of the variation of the opening angle of the fan of features and of the load required for wedge insertion, of the plastic region and of the deformed surface have been constructed; deformations produced by material particles in the vicinity of the features of the slip line field have been calculated.

**Keywords:** mathematical model, plane deformation, plastic flow, rigid-plastic-body model, Almansi strain tensor

**Ilya V. Kanashin**, Senior Lecturer; e-mail: kanashin94@mail.ru; AuthorID: 1094116

**Anna L. Grigorieva**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Applied Mathematics Department; e-mail: naj198282@mail.ru; AuthorID: 166322

**Yan Yu. Grigoriev**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Applied Mathematics Department; e-mail: prorektor-ur@knastu.ru; AuthorID: 166323



**to cite this article:** Kanashin I. V., Grigorieva A. L., Grigoriev Ya. Yu. Modelling of the process of determining the deformations and the shape of the deformed boundary during the indentation of a wedge in a convex shaped work piece. // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 87–104. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.003

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** Теория пластического течения является одним из фундаментальных направлений механики деформируемого твёрдого тела. Основные положения теории [1, 2] позволяют описывать поведение материалов при различных напряжённых состояниях в условиях пластического деформирования с учётом изменения геометрии деформируемого тела. В качестве меры деформаций при этом возможно использование тензоров конечных деформаций.

Решение задачи о внедрении симметричного твёрдого недеформируемого клина в жесткопластическое полупространство при условиях текучести Треска – Сен-Венана и Мизеса приводится в работах Хилла, Ли и Таппера [3]. Ими были исследованы положение смещённой поверхности, траектории частиц среды в пластической области (частицы движутся по направлению к внедрённой части клина), искажение первоначально квадратной сетки. Данное решение является автомодельным с точки зрения сохранения геометрического подобия пластической области относительно глубины внедрения клина.

Обобщение решения Хилла для задачи о вдавливании клина в выпуклое тело симметричной формы рассматривалось в работах Г. И. Быковцева, Д. Д. Ивлева, А. И. Хромова [4, 5]. Исследование полей деформаций на поверхностях разрыва скоростей перемещений и в центре веера характеристик в условиях плоской деформации в задаче о вдавливании клина в полупространство при условии текучести Кулона-Мора проводилось в работе [6]. В работе [7] в рамках модели идеального жесткопластического тела с учётом необратимой сжимаемости материала исследовались поля деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений в задаче о выглаживании поверхности клинообразным штампом.

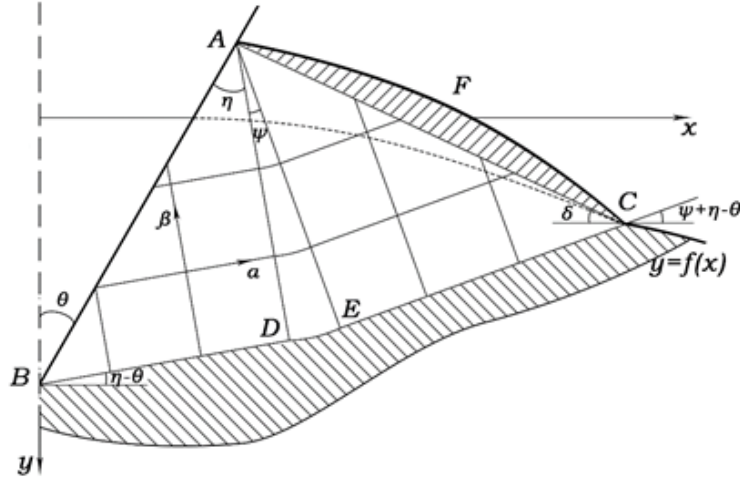
В представляемой работе рассматривается аналитический вывод соотношений для построения пластической области и деформированной поверхности материала, расчёта деформаций, получаемых частицами в окрестностях особенностей поля скоростей; численное решение задачи для заготовки, форма которой задаётся уравнением гиперболического цилиндра.

**1. Вывод соотношений.** Клин с углом раствора  $2\theta$  внедряется в выпуклую заготовку криволинейной формы. В результате внедрения часть материала выдавливается, и форма заготовки изменяется. Поле линий скольжения состоит из трёх областей (рис. 1). Две из них –  $ABD$  и  $AEC$  – имеют треугольную форму, оба семейства линий скольжения в них прямолинейны; третья область –  $ADE$  – представляет собой центрированный веер.

Скорость внедрения клина  $V_y$  постоянна и полагается равной -1, так как ось  $y$  направлена вверх. Коэффициент трения  $\mu$  постоянен вдоль поверхности контакта клина с заготовкой, его значение связано с углом  $\eta$  зависимостью

$$\mu = \frac{\cos(2\eta)}{1 + \sin(2\eta)}.$$

Решение задачи состоит в определении в каждый момент времени  $t$ : формы деформированной границы материала  $AFC$ , координат точек  $A$  и  $C$ , угла раскрытия веера  $\psi(t)$ . Известные значения перечисленных параметров позволяют найти необходимую для внедрения клина нагрузку.



**Рис. 1.** Поле линий скольжения при вдавливании клина с углом раствора  $2\theta$  в выпуклую заготовку

В каждый момент времени поле скоростей определяется проекциями скорости  $V_y$  на  $\alpha$ - и  $\beta$ - линии, которые равны:

$$V_\alpha = -V_y \frac{\sin(\theta)}{\cos(\eta)}, V_\beta = 0$$

Из полученного поля скоростей следует, что движение материала в области  $BAFC$  происходит по направлению  $\alpha$ - линий, при этом области  $ABD$  и  $AECF$  движутся как жёсткое целое, а угол раствора веера, в силу выпуклости заготовки, монотонно уменьшается. Из этого следует, что весь процесс деформирования можно разбить на два этапа: первый происходит при  $\psi > 0$ , деформированная поверхность в процессе пластического течения образуется в точке  $C$ , а в точке  $A$  она подминается клином; второй начинается в момент времени  $t^*$  при обращении угла  $\psi$  в нуль, деформированная поверхность также образуется в точке  $C$ , но в точке  $A$  она уже не подминается клином и, соответственно, не оказывает влияния на пластическое течение.

На первом этапе материал в области  $AECF$  движется как жёсткое целое, проекции скорости точек области на оси координат  $x$  и  $y$  равны:

$$v_x = v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi), v_y = v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi) \quad (1)$$

Интегрирование соотношений (1) даёт уравнения свободной границы деформированной поверхности  $AFC$  в виде:

$$\begin{aligned} x(t, \tau) &= v_\alpha \int_\tau^t \cos(\eta - \theta + \psi) dt + x_0(\tau), \\ y(t, \tau) &= v_\alpha \int_\tau^t \sin(\eta - \theta + \psi) dt + y_0(\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $x = x_0(\tau)$ ,  $y = y_0(\tau)$  – параметрическое представление границы тела до деформации;  $x = x(t, \tau)$ ,  $y = y(t, \tau)$  – параметрические уравнения деформированной части свободной поверхности  $AFC$  в момент времени  $t$ . Параметр  $\tau$  выбран так, что он совпадает со временем перехода соответствующей точки с недеформированной границы на свободную поверхность выдавливаемого объёма, то есть

$$x_0(\tau) = x_C(\tau), y_0(\tau) = y_C(\tau).$$

В силу ортогональности треугольников  $ABD$  и  $AEC$ , а также равенства линий  $AD$  и  $AE$  между собой справедливо соотношение

$$|AC| = \sqrt{2} |AB| \cos(\eta).$$

Координаты точек  $A$  и  $C$  находятся как проекции прямой  $AB$  и ломаной линии  $BAC$  на оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} x_A &= |AB| \sin(\theta), \\ y_A &= V_y t + |AB| \cos(\theta), \\ x_C &= |AB| \sin(\theta) + |AC| \cos(\delta), \\ y_C &= V_y t + |AB| \cos(\theta) - |AC| \sin(\delta) \end{aligned}$$

здесь  $\delta = \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi$ . Из полученных равенств можно вывести соотношение между координатами точки  $C$ :

$$\frac{x_C}{(1 + \omega \cos(\delta))} = \frac{(y_C + t) \operatorname{tg}(\theta)}{(1 - \omega \operatorname{tg}(\theta) \sin(\delta))}, \quad (3)$$

$$\text{где } \omega = \frac{\sqrt{2}}{v_\alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(\theta)}{\cos(\eta)}.$$

Так как точка  $C$  лежит на недеформированной поверхности, при форме заготовки  $y = f(x)$ , справедливо равенство

$$y_C(t) = f(x_C(t)). \quad (4)$$

Точка  $A$  лежит на пересечении деформированной поверхности и клина, поэтому

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{x_C}{1 + \omega \cos \delta} = v_\alpha \int_{\tau_A}^t \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) dt + x_C(\tau_A), \\ y_A &= \frac{y_C + t \operatorname{tg} \theta \sin \delta}{1 - \omega \operatorname{tg} \theta \sin \delta} = v_\alpha \int_{\tau_A}^t \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) dt + y_C(\tau_A), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\tau_A$  – время начала движения материальной точки, имеющей в момент времени  $t$  координаты  $x_A(t), y_A(t)$ .

Соотношения (3) – (5) представляют собой систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными функциями:  $x_C(t), y_C(t), \delta(t), \tau_A(t)$ .

Дифференцированием по  $t$  эта система может быть приведена к системе дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\begin{aligned} y'_C(t) - f'(x_C) x'_C &= 0, \\ x'_C z_1 - y'_C z_2 - \omega \psi' [x_C \sin \delta z_1^2 - (y_C + t) \cos \delta z_2^2] &= z_2, \\ x'_C z_1 - \psi' x_C z_1^2 \omega \sin \delta + \tau'_A [v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - x'_C(\tau_A)] & \\ &= v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi), \\ y'_C \frac{z_2}{tg\theta} - \omega \cos \delta \frac{z_2}{tg\theta} \psi' [tg\theta + z_2(y_C + t \omega tg\theta \sin \delta)] + & \\ + \tau'_A [v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - y'_C(\tau_A)] &= v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi) - \omega \sin \delta z_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $z_1 = \frac{1}{1 + \omega \cos(\delta)}$ ,  $z_2 = \frac{tg(\theta)}{1 - \omega tg(\theta) \sin(\delta)}$ . В момент начала процесса деформирования

$$\begin{aligned} t = 0, x_C = 0, y_C = 0, \tau_A = 0, \delta_0 &= \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi(0), \\ z_{10} &= \frac{1}{1 + \omega \cos \delta_0}, z_{20} = \frac{tg\theta}{1 - \omega tg\theta \sin \delta_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

и система (6) примет вид

$$\begin{aligned} y'_C - f'(0) x'_C &= 0, \\ x'_C z_{10} - y'_C z_{20} &= z_{20}, \\ x'_C + \frac{\tau'_A}{z_{10}} [v_\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) - x'_C] &= \frac{v_\alpha}{z_{10}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) \\ y'_C + \frac{\tau'_A tg\theta}{z_{20}} [v_\alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) - y'_C] &= \frac{v_\alpha tg\theta}{z_{20}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) - \omega tg\theta \sin \delta_0. \end{aligned} \quad (8)$$

(8) – система четырёх уравнений с тремя неизвестными –  $x'_C, y'_C, \tau'_A$ . Условие совместности этой системы

$$f'(0) = \frac{z_{10} [(v_\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) z_{10} - z_{20}) (z_{20} - tg(\theta)) - z_{20} v_\alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) tg(\theta) (z_{10} - 1)]}{z_{20} [v_\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) (z_{20} - tg(\theta)) z_{10} + z_{20} tg(\theta) (1 - z_{10}) (1 + v_\alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right))]}$$

определяет начальное значение функции  $\delta(t)$ . При  $f'_x(0) = 0$  это условие совпадает с уравнением, связывающим углы раствора клина  $\theta$  и раскрытия веера  $\psi$  в задаче о внедрении клина в полупространство:

$$\cos(2\theta - \psi_0) = \frac{\cos \psi_0}{1 + \sin \psi_0}. \quad (9)$$

Форма деформированной границы на этом этапе определяется функцией, являющейся решением системы (6) и имеющей вид

$$y = F(x).$$

Поскольку область  $AECF$  движется как жёсткое целое, поле напряжений в этой области в рамках теории идеального жесткопластического тела не определено. Приведённое на (рис. 1) поле прямолинейных характеристик определяет напряжённое состояние, которое может рассматриваться как возможное, статически допустимое продолжение поля напряжений в эту область. Оно имеет вид

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2k.$$

Прямая линия  $AC$  является линией разрыва напряжений, на ней выполняется условие

$$n_j \sigma_{ij} = 0,$$

а в области  $AFC$

$$\sigma_{ij} = 0.$$

поэтому граничные условия на деформированной свободной поверхности выполняются.

Усилие, необходимое для внедрения клина, рассчитывается по формуле

$$p = 4k(1 + \psi) |AB| \sin \theta. \quad (10)$$

Схема пластического течения на втором этапе деформирования представлена на рис. 2

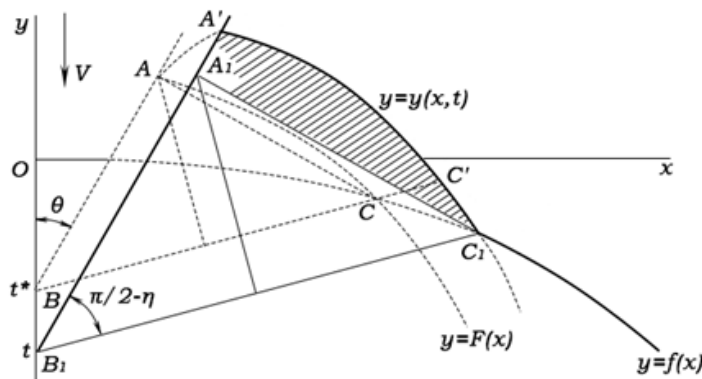


Рис. 2. Схема пластического течения при  $\psi = 0$

Все точки области  $A'C'C_1B_1A_1$  в каждый момент времени  $t$  ( $t \geq t^*$ ) движутся с одной и той же скоростью  $v$ , проекции которой на оси координат равны:

$$v_x = v_\alpha \cos(\eta - \theta), v_y = v_\alpha \sin(\eta - \theta).$$

Уравнение подвижной границы  $A'C'C_1$  определяется функцией  $y = F(x)$ , которая является решением системы (6), и имеет вид

$$y(x, t) = F(x - v_\alpha(t - t^*) \cos(\eta - \theta)) + v_\alpha(t - t^*) \sin(\eta - \theta). \quad (11)$$

На рис. 3 представлено пластическое течение в окрестности точки  $C$ . В результате вдавливания клина точка  $C$ , в момент времени  $t$  находившаяся на недеформированной поверхности, при  $t + \Delta t$  займёт положение  $C'$ , а дуга  $CC_1$  перейдёт в дугу  $C'C_1$ . В силу равномерного движения области  $A'C'C_1B_1A_1$  по направлению  $\alpha$ -линии:

$$CC' = v_\alpha \Delta t.$$

Если рассматривать  $\Delta t$  как бесконечно малый промежуток времени, то дуги  $CC_1$  и  $C'C_1$  можно считать прямолинейными.

На рис. 3 выполнены дополнительные построения: отрезки  $CH$  и  $C'E$  построены параллельно оси  $y$ , а отрезки  $C_1F$  и  $CG$  параллельны оси  $x$ . Из треугольников  $CC_1G$ ,  $FHC_1$ ,  $CFC_1$  следует:

$$|C_1E| = |CC_1| \cos \phi - |CC'| \cos(\eta - \theta),$$

$$|C'E| = |CC_1| \sin \phi + |CC'| \sin(\eta - \theta),$$

$$|CC_1| = \frac{\Delta t}{\sin \phi + \cos \phi \operatorname{tg}(\eta - \theta)}.$$

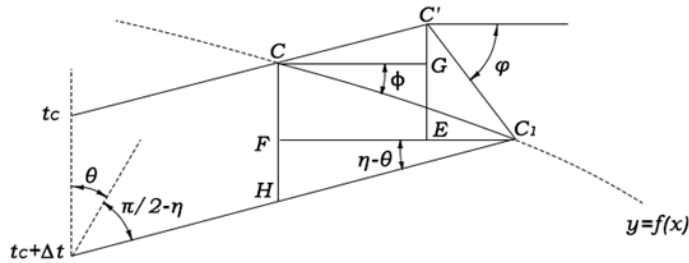


Рис. 3. Пластическое течение в окрестности точки  $C$

В силу того, что  $v_\alpha \Delta t = \operatorname{tg} \varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 + v_\alpha \sin(\eta - \theta) [1 + \operatorname{tg}(\eta - \theta) \operatorname{ctg} \phi]}{\operatorname{ctg} \phi - v_\alpha \cos(\eta - \theta) - v_\alpha \sin(\eta - \theta) \operatorname{ctg} \phi}. \quad (12)$$



При  $\Delta t \rightarrow 0$  хорда  $CC_1$  станет касательной к недеформированной поверхности  $y = f(x)$  в точке  $C$ , а хорда  $C'C_1$  – касательной к деформированной поверхности  $y = y(x, t)$  в той же точке  $C$ , поэтому

$$tg\phi = -f'(x_C), \quad (13)$$

$$tg\varphi = -\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{(x,t)=(x_C,t_C)} = -F'(x_C), \quad (14)$$

где  $t_C$  – время начала движения точки  $C$ .

Положение точки  $C$  определяется пересечением недеформированной поверхности  $y = f(x)$  с линией

$$y = xtg(\eta - \theta) + V_y t_C,$$

откуда следует равенство

$$x_C tg(\eta - \theta) - t_C = f(x_C). \quad (15)$$

Введение новой переменной

$$\tilde{x} = x_C - v_\alpha (t - t_C) \cos(\eta - \theta) \quad (16)$$

и подстановка (13) и (14) в (12) приводят к уравнению

$$F'(\tilde{x}) = \frac{f'(x_C) - v_\alpha \sin(\eta - \theta) [tg(\eta - \theta) - f'(x_C)]}{v_\alpha \sin(\eta - \theta) - v_\alpha \cos(\eta - \theta) f'(x_C) - 1}. \quad (17)$$

Система уравнений (15) – (17) при условии  $F(x_C) = y_C$  определяет ниже точки  $C$  некоторую проходящую через эту точку кривую  $y = F(x)$ , которая, перемещаясь вдоль линии скольжения со скоростью  $v_\alpha$ , образует деформированную границу на втором этапе деформирования. Выполненная замена переменных эквивалентна обратному перемещению деформированной границы из положения  $A'C'$ , которое она занимала в момент времени  $t$  (рис. 2) в положение  $AC$ , занимаемое ею в момент времени  $t^*$ .

При  $\psi = 0$  процесс деформирования происходит только вдоль линии разрыва скоростей  $B_1C_1$  и вся область  $B_1A_1A'C_1$  движется как жёсткое целое. В качестве возможного статически допустимого продолжения поля напряжений в эту область можно рассматривать однородное напряжённое состояние

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2k.$$

Так как материал в области  $A_1A'C'C_1$  свободен от напряжений и не оказывает давления на клин, то при расчёте усилия, необходимого для внедрения клина, учитывается только часть площади контакта  $B_1A_1$ :

$$p = 4k |A_1B_1| \sin \theta.$$

Рассмотренное решение задачи о внедрении клина в выпуклую заготовку имеет место при условии

$$\eta \geq \theta$$

и будет полным, если существует статически допустимое продолжение поля напряжений ниже линии  $BDEC$ .

Необходимо найти распределение деформаций в окрестности особенностей поля линий скольжения: линии разрыва скоростей перемещений ( $BDEC$ ) и центра веера характеристик (точка  $A$ ).

Деформации на линии разрыва скоростей определяются величиной удельной диссипации энергии  $\bar{W}$ , которая зависит от нормальной  $V_n = 0$  и касательной  $[V_\tau] = V^+ - V^- = \frac{\sin \theta}{\cos \eta}$  составляющих скорости, а также нормальной скорости распространения линии  $BDEC - G$  [8, 9].

Скорость  $G$  определяется соотношением

$$G = \frac{1}{|\text{grad} f|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad (18)$$

где  $f(x, y) = t$  – функция, определяющая уравнение линии разрыва скоростей перемещений.

Уравнения для составляющих линии  $BDEC$  имеют вид:

- линия  $BD$ :  $-[y - tg(\eta - \theta)x] = t$ ;
- линия  $DE$ :  $\begin{cases} x = x_A + R \cos \xi \\ y = y_A + R \sin \xi \end{cases}, R = |AE|, \xi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ;
- линия  $EC$ :  $y = xtg\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) + y_C - x_C tg\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)$ .

Тогда из (18):

$$G = \begin{cases} \frac{dx_A}{dt} \cos \xi + \frac{dy_A}{dt} \sin \xi + \frac{dR}{dt}, \xi \in \left[\eta - \theta - \frac{\pi}{2}; \eta - \theta - \frac{\pi}{2} + \psi\right] \\ \frac{(x_C - x)\delta'}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \left[y'_C - x'_C tg\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)\right] \end{cases} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= \frac{x'_C (1 + \omega \cos \delta) + x_C \omega \sin \delta \delta'}{(1 + \omega \cos \delta)^2}, \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{x'_C \cos \eta \sin \theta (1 + \omega \cos \delta) + x_C \cos \eta \omega \sin \theta \sin \delta \delta'}{(\sin \theta)^2 (1 + \omega \cos \delta)^2}, \\ \frac{dy_A}{dt} &= \frac{[y'_C + \omega tg \theta (\sin \delta + t \cos \delta \delta')] (1 - \omega tg \theta \sin \delta) + (y_C + t \omega tg \theta \sin \delta) \omega g \theta \cos \delta \delta'}{(1 - \omega tg \theta \sin \delta)^2}. \end{aligned}$$

Полученные значения скорости  $G$  позволяют определить величину объёмной плотности диссипации энергии

$$\bar{W} = \frac{[V_\tau]}{G - V_n},$$

от которой зависит первое главное значение тензора конечных деформаций Альманси

$$E_1 = \frac{\bar{W}^2}{4} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right].$$

Деформации в окрестности центра веера определяются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_{11}}{d\alpha} \bar{A} - a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{21} (\cos \alpha)^2 &= 0, \\ \frac{da_{12}}{d\alpha} \bar{A} - a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} (\cos \alpha)^2 &= 0, \\ \frac{da_{21}}{d\alpha} \bar{A} - a_{11} (\sin \alpha)^2 + a_{21} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \frac{da_{22}}{d\alpha} \bar{A} - a_{12} (\sin \alpha)^2 + a_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $a_{ij}$  – компоненты тензора дисторсии,  $\bar{A} = \frac{v_\alpha - a' \cos \alpha - b' \sin \alpha}{v_\alpha}$ ,  $a' = \frac{dx_A}{dt}$ ,  $b' = \frac{dy_A}{dt}$  – закон движения центра веера линий скольжения. Приведённая система может быть решена методом Рунге-Кутты IV порядка; в силу того, что частица попадающая в веер получает начальные деформации на линии  $EC$ , решение системы должно удовлетворять начальным условиям

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{W}_{EC} & 1 \end{bmatrix}.$$

**2. Численное решение.** Пусть абсолютно твёрдый клин  $y = |x| \operatorname{ctg}(\theta)$  внедряется в заготовку, имеющую форму гиперболического цилиндра  $\frac{(y-a)^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ . Для данной задачи возможны три варианта пластического течения.

В первом случае угол раскрытия веера  $\psi(t)$  в течение всего процесса пластического течения будет больше нуля. Вследствие наличия у гиперболы асимптот  $y = \pm \frac{a}{b}x$  процесс будет стремиться к некоторому автомодельному режиму, соответствующему вдавливаю клина  $y = |x| \operatorname{ctg}(\theta)$  в клин  $y = \frac{a}{b}|x|$ . Форма подвижной границы в этом случае находится из решения системы уравнений (6).

Второй случай имеет место, если выполняется условие

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta\right) \geq \frac{a}{b}.$$

В данном случае при малых глубинах внедрения клина течение происходит при ненулевом  $\psi$ . Форма подвижной границы определяется решением системы (6). При дальнейшем внедрении клина угол раскрытия веера обращается в нуль и процесс деформирования стремится к автотельному режиму. Форма деформированной границы определяется из решения системы (15) – (17).

Третий случай имеет место при

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta\right) < \frac{a}{b}.$$

Тогда решение может быть построено только до момента, когда прямая линия  $AC$  займёт положение касательной к гиперболе в точке  $C$ . Для данной схемы это предельное положение линии  $AC$ , позволяющее построить статически допустимое продолжение поля напряжений в жёсткую область.

Пусть гиперболический цилиндр задаётся уравнением

$$\frac{(y - \sqrt{2})^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1,$$

угол раствора клин равен  $\frac{\pi}{4}$ , коэффициент трения  $\mu = 0.12$ , то есть  $\eta \approx 0.67$  радиан, тогда уравнение недеформированной поверхности примет вид

$$y_C = \sqrt{2} - \sqrt{x_C^2 + 2}.$$

При введении обозначений:

$$x_C z_1^2 \sin \delta - (y_C + t) z_2^2 \cos \delta = A,$$

$$x_C z_1^2 \omega \sin \delta = B,$$

$$v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - x'_C(\tau_A) = C,$$

$$\frac{\omega \cos \delta z_2}{tg \theta} [tg \theta + z_2 (y_C + t \omega tg \theta \sin \delta)] = D,$$

$$v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - y'_C(\tau_A) = E,$$

$$v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi) - \omega \sin \delta z_2 = G,$$

система (6) запишется в виде

$$\begin{aligned} y'_C &= \frac{-x_C x'_C}{\sqrt{x_C^2 + 2}}, \\ x'_C z_1 - y'_C z_2 + A\omega\delta' &= z_2, \\ x'_C z_1 + B\delta' + C\tau'_A &= v_\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right), \\ y'_C \frac{z_2}{\operatorname{tg}\theta} + D\delta' + E\tau'_A &= G. \end{aligned}$$

Полученная система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом относительно  $\delta' = -\psi'$ . Это уравнение имеет вид

$$\delta' = \frac{(v_\alpha \cos(\frac{\pi}{4} - \delta) E - CG) \operatorname{tg}\theta (z_1 \sqrt{x_C^2 + 2} + z_2 x_C) - z_1 z_2 E \operatorname{tg}\theta \sqrt{x_C^2 + 2} - C z_2^2 x_C}{(BE - CD) \operatorname{tg}\theta (z_1 \sqrt{x_C^2 + 2} + z_2 x_C) - z_1 A\omega E \operatorname{tg}\theta \sqrt{x_C^2 + 2} - C z_2 x_C A\omega}.$$

Данное уравнение решается методом последовательного интегрирования [10]. Отрезок времени на котором определяется неизвестная функция разбивается на  $n$  шагов. Функции, зависящие от параметра запаздывания на первом шаге определяются начальными условиями для системы (6), на каждом  $i$ -м шаге – решением, полученным на  $(i - 1)$ -м шаге.

Решение уравнения на каждом из шагов находится с помощью численных методов (например, метод Адамса) с последующей интерполяцией функции  $\psi(t)$ .

Значения неизвестных функций в окрестности  $t = 0$  для первого шага:  $\delta(\tau_A) = \delta_0$ ,  $y'_C(\tau_A) = y'_C(0) = 0$ ,  $x'_C(\tau_A) = x'_C(0) = \frac{z_2 \omega}{z_1}$ .

На рис. 4 приведён график изменения угла раскрытия веера с течением времени. Угол веера обращается в нуль и процесс течения переходит ко второму этапу при  $t \approx 0.523$ .

Геометрическое представление пластической области и деформированной поверхности материала дано на рис. 5.

На рис. 6 приводится сравнительное построение деформированных поверхностей для задачи с учётом (сплошная линия) и без учёта коэффициента трения (пунктирная линия). При учёте коэффициента трения образование деформированной поверхности происходит на большей части образца, чем в случае отсутствия трения.

На рис. 7 представлен график изменения удельного усилия, необходимого для внедрения клина.

На рис. 8 приведено распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений  $BDEC$  и в окрестности центра веера линий скольжения в момент времени  $t = 0.3$ . Из рисунка видно, что наибольшие деформации наблюдаются в окрестности центра веера линий скольжения.

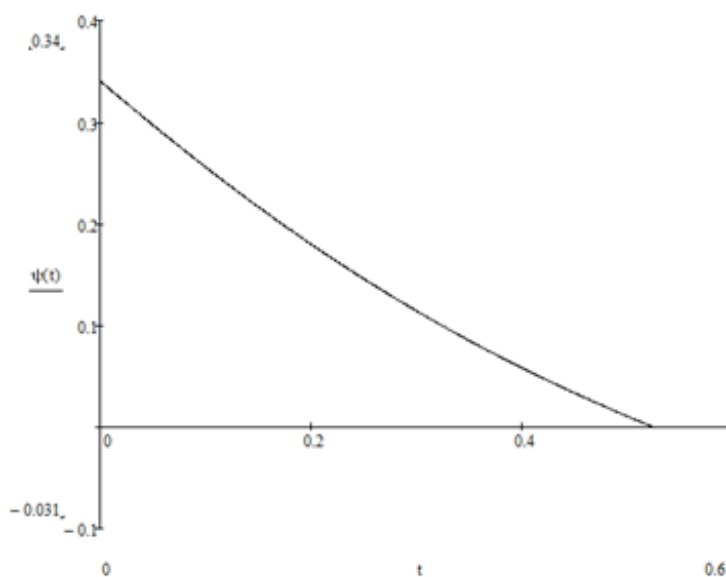


Рис. 4. График зависимости угла раскрытия веера характеристик от времени  $\psi(t)$

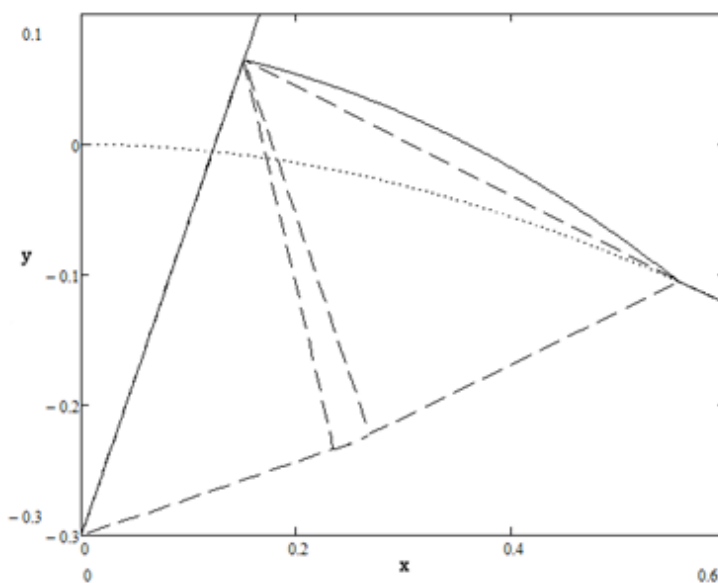


Рис. 5. Пластическая область и деформированная поверхность в задаче о вдавливании клина  $y = |x| \operatorname{ctg}(\theta)$  с углом раствора  $22^\circ 31' 2''$  в гиперболический цилиндр  $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$

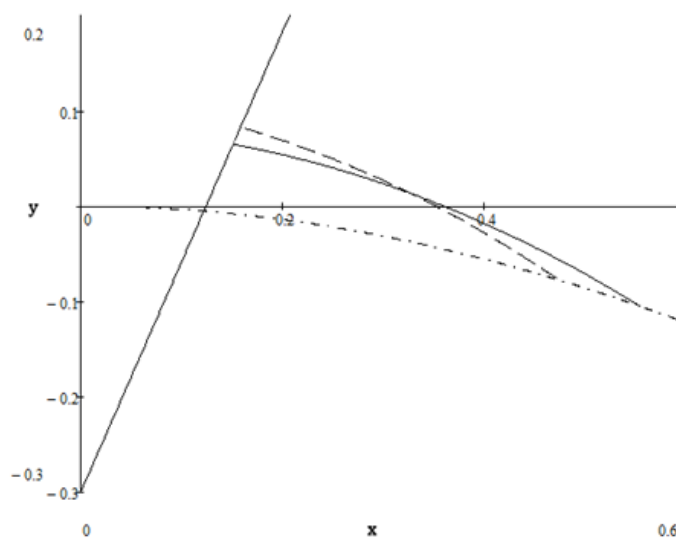


Рис. 6. Деформированная поверхность с учётом и без учёта коэффициента трения

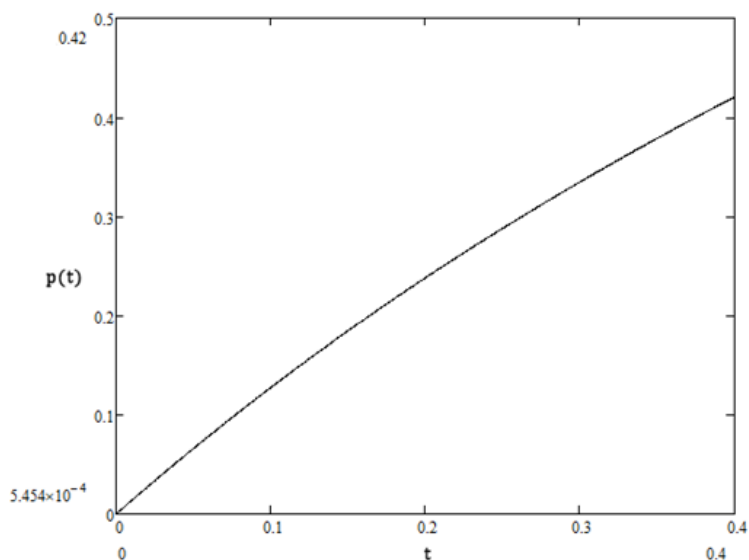
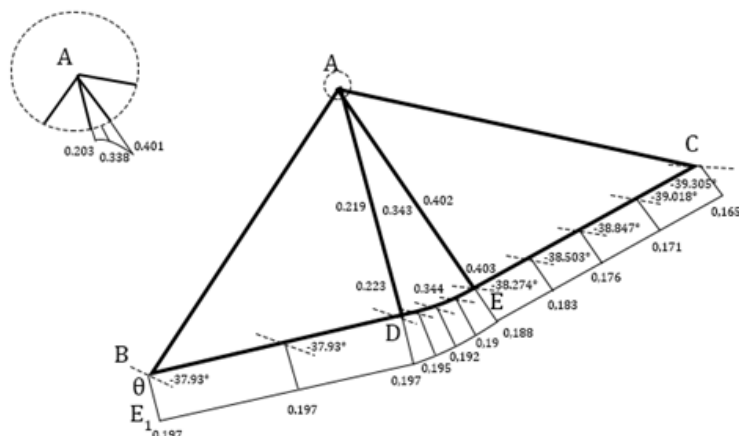


Рис. 7. График зависимости удельного усилия, необходимого для внедрения клина, от времени  $p(t)$

**3. Выводы.** В данной работе для задачи о внедрении клина в выпуклую заготовку были выведены: система уравнений для определения параметров пластической области и деформированной поверхности материала в каждый момент времени; выражение, позволяющее вычислить необходимую для внедрения клина нагрузку; соотношения для расчёта деформаций, получаемых



**Рис. 8.** Распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений и в окрестности центра веера линий скольжения при  $t = 0.3$

частицами материала на линии разрыва скоростей перемещений и в центре веера характеристик.

Построены графики изменения угла раскрытия веера характеристик и необходимой для внедрения клина нагрузки, построены пластическая область и деформированная поверхность, рассчитаны получаемые частицами материала деформации для задачи о внедрении клина с углом раствора  $22^{\circ}31'2''$  в гиперболический цилиндр  $\frac{(y - \sqrt{2})^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$  с коэффициентом трения  $\mu = 0.12$ .

Учёт коэффициента трения приводит к тому, что деформирование материала происходит на большей части поверхности заготовки, чем при отсутствии трения.

Из полученного распределения деформаций следует, что наибольшие деформации частицы материала получают в окрестности центра веера характеристик, то есть точки, в которой деформированная поверхность подминается клином.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** И. В. Канашин написание текста рукописи, А. Л. Григорьева редактирование текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, Я. Ю. Григорьев редактирование текста рукописи, согласование финальной версии рукописи

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** I. V. Kanashin writing the text of the manuscript, A. L. Grigorieva editing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, Ya. Yu. Grigoriev editing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript



**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – Москва : Наука, 1969. – 420 с.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – Москва : Гостехиздат, 1956. – 407 с.
4. Бьковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
5. Хромов А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. – Владивосток : Дальнаука, 1996. – 183 с.
6. Анисимов А. Н., Хромов А. И. Внедрение клина в полупространство при условии текучести Кулона–Мора // Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки. – 2007. – № 1. – С. 44–49.
7. Анисимов А. Н., Хромов А. И. Выглаживание жесткопластической поверхности клинообразным штампом при условии текучести Кулона–Мора // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 2. – С. 176–182.
8. Буханько А. А., Хромов А. И. Поля деформаций при внедрении клинообразных и плоских штампов // Дальневосточный математический журнал. – 2002. – Т. 3, № 2. – С. 311–319.
9. Хромов А. И., Козлова О. В. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. – Владивосток : Дальнаука, 2005. – 157 с.
10. Труфанова Т. В., Ходченко Е. В. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом // Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки. – 2012. – № 59. – С. 3–7.

### REFERENCES

1. *Kachanov L. M.* Foundations Of The Theory Of Plasticity. – Moscow : Nauka, 1969. – 420 p.
2. *Sokolovsky V. V.* Theory of plasticity. – Moscow : Vyshaya Shkola, 1969. – 608 p. – (in Russian).
3. *Hill R.* The mathematical theory of plasticity. – Moscow : Gostekhizdat, 1956. – 407 p. – (in Russian).
4. *Bykovtsev G. I., Ivlev D. D.* Theory of plasticity. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p. – (in Russian).
5. *Khromov A. I.* Deformation and fracture of rigid-plastic bodies. – Vladivostok : Dalnauka, 1996. – 183 p. – (in Russian).
6. *Anisimov A. N., Khromov A. I.* Wedge embedding in a half-space under the Coulomb–Mohr flow condition // Vestnik of Samara State Technical University. Physical and mathematical sciences. – 2007. – 1(14). – P. 44–49. – (in Russian).
7. *Anisimov A. N., Khromov A. I.* Smoothing of a rigid-plastic surface with a wedge-shaped die under the Coulomb–Mohr yield condition // Applied mechanics and technical physics. – 2010. – Vol. 51, 2(300). – P. 176–182. – (in Russian).

8. *Bukhanko A. A., Khromov A. I.* Deformation fields at introduction of wedge-shaped and flat dies // Far Eastern Mathematical Journal. – 2002. – Vol. 3, no. 2. – P. 311–319. – (in Russian).
9. *Khromov A. I., Kozlova O. V.* Fracture of rigid-plastic bodies. Fracture constants. – Vladivostok : Dalnauka, 2005. – 157 p. – (in Russian).
10. *Trufanova T. V., Khodchenko E. V.* Differential equations with delayed argument // Vestnik of Amur State University. Series: Natural and Economic Sciences. – 2012. – No. 59. – P. 3–7. – (in Russian).

О. В. Дудко<sup>1,2</sup>, А. А. Лаптева<sup>1,2</sup>

## ЦИКЛИЧЕСКОЕ ОДНООСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ РАЗНОМОДУЛЬНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

<sup>1</sup>Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

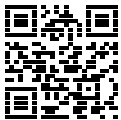
<sup>2</sup>Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

**Аннотация.** Исследуется динамика одномерных упругих деформаций в разномодульном изотропно-упругом полупространстве под действием циклического одноосного растяжения-сжатия на его границе. Обобщенное решение нестационарной начально-краевой задачи строится в форме рекуррентной последовательности локальных решений и учитывает столкновения и отражения волновых фронтов. Показано, что в приграничной области деформации на каждом такте цикла изменяются по сценарию «слой растяжения – слой сжатия – жесткий слой», а на удалении от границы динамически перераспределяются за счет многократных взаимодействий волн. Пакет из чередующихся сжатых и жестких слоев убегает вперед со скоростью быстрой характеристики, при этом суммарная зона растяжения остается позади. Такое перераспределение деформаций при циклическом растяжении-сжатии разномодульного полупространства происходит как при существенной, так и при малой разнице между скоростями быстрой и медленной характеристик.

**Ключевые слова:** разномодульная упругость, одномерные деформации, циклическое нагружение, столкновение волн, перераспределение деформаций сжатия и растяжения.

**Дудко Ольга Владимировна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования ИАПУ ДВО РАН, доцент департамента программной инженерии и искусственного интеллекта ДВФУ;  
e-mail: dudko.ov@dvfu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7493-6360>; AuthorID: 6525

**Лаптева Анастасия Александровна**, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования ИАПУ ДВО РАН, доцент департамента программной инженерии и искусственного интеллекта ДВФУ;  
e-mail: lanastal@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-1703-0471>;  
AuthorID: 119796



**для цитирования:** Дудко О. В., Лаптева А. А. Циклическое одноосное растяжение-сжатие разномодульного упругого полупространства // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 105–117. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.002. EDN: XENARA

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

© Дудко О. В., Лаптева А. А. 2025

Поступила: 10.03.25; принята в печать: 14.04.25; опубликована: 19.12.25.

O. V. Dudko<sup>1,2</sup>, A. A. Lapteva<sup>1,2</sup>

## CYCLIC UNIAXIAL TENSION-COMPRESSION OF A BIMODULAR ELASTIC HALF-SPACE

<sup>1</sup>*Institute of Automation and Control Processes of the FEB RAS, Vladivostok, Russia*

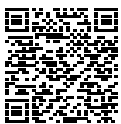
<sup>2</sup>*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

**Abstract.** The dynamics of one-dimensional elastic deformations in a bimodulus isotropic-elastic half-space under cyclic uniaxial tension-compression at its boundary is investigated. The generalized solution to the nonstationary initial-boundary value problem is constructed in the form of a recursive sequence of local solutions, accounting for the collisions and reflections of wavefronts. It is shown that in the near-boundary region, deformations at each cycle step follow the scenario "tension layer – compression layer – rigid layer", while at a distance from the boundary, they dynamically redistribute due to multiple wave interactions. A packet of alternating compressed and rigid layers runs forward at the velocity of the fast characteristic, while the total tensile region lags behind. Such a redistribution of deformations under cyclic tension-compression of a bimodulus half-space occurs both when the difference between the fast and slow characteristic velocities is significant and when it is small.

**Keywords:** bimodular elasticity, one-dimensional deformation, cyclic loading, interaction of waves, redistribution of compression and tension deformations.

**Olga V. Dudko**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences;  
e-mail: dudko.ov@dvfu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7493-6360>; AuthorID: 6525

**Anastasia A. Lapteva**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences;  
e-mail: lanastal@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-1703-0471>;  
AuthorID: 119796



**to cite this article:** Dudko O. V., Lapteva A. A. Cyclic uniaxial tension-compression of a bimodular elastic half-space // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 105–117. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.002

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** Существуют материалы (горные породы и грунты [1, 2], бетоны [3], асфальтовые покрытия [4], композиты [5], пеноматериалы [6] и др.), которые на начальной стадии деформирования по-разному реагируют на растяжение и сжатие. Упругое поведение подобных материалов в предположении их сплошности, однородности и изотропии изучает разномодульная теория упругости. В настоящей работе рассматривается связный разномодульный материал с ненулевыми модулями упругости для сжатия и растяжения (в отличие от сыпучих сред [7] и гибких материалов [8], которые сопротивляются только одному типу нагружения – или сжатию, или растяжению). Для описания механического поведения такого материала выбран тензорнолинейный вариант модели Мясникова-Олейникова [8] с упругим потенциалом, где два слагаемых из четырех имеют неаналитическую форму. При одномерных малых деформациях уравнение движения среды [8] принимает квазилинейную форму с переменным коэффициентом, чувствительным к знаку деформации. Волны растяжения и сжатия, возникающие в решении такого уравнения, движутся с разными скоростями и могут сталкиваться, порождая специфические эффекты, невозможные в линейно-упругой среде. Так, в [9–11] показаны сложные волновые картины, возникающие в результате попутных и встречных столкновений волн деформаций в разномодульных телах при простых режимах одноосного граничного нагружения с одиночным импульсом растяжения-сжатия. Очевидно, что циклические нагрузки и вибрации еще больше усложняют динамику упругого деформирования разномодульных материалов. В представленной работе ставим цель подробно проследить (насколько это возможно) за формированием динамического поля деформаций с учетом столкновений и отражений волн в разномодульном упругом полупространстве, подверженном циклическому одноосному знакопеременному нагружению. Граничное условие будем задавать функцией перемещения в форме линейного сплайна, что позволит при решении нестационарной начально-краевой задачи воспользоваться рекуррентным подходом, опробованным ранее [9, 10] на более простых режимах нагружения.

**1. Модельные соотношения.** Система уравнений динамики адиабатического деформирования разномодульной изотропной упругой среды Мясникова-Олейникова [8] при малых деформациях и отсутствии массовых сил имеет вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T), \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}, \\ W &= \frac{\lambda}{2} E_1^2 + \mu E_2 - \nu E_1 \sqrt{E_2} + \alpha \frac{E_1^3}{\sqrt{E_2}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши;  $\mathbf{e}$  – тензор малых деформаций с инвариантами  $E_1 = \text{tr}(\mathbf{e})$ ,  $E_2 = \text{tr}(\mathbf{e}^2)$ ;  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений;  $\mathbf{v}$  – вектор скорости;  $W$  – упругий потенциал с модулями упругости  $\lambda$ ,  $\mu$  в линейной части модели и коэффициентами  $\nu$ ,  $\alpha$ , отвечающими за физическую нелинейность (разномодульность) среды [8]; все функции зависят от декартовых координат  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$

и времени  $t$ ;  $\nabla = \{\partial/\partial x_1; \partial/\partial x_2; \partial/\partial x_3\}$ ,  $\dot{\diamond} = \partial\diamond/\partial t$ . Принятая малость деформаций уравнивает эйлеров и лагранжев подходы к описанию движения сплошной среды и позволяет в (1) пренебречь изменением плотности ( $\rho \approx \rho_0(1 - E_1) \approx \rho_0$  при  $|E_1| \ll 1$ ).

В одномерном случае ( $x_1 = x$ ,  $\mathbf{u} = \{u(x, t), 0, 0\}$ ,  $\partial\diamond/\partial x = \diamond_x$ ) система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma(e) &= \omega(e) \cdot e, & (\omega(e) \cdot e)_x &= \rho \ddot{u}, & e &= u_x, & v &= \dot{u}, \\ \omega(e) &= \lambda + 2\mu - 2(\nu - \alpha) \cdot e/|e|. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом  $(e/|e|)_x = (u_x/|u_x|)_x = 0$  уравнение движения в (2) записывается как

$$(c(e))^2 u_{xx} = \ddot{u}, \quad (3)$$

где кусочно-постоянная характеристическая скорость зависит от типа деформации:

$$c(e) = \sqrt{\frac{\omega(e)}{\rho}} = \begin{cases} a = \sqrt{(\lambda + 2\mu + 2(\nu - \alpha)) \cdot \rho^{-1}}, & e < 0, \\ b = \sqrt{(\lambda + 2\mu - 2(\nu - \alpha)) \cdot \rho^{-1}}, & e > 0. \end{cases} \quad (4)$$

В (4) считаем, что  $a > b > 0$  при  $\nu > \alpha$ ,  $\lambda + 2\mu > 2(\nu - \alpha)$ . В этом случае уравнение (3) описывает одномерные продольные движения связной разномодульной упругой среды [8] с различными конечными скоростями распространения деформаций сжатия и растяжения. Уравнению (3) с характеристической скоростью (4) удовлетворяет решение Д'Аламбера

$$u(x, t) = f(x - c(e)t) + g(x + c(e)t), \quad (5)$$

где неизвестные функции от аргументов  $x \pm c(e)t$  определяются с учетом краевых условий задачи. При этом скорость  $c(e)$  также может являться неизвестной величиной.

## 2. Сильные разрывы в решении уравнения (3) и их столкновение.

При недифференцируемых краевых условиях (например, ступенчатой граничной нагрузке) решение уравнения движения (3) становится обобщенным [7]. В нем появляются разрывы – скачки производных непрерывной функции  $u(x, t)$ . На фронтах сильных разрывов (плоских продольных волнах деформаций со скачками первых производных перемещения) граничными условиями являются условие непрерывности перемещений и условия сохранения на разрыве [7, 12], следующие из интегральных законов сохранения. При малых одномерных деформациях эти соотношения принимают вид

$$u^+ = u^-, \quad \sigma(e^+) - \sigma(e^-) = \rho(\dot{x}(t))^2(e^+ - e^-), \quad (6)$$

где  $\dot{x}(t)$  – скорость движения фронта сильного разрыва  $x = x(t)$ ; индексы «+» и «-» указывают на значения функций в малых окрестностях впереди и позади  $x(t)$  соответственно.

Из второго уравнения (6) с учетом (2), (4) следует существование трех типов сильных разрывов [7]: полусигнотон  $x = \gamma(t)$  при  $e^+ = 0$ ,  $e^- \neq 0$  или  $e^+ \neq 0$ ,  $e^- = 0$ ; простой разрыв  $x = \xi(t)$  при  $e^+ > 0$ ,  $e^- > 0$  или  $e^+ < 0$ ,  $e^- < 0$ ; ударная

волна  $x = \Sigma(t)$  при  $e^+ > 0$ ,  $e^- < 0$ . Отметим, что принятое в работе положение о связности разномодульной среды не дает появиться в решении уравнения (3) еще одному типу разрывов – отколу [7] (разрыву сплошности), возможному в несвязных сыпучих и гранулированных материалах. Полусигнотоны и простые разрывы входят в семейство характеристик уравнения (3) и могут быть быстрыми фронтами сжатия ( $|\dot{\gamma}_a| = |\dot{\xi}_a| = a > b$ ) или медленными фронтами растяжения ( $|\dot{\gamma}_b| = |\dot{\xi}_b| = b$ ). Скорость ударной волны ограничена скоростями медленной и быстрой характеристик:  $|\dot{\Sigma}| = \sqrt{(b^2 e^+ - a^2 e^-)/(e^+ - e^-)} \in (b; a)$ .

В [12] показано, что однозначность решения краевой задачи для гиперболического уравнения, подобного (3), можно обеспечить вводом условий эволюционности разрывов, которые на продольной волне  $x(t)$  сводятся к системе неравенств

$$c(e^+) \leq |\dot{x}(t)| \leq c(e^-). \quad (7)$$

Согласно (7), ударная волна и простые разрывы эволюционны при всех соответствующих их типам значениях  $e^+$ ,  $e^-$ . Полусигнотоны удовлетворяют условию (7) при  $e^+ = 0$ ,  $e^- \neq 0$ , т.е. когда они движутся в недеформированную область среды.

Из условия неубывания энтропии [12] следует, что в разномодульной среде, где скорость характеристик при сжатии выше, чем при растяжении ( $a > b$ ), может существовать только ударная волна сжатия. В [13] для трехконстантного варианта модели [8] показано, что переход разномодульной среды от предварительного сжатия ( $c(e^+)_{e^+ < 0} = a$ ) к растяжению ( $c(e^-)_{e^- > 0} = b$ ) происходит с образованием жесткого слоя, ограниченного быстрой и медленной характеристиками. В [11] для отличной от [8] модели разномодульной среды доказано, что движение подобного жесткого слоя с границами-полусигнотонами – бездиссипативный процесс.

Для решения уравнения (3) с учетом столкновений волн необходимы дополнительные условия, связывающие волновые картины до и после взаимодействия. Положим, что в некоторый момент времени в решении уравнения (3) существуют два фронта сильных разрывов с известными координатами

$$\begin{aligned} x_L(t) &= X_L + \dot{x}_L(t - \tau_L), & x_R(t) &= X_R + \dot{x}_R(t - \tau_R), \\ 0 \leq x_L(\tau_L) &< x_R(\tau_R), & X_L &\neq X_R, & t - \tau_L &\geq 0, & t - \tau_R &\geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Если между фронтами  $x_L(t)$ ,  $x_R(t)$  нет других волн и  $\dot{x}_L \neq \dot{x}_R$ , то возможны два варианта их столкновения: встречное при  $\dot{x}_L > 0$  и  $\dot{x}_R < 0$ ; попутное при  $0 < \dot{x}_R < \dot{x}_L$  или  $\dot{x}_L < \dot{x}_R < 0$ . Согласно указанным ограничениям на скорости  $\dot{x}_L$  и  $\dot{x}_R$ , встречно могут столкнуться любые фронты сильных разрывов (независимо от их типов) с подходящими направлениями движения. В паре фронтов-участников попутного столкновения убегающей волной может быть фронт растяжения со скоростью  $b$ , а догоняющей – фронт сжатия со скоростью  $a > b$ . Ударная волна может выступать в обоих качествах.

Любое столкновение фронтов  $x_L(t)$ ,  $x_R(t)$  порождает как минимум две расходящихся волны – прямую  $x_r(t)$  и отраженную  $x_l(t)$ :

$$\begin{aligned} x_r(t) &= X + \dot{x}_r(t - \tau), & x_l(t) &= X + \dot{x}_l(t - \tau), \\ 0 \leq x_l(t) &\leq x_r(t), & \dot{x}_r &> 0, & \dot{x}_l &< 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Время возникновения  $\tau$  и начальная координата  $X$  для волн  $x_l(t)$ ,  $x_r(t)$  вычисляются из системы уравнений

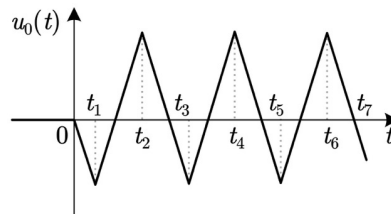
$$X = X_L + \dot{x}_L(\tau - \tau_L) = X_R + \dot{x}_R(\tau - \tau_R), \quad (10)$$

следующей из (8), (9) при  $t = \tau$ . Эта система также пригодна, когда после столкновения  $x_L(t)$  и  $x_R(t)$  возникает три новых фронта (например, отраженная волна  $x_l(t) = X + \dot{x}_l(t - \tau)$  и две границы жесткого слоя  $x_r^a(t) = X + a(t - \tau)$ ,  $x_r^b(t) = X + b(t - \tau)$ , бегущие в прямом направлении). При  $x_L(t)|_{\forall t \geq 0} = 0$  система (10) соответствует падению волны  $x_R(t)$  на границу среды  $x = 0$ . Таким образом, уравнения (10) дополняют основные соотношения (6), (7) и позволяют учитывать эффекты столкновения и отражения фронтов сильных разрывов в решении нестационарной начально-краевой задачи.

**3. Постановка задачи.** Рассмотрим циклическое одноосное растяжение-сжатие разномодульного упругого полупространства  $x \geq 0$ . До начала нагружения считаем полупространство не деформированным. Начальные и граничные условия задачи смешанного типа для уравнения (3) задаем в перемещениях, считая координату границы  $x = 0$  неизменной ввиду малости деформаций:

$$\begin{aligned} u(x, 0)|_{x \geq 0} &= \dot{u}(x, 0)|_{x \geq 0} = 0, \\ u(0, t) = u_0(t) &= \begin{cases} 0, & t < t_0 = 0, \\ k_j(t - t_{j-1}) + u_0(t_{j-1}), & t_{j-1} \leq t < t_j, \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Кусочно-линейная функция  $u_0(t)$  в (11) соответствует знакопеременному циклическому нагружению, если существуют не менее двух пар соседних сегментов с угловыми коэффициентами разного знака:  $\text{sgn}(k_j) = -\text{sgn}(k_{j-1})$ . На рис. 1 показан график линейного сплайна, удовлетворяющего такому условию.



**Рис. 1.** Граничное перемещение

Скорость граничного перемещения изменяется скачком в узловых точках функции  $u_0(t)$  (табл. 1) и на  $j$ -ом сегменте вычисляется как  $\dot{u}_0(t)|_{t \in [t_{j-1}, t_j]} = k_j = (u_0(t_j) - u_0(t_{j-1})) / (t_j - t_{j-1})$ .



$j$	0	1	2	3	4	5	6	7
$t_j * 10^3, \text{ с}$	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$u_0(t_j) * 10^3, \text{ м}$	0.0	-3.0	4.0	-3.0	4.0	-3.0	4.0	0.0

Таблица 1. Координаты узлов функции  $u_0(t)$

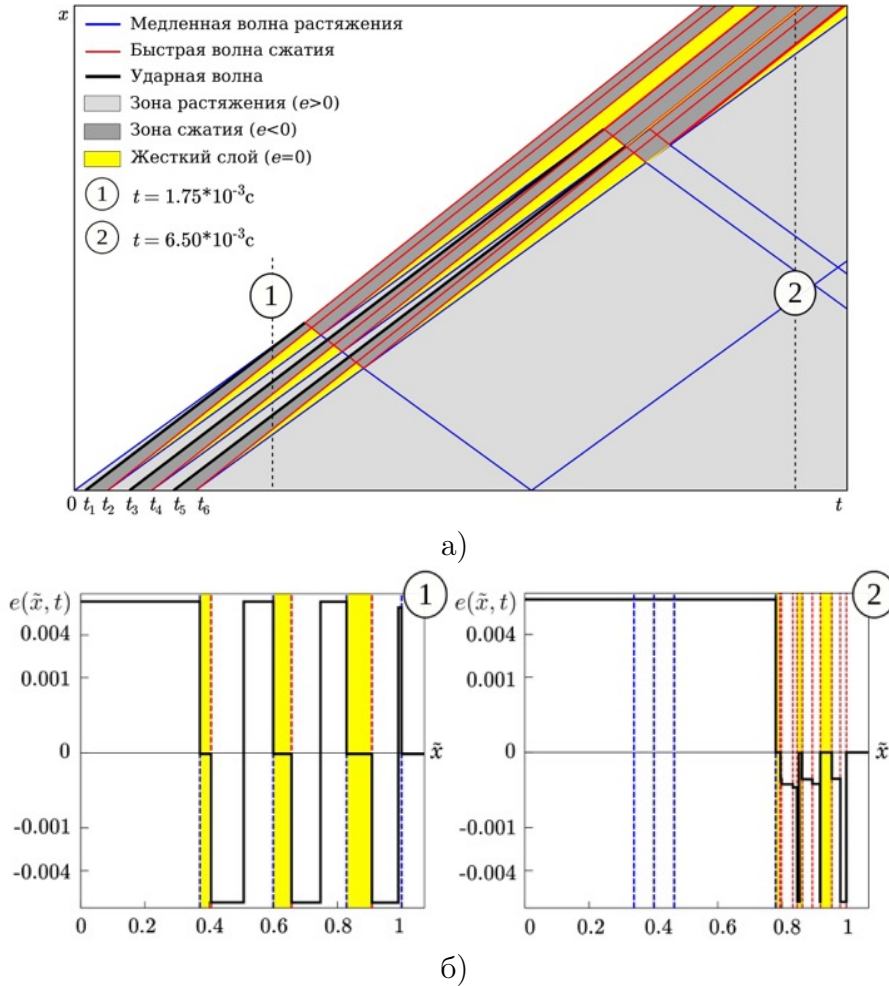
**4. Результаты решения задачи.** Обобщенным решением уравнения (3) с краевыми условиями (11) является перемещение  $u(x, t)$  – линейный сплайн с изломами на фронтах сильных разрывов и линейными локальными решениями  $u_i(x, t)$  в форме (5) между ними ( $i = 1, 2, \dots$ ). Рекуррентный алгоритм вычисления последовательности функций  $u_i(x, t)$  с учетом взаимодействия волн детально изложен в [9]. Здесь кратко опишем лишь ключевые аспекты этого процесса, а затем обсудим результаты, полученные с его помощью.

Каждое локальное решение  $u_i(x, t)$  возникает в свой момент времени  $\tau_i \geq 0$  и существует в растущем интервале  $\delta_i(t) = [x_l^{(i)}(t); x_r^{(i)}(t)]$  с координатами границ в форме (9). Вне области определения  $u_i(x, t)|_{x \notin \delta_i(t), t < \tau_i} = 0$ . В каждом локальном решении  $u_i(x, t)$  неизвестны функции  $f_i(x - c(e_i)t)$ ,  $g_i(x + c(e_i)t)$ , параметры  $\dot{x}_l^{(i)}$ ,  $\dot{x}_r^{(i)}$ ,  $X_i$ ,  $\tau_i$  границ интервала  $\delta_i(t)$  и характеристическая скорость  $c(e_i)$  внутри  $\delta_i(t)$ . Если одну из неизвестных величин задать, то остальные вычисляются из замкнутой системы уравнений, составленной из соотношений (6) на границах интервала  $\delta_i(t)$  и уравнений (10) для учета эффектов взаимодействия волн. Известной величиной в локальном решении  $u_i(x, t)$  логично считать характеристическую скорость  $c(e_i)$ , поскольку согласно (4) она может принимать только значения  $a$  или  $b$ . Конкретное значение  $c(e_i)$  выбирается из предположения, что границы интервала  $\delta_i(t)$  эволюционны. Это выражается условиями  $c(e_i) \geq c(e_L)|_{x \rightarrow x_l^{(i)}(t)-0}$ ,  $c(e_i) \geq c(e_R)|_{x \rightarrow x_r^{(i)}(t)+0}$ , следующими из (7) при известных  $c(e_L)$ ,  $c(e_R)$  в соседних с  $\delta_i(t)$  интервалах. Для проверки корректности построенного локального решения с выбранным значением  $c(e_i)$  служит само условие (7). Согласно [13], неэволюционная волна-граница интервала  $\delta_i(t)$  заменяется на движущийся жесткий слой. Порядок возникновения локальных решений определяется цепочкой неравенств  $\tau_1 < \tau_2 < \dots$  ( $\tau_1 = 0$ ), где каждый момент времени  $\tau_i$  связан с одним из событий: изменение скорости граничного перемещения; встречное или попутное столкновение волн; падение волны на границу полупространства. В первом случае  $\tau_i$  соответствует узлу граничного перемещения (11), а во втором и третьем – вычисляется из (10).

Далее рассмотрим решения задачи с заданным граничным перемещением (рис. 1), построенные для материалов с различными соотношениями  $a/b$ .

На рис. 2 показаны характеристическая плоскость  $\{x-t\}$  и графики деформаций  $e(\tilde{x}, t)$ , полученные при  $a/b \approx 1.1$  (песчаник [8]:  $\lambda = 1.78$  ГПа,  $\mu = 8.7$  ГПа,  $\nu = 1.35$  ГПа,  $\alpha = 0.48$  ГПа).

На плоскости  $\{x-t\}$  отрезки с отрицательным наклоном соответствуют отраженным волнам, разнотипные волны и зоны деформаций обозначены разными



**Рис. 2.** Решение при  $a/b \approx 1.1$ : а) плоскость  $\{x - t\}$ ; б) графики деформаций

цветами, область перед передним фронтом не закрашена. Графики деформаций  $e(\tilde{x}, t)$  построены для моментов времени ①, ②, оси  $\tilde{x}$  нормированы по координате переднего фронта, оси  $e$  имеют степенной масштаб, координаты волн отмечены пунктирными линиями соответствующих цветов, фон используется только для жестких слоев.

При заданной форме функции  $u_0(t)$  (рис. 1) первый такт цикла начинается с растяжения, порождающего при  $t = 0$  передний фронт граничных возмущений – медленный полусигнотон. Ударные волны возникают на границе полупространства в моменты смены растяжения на сжатие при  $t = t_1, t_3, t_5$ , растущие жесткие слои – при  $t = t_2, t_4, t_6$ , когда граничное сжатие меняется на растяжение. Таким образом, деформации в малой окрестности границы  $x = 0$  изменяются по сценарию «растяжение – сжатие – жесткий слой» (рис.2а), который

циклически повторяется с ростом  $t$ . График деформаций ① на рис.2б соответствует трем тактам такого сценария. В [14] подобная цикличность деформированного состояния показана в малой окрестности торца разномодульного стержня под действием внешней гармонической нагрузки.

Эволюция поля деформаций на удалении от нагружаемой границы происходит за счет взаимодействия волн. При этом формирование сложной волновой картины из прямых и отраженных фронтов различных типов начинается со столкновения попутных волн. В первом попутном столкновении в решении на рис. 2 участвуют передний фронт граничных возмущений (медленный полусигнотон) и догнавшая его ударная волна (первая в серии). Рис. 2а и график ② на рис. 2б показывают, что упругие деформации, возникающие на границе полупространства под действием циклического растяжения-сжатия, на удалении от границы динамически перераспределяются: чередующиеся сжатые и жесткие слои убегают вперед, оставляя области растяжения позади. Вычислительные эксперименты показали, что подобная структура поля деформаций формируется при заданном режиме нагружения разномодульной среды с любым соотношением  $a/b > 1$ .

На рис. 3 показано решение для случая  $a/b \approx 1.54$ . Значительная разница в скоростях быстрой и медленной характеристик позволяет четко различить чередование жестких и сжатых областей. Кроме того, на увеличенных фрагментах (рис. 3а, 3б) видна неоднозначность взаимодействия определенных типов волн. При встречном столкновении медленного и быстрого полусигно-

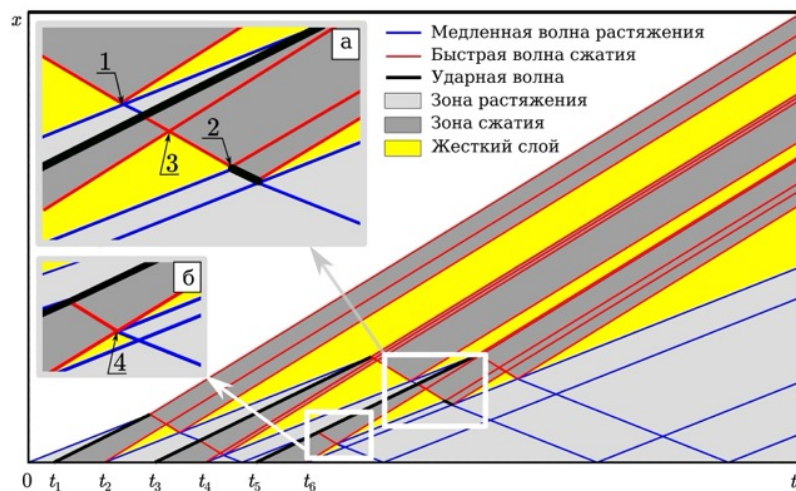


Рис. 3. Решение при  $a/b \approx 1.54$

тов возможны два исхода: пакет из двух границ жесткого слоя и отраженной волны растяжения (рис. 3а(1)); быстрый простой разрыв и отраженная

ударная волна (рис. 3а(2)). Аналогично, столкновение быстрого полусигнотона с быстрым простым разрывом приводит либо к двум расходящимся волнам сжатия (рис. 3а(3)), либо к жесткому слою и отраженной волне растяжения (рис. 3б(4)). Подобные эффекты наблюдаются и при единичном импульсе растяжения-сжатия с последующим удержанием границы разномодульного полупространства [10]. Во всех неоднозначных случаях одним из фронтов-участников столкновения является быстрый полусигнотон – граница растущего или исчезающего жесткого слоя. В отличие от полусигнотонов, простые разрывы могут сталкиваться только встречно и только с себе подобными. Их взаимодействие всегда происходит по солитонному типу и дает однозначный результат.

**Заключение.** В работе исследована динамика упругих деформаций при циклическом одноосном растяжении-сжатии разномодульного полупространства. Показано, что за счет столкновений и отражений волн вдали от нагружаемой границы формируется подвижная зона чередующихся сжатых и жестких слоев без областей растяжения. Среди трех типов сильных разрывов, возможных в разномодульной среде, в качестве особого случая выделен быстрый полусигнотон – подвижная граница жесткого слоя. Установлено, что встречное столкновение такой волны как с фронтами других типов, так и с себе подобными может иметь неоднозначный результат независимо от сложности режима нагружения.

Представленные в работе результаты дополняют совокупность теоретических представлений о динамике деформирования разномодульной упругой среды. Они могут использоваться как модельная база в прикладных задачах расчета деформационного поведения реальных материалов (например, оснований сооружений, железнодорожных и автотранспортных путей сообщения и др.), подверженных циклическим и вибрационным нагрузкам.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Авторы внесли равный вклад в проведение исследований и написание рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Исследования по теме статьи выполнены в рамках государственного задания ИАПУ ДВО РАН (тема № FWW-2021-0005).

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** The authors made an equal contribution to the research and writing of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** Research on the topic of the article was carried out within the state assignment of IACP FEB RAS (Theme FWW-2021-0005).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Баклашов И. В., Картозия Б. А.* Механика горных пород. – Москва : Недра, 1975. – 271 с.
2. *Бугров А. К., Голубев А. И.* Анизотропные грунты и основания сооружений. – Санкт-Петербург : Недра, 1993. – 245 с.
3. *Hong H., Baranger T. N.* Identification of Bimodular Material Parameters via a Semi-Closed Form Solution of the Brazilian Test // *Experimental Mechanics*. – 2024. – DOI: 10.1007/s11340-024-01058-w.
4. Mechanical analysis of asphalt pavement based on bimodulus elasticity theory / Q. Pan [et al.] // *Construction and Building Materials*. – 2021. – Vol. 301. – P. 124084. – DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2021.124084.
5. *Комков К. Ф.* О методике определения модуля объемной упругости и параметров, учитывающих разрыхление и изменение упругости композитов, основанной на тензорно-нелинейных уравнениях // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2019. – № 1. – С. 50–62. – DOI: 10.1134/S0572329919010057. – EDN: YYYNZZ.
6. *Леган М. А., Мирошниченко А. В.* Моделирование деформирования разномодульных материалов со структурой в виде застывшей пены // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2022. – Т. 63, 6(376). – С. 191–196. – DOI: 10.15372/PMTF20220621. – EDN: IRTNXD.
7. *Maslov V. P., Mosolov P. P.* General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1985. – Vol. 49, no. 3. – P. 322–336. – DOI: 10.1016/0021-8928(85)90031-0. – EDN: ММНВФ.
8. *Мясников В. П., Олейников А. И.* Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. – Владивосток : Дальнаука, 2007. – 172 с.
9. *Dudko O. V., Lapteva A. A., Ragozina V. E.* Evolution of the Wave Pattern for Piecewise Linear Uniaxial Tension and Compression of a Heteromodular Elastic Bar // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2022. – Vol. 16, no. 4. – P. 645–658. – DOI: 10.1134/S1990478922040068. – EDN: WVTUII.
10. *Dudko O. V., Lapteva A. A., Ragozina V. E.* Interaction of plane strain waves in a heteromodular elastic half-space at the stage of forced stopping of its boundary after uniaxial tension-compression // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2023. – Vol. 17, no. 4. – P. 710–723. – DOI: 10.1134/S1990478923040038. – EDN: FVQKIZ.
11. *Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V.* Wave propagation in continuous bimodular media // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2021. – DOI: 10.1080/15376494.2021.1889725. – EDN: RCZEPP.
12. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны в упругих средах. – Москва : Московский лицей, 1998. – 412 с.
13. *Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т.* О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // *Дальневосточный математический журнал*. – 2005. – Т. 6, № 1/2. – С. 94–105. – EDN: NAWEAZ.
14. *Gavrilov S. N., Herman G. C.* Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // *Journal of Sound and Vibration*. –

2012. – Vol. 331, no. 20. – P. 4464–4480. – DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.022. – EDN: NQMPOQ.

## REFERENCES

1. *Baklashov I. V., Kartoziya B. A.* Mekhanika gornyx porod [Mechanics of Rocks]. – Moscow : Nedra, 1975. – 271 p. – (in Russian).
2. *Bugrov A. K., Golubev A. I.* Anizotropnye grunty i osnovaniya sooruzheniy [Anisotropic soils and foundations of structures]. – Saint Petersburg : Nedra, 1993. – 245 p. – (in Russian).
3. *Hong H., Baranger T. N.* Identification of Bimodular Material Parameters via a Semi-Closed Form Solution of the Brazilian Test // *Experimental Mechanics*. – 2024. – DOI: 10.1007/s11340-024-01058-w.
4. Mechanical analysis of asphalt pavement based on bimodulus elasticity theory / Q. Pan [et al.] // *Construction and Building Materials*. – 2021. – Vol. 301. – P. 124084. – DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2021.124084.
5. *Komkov K. F.* Development of the Method for Determining the Modulus of Bulk Elasticity and Parameters Taking Into Account the Loosening and Changing of the Elasticity of Composites by Using the Tensor-Nonlinear Equations // *Mechanics of Solids*. – 2019. – Vol. 54, no. 1. – P. 39–49. – DOI: 10.3103/S0025654419010035. – EDN: QOUMAQ.
6. *Legan M. A., Miroshnichenko A. V.* Modeling the deformation of multimodulus materials with a solidified foam structure // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2022. – Vol. 63, no. 6. – P. 1073–1077. – DOI: 10.1134/S0021894422060219. – EDN: WOGFTZ.
7. *Maslov V. P., Mosolov P. P.* General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1985. – Vol. 49, no. 3. – P. 322–336. – DOI: 10.1016/0021-8928(85)90031-0. – EDN: MMIHBF.
8. *Myasnikov V. P., Oleinikov A. I.* Osnovy mekhaniki geterogenno-soprotivlyayushchikhsya sred [Fundamentals of mechanics of heterogeneously resisting media]. – Vladivostok : Dal'nauka, 2007. – 172 p. – (in Russian).
9. *Dudko O. V., Lapteva A. A., Ragozina V. E.* Evolution of the Wave Pattern for Piecewise Linear Uniaxial Tension and Compression of a Heteromodular Elastic Bar // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2022. – Vol. 16, no. 4. – P. 645–658. – DOI: 10.1134/S1990478922040068. – EDN: WVTUII.
10. *Dudko O. V., Lapteva A. A., Ragozina V. E.* Interaction of plane strain waves in a heteromodular elastic half-space at the stage of forced stopping of its boundary after uniaxial tension-compression // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2023. – Vol. 17, no. 4. – P. 710–723. – DOI: 10.1134/S1990478923040038. – EDN: FVQKIZ.
11. *Kuznetsova M., Khudiyakov M., Sadovskii V.* Wave propagation in continuous bimodular media // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2021. – DOI: 10.1080/15376494.2021.1889725. – EDN: RCZEPP.
12. *Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I.* Nonlinear Waves in Elastic Media. – Boca Raton : CRC Press, 1995. – 256 p.

13. *Dudko O. V., Lapteva A. A., Semyonov K. T.* About Distribution of Flat One-Dimensional Waves and Their Interaction with Barrier in the Media Differently Reacting to a Stretching and Compression // Far Eastern Mathematical Journal. – 2005. – Vol. 6, no. 1/2. – P. 94–105. – EDN: NAWEAZ. – (in Russian).
14. *Gavrilov S. N., Herman G. C.* Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // Journal of Sound and Vibration. – 2012. – Vol. 331, no. 20. – P. 4464–4480. – DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.022. – EDN: NQMPQQ.

Л. Г. Карьев<sup>1</sup>, В. А. Федоров<sup>1</sup>, А. В. Лановая<sup>2</sup>

## К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

<sup>1</sup> Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина,  
Тамбов, Россия

<sup>2</sup> Московский государственный университет технологий и управления имени  
К. Г. Разумовского, Москва, Россия

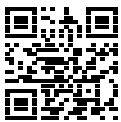
**Аннотация.** Предложен метод определения сумм тригонометрических рядов, основанный на сопоставлении механического состояния нагруженного стержня и функции  $u(x, t)$  – перемещения поперечных плоскостей последнего, аргументами которой являются время  $t$  и координата  $x$  стержня. Функция  $u(x, t)$  является, в свою очередь, решением дифференциального уравнения (метод Фурье), описывающего механическое состояние тела в условиях воздействия на него внешних сил. Найдены суммы семи тригонометрических рядов, которые могут найти свое применение при решении задач физико-математических и технических дисциплин. Полученные результаты в расширенном справочнике не наблюдаются.

**Ключевые слова:** метод, тригонометрический ряд, стержень, сила, деформация, функция, сопоставление, дифференциальное уравнение, сумма ряда.

**Карьев Леонид Геннадьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры профильной довузовской подготовки; e-mail: karyev@list.ru; AuthorID: 12849

**Федоров Виктор Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики; e-mail: fedorov-tsu.tmb@inbox.ru; AuthorID: 12852

**Лановая Анна Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики; e-mail: ivm-tstu@mail.ru; AuthorID: 749548



**для цитирования:** Карьев Л. Г., Федоров В. А., Лановая А. В. К вопросу о сходимости тригонометрических рядов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.006. EDN: OPGRZF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).



L. G. Karyev<sup>1</sup>, V. A. Fedorov<sup>1</sup>, A. V. Lanovaya<sup>2</sup>

## ON THE QUESTION OF CONVERGENCE OF TRIGONOMETRIC SERIES

<sup>1</sup>Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, Russia

<sup>2</sup>Moscow State University of Technology and Management named after  
K. G. Razumovsky, Moscow, Russia

**Abstract.** A method is proposed for determining the sums of trigonometric series based on a comparison of the mechanical state of a loaded rod and the function  $u(x, t)$  – the displacement of the transverse planes of the latter, the arguments of which are time  $t$  and the  $x$  coordinate of the rod. The function  $u(x, t)$  is, in turn, a solution to a differential equation that describes the mechanical state of a body under the influence of external forces. The results obtained are not observed in the extended reference book.

**Keywords:** method, trigonometric series, rod, force, deformation, function, comparison, differential equation, sum of series.

**Leonid G. Karyev**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: karyev@list.ru; AuthorID: 12849

**Victor A. Fedorov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: fedorov-tsu.tmb@inbox.ru; AuthorID: 12852

**Anna V. Lanovaya**, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor; e-mail: ivm-tstu@mail.ru; AuthorID: 749548



**to cite this article:** Karyev L. G., Fedorov V. A., Lanovaya A. V. On the question of convergence of trigonometric series // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.006

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

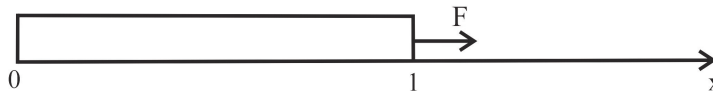
**Введение.** Вопросы сходимости функциональных рядов к соответствующим функциям и, обратная задача, – разложение функций в ряд, актуальны, т.к. являются основой одной из важнейших областей математики методов решения задач в области математических и физических дисциплин – теории решения дифференциальных уравнений [1–3].

С другой стороны, даже будучи уверенным в том, что исследуемый функциональный ряд является сходящимся, аналитически определить функцию к которой он сходится далеко не всегда является простой задачей. Однако, отметим следующее. Решая задачи механики и техники методами математической физики, можно аналитически определить состояние, например, нагруженного тела в любой момент времени и в любой его точке, т.е. решение задачи проходит в векторе “математика → физика”. Но если в этой ситуации изменить направление вектора исследования, т.е. зная состояние системы в определенной области нагруженного тела и в известные интервалы времени, и зная функцию, которая описывает это состояние решить полученное уравнение относительно тригонометрического ряда, (если дифференциальное уравнение, описывающее состояние механической системы, решается методом Фурье), то найдем функцию (или число) к которой сходится тригонометрический ряд, т.е. меняем вектор исследования на противоположный [4].

Цель работы – показать метод определения сумм тригонометрических рядов, способом сопоставления физического анализа состояния нагруженного тела и функции, описывающей это состояние, т.е. проводя исследования в направлении “физика → математика”.

**1. Результаты и обсуждение.** Приведем несколько примеров, на которых будет показана сущность этого метода.

1. Рассмотрим покоящийся стержень постоянного поперечного сечения цилиндрической формы, концы которого не закреплены. Материал стержня однородный и подчиняется закону Гука. Направим ось  $x$  по оси стержня. Пусть на правый торец стержня внезапно начинает действовать постоянная сила  $F$  равномерно распределенная по поверхности торца стержня и направленная вдоль оси  $x$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Упругий стержень, движущийся в условиях внезапно приложенной силы, направленной вдоль его оси

Функция продольных перемещений поперечных плоскостей стержня,  $u(x, t)$  в этих условиях удовлетворяет дифференциальному уравнению [4–8]:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{F \delta(x - l)}{\rho S},$$

при этом начальные условия:

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

граничные условия:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0.$$

Здесь,  $\rho$  – плотность вещества стержня,  $S$  – площадь поперечного сечения,  $l$  – длина недеформированного стержня,  $c$  – скорость звука в стержне,  $t \geq 0$  – текущее от начала воздействия силы время,  $x$  – координата точки на оси стержня,  $\delta(x - l)$  – дельта-функция.

Искомая функция  $u(x, t)$  выражается тригонометрическим рядом [4–8]:

$$u(x, t) = \frac{Ft^2}{2\rho sl} + \frac{2Fl}{\rho sc^2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \left(1 - \cos\frac{mc\pi t}{l}\right) . \quad (1)$$

Рассматривая ряд (1) (с учетом элементарных тригонометрических преобразований) замечаем, что, исходя из физических соображений должно выполняться равенство  $u(x, t) = 0$ , на интервалах

$$0 \leq t \leq \frac{l-x}{c} \quad \text{и} \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

т.е., те поперечные плоскости стержня до которых не дошла механическая волна и та плоскость с координатой  $x$  до которой волна дошла на данный момент времени  $t$  от начала воздействия на стержень приложенной к его торцу силы не перемещаются, следовательно

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \sin^2 \frac{mc\pi t}{2l} \cos \frac{m\pi x}{l} = -\frac{(c\pi t)^2}{8l^2}.$$

Пусть

$$\frac{c\pi t}{2l} = \alpha, \quad \frac{\pi x}{l} = \beta, \quad \text{тогда} \quad \frac{(c\pi t)^2}{8l^2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

С учетом (2) получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \sin^2 m\alpha \cos m\beta = -\frac{\alpha^2}{2} \quad (3)$$

при выполнении условий

$$0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi - \beta}{2}. \quad (4)$$

Равенство (3) есть сумма ряда в указанных интервалах (4).

Очевидно, этот же участок стержня до которого не дошел волновой процесс от начала воздействия силы на торец стержня, на данный момент времени  $t$  не деформирован (однако, в данном случае, та плоскость до которой дошел

волновой процесс будет деформированной, т.е. эта плоскость к данному участку не относится) т.е. должно выполняться равенство

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{4F}{\rho S \pi c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin^2 \frac{m c \pi t}{2l} \sin \frac{m \pi x}{l} = 0$$

в интервалах

$$0 \leq t < \frac{l-x}{c} \quad \text{и} \quad 0 \leq x \leq l,$$

где  $\varepsilon(x, t)$  – относительная деформация стержня. Тогда получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin^2 \frac{m c \pi t}{2l} \sin \frac{m \pi x}{l} = 0,$$

или, с учетом введенных переменных  $\alpha$  и  $\beta$  и сказанного выше

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin^2 m \alpha \sin m \beta = 0 \quad (5)$$

в интервалах

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi - \beta}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq \beta \leq \pi. \quad (6)$$

Таким образом, ряд (5) сходится к нулю в интервалах (6).

Рассматривая эту же физическую задачу замечаем, что скорость движения плоскостей стержня в интервалах (2) будет равна нулю, т.е.

$$V(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{Ft}{\rho S l} + \frac{2F}{\rho S c \pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin \frac{m c \pi t}{l} \cos \frac{m \pi x}{l} = 0.$$

Следовательно, на интервалах (2) получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin \frac{m c \pi t}{l} \cos \frac{m \pi x}{l} = -\frac{c \pi t}{2l}.$$

Введя переменные

$$\gamma = \frac{c \pi t}{l} \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{\pi x}{l}, \quad (\text{тогда} \quad \frac{\gamma}{2} = \frac{c \pi t}{2l})$$

окончательно получаем с учетом условий (2)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m \gamma \cos m \sigma = -\frac{\gamma}{2}, \quad (7)$$

в интервалах

$$0 \leq \sigma \leq \pi \quad \text{и} \quad 0 \leq \gamma \leq \pi - \sigma. \quad (8)$$

В связи с этой же задачей, можно показать, что абсолютная деформация стержня  $\Delta l(t)$  в интервале времени

$$0 \leq t \leq \frac{l}{c}$$

равна [9]

$$\Delta l(t) = \frac{Ft}{\rho sc},$$

тогда, исходя из физического смысла задачи, в этом интервале должно выполняться равенство

$$u(l, t) = \Delta l(t),$$

или

$$\frac{Ft^2}{2\rho sl} + \frac{4Fl}{\rho sc^2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \sin^2 \frac{mc\pi t}{2l} \cos m\pi = \frac{Ft}{\rho sc}.$$

Т.к.  $\cos m\pi = \mp 1$  при  $m = 1, 2, 3, \dots$ , то

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2 \frac{mc\pi t}{2l} = -\frac{(c\pi t)^2}{8l^2} + \frac{\pi^2 ct}{4l}.$$

Пусть, как и выше,

$$\frac{c\pi t}{2l} = \alpha, \quad \text{тогда} \quad \frac{(c\pi t)^2}{8l^2} = \frac{\alpha^2}{2}, \quad \frac{c\pi^2 t}{4l} = \frac{\pi\alpha}{2}$$

и этот ряд можно записать

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2 m\alpha = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2} \quad (9)$$

в интервале

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

2. Рассмотрим второй пример. Аналогично рис. 1, но на левый торец стержня ( $x = 0$ ) внезапно действует продольная сила  $F = Pt$ , равномерно распределенная по торцу стержня, где  $P$  постоянный коэффициент. Найти закон смещения поперечных плоскостей стержня.

Решением этой задачи является функция [4–7]

$$u(x, t) = \frac{Pt^3}{6\rho Sl} + \frac{2Pl}{\rho Sc^2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{l} \left( t - \frac{l}{m\pi c} \sin \frac{m\pi t}{l} \right).$$

В этом случае, как и выше, те плоскости с координатой  $x$  до которых к моменту времени  $t$  не дошла волна от начала действия силы на левый торец стержня (включая ту плоскость до которой волна дошла) не перемещаются, следовательно

$$u(x, t) = 0$$

в интервалах

$$0 \leq t \leq \frac{x}{c} \quad \text{и} \quad 0 \leq x \leq l, \quad (10)$$

т.е. должно выполняться равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{l} \left( t - \frac{l}{m\pi c} \sin \frac{m\pi t}{l} \right) = -\frac{c^2\pi^2 t^3}{12l^2}. \quad (11)$$

Обозначим

$$y = \frac{\pi x}{l}, \quad z = \frac{c\pi t}{l},$$

тогда

$$\frac{c^2\pi^2 t^3}{12l^2} = \frac{tz^2}{12}$$

и равенство (11) преобразуется в равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos my \left( t - \frac{t}{mz} \sin mz \right) = -\frac{tz^2}{12},$$

вынося  $t$  за скобку и проведя сокращение окончательно получаем сумму ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos my \left( 1 - \frac{1}{mz} \sin mz \right) = -\frac{z^2}{12} \quad (12)$$

в интервалах  $0 \leq y \leq \pi$ ,  $0 \leq z \leq y$ .

В свою очередь, и деформация стержня  $\varepsilon(x, t)$  в интервалах  $0 \leq t < \frac{x}{c}$  и  $0 \leq x \leq l$  равна нулю, следовательно

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{2P}{\rho S \pi c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{l} \left( \frac{l}{m\pi c} \sin \frac{m\pi t}{l} - t \right) = 0.$$

Пусть, как и выше,

$$y = \frac{\pi x}{l}, \quad z = \frac{c\pi t}{l},$$

тогда окончательно получаем сумму ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin my \left( \frac{1}{mz} \sin mz - 1 \right) = 0 \quad (13)$$

в интервалах  $0 \leq y \leq \pi$ ,  $0 \leq z < y$ .

Также, и скорость плоскостей стержня с координатой  $x$  до которых не дошла волна к моменту времени  $t$  от начала воздействия силы на левый торец стержня равна нулю, т. е. на интервалах (10) справедливо равенство

$$v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{3pt^2}{6\rho Sl} + \frac{2pl}{\rho S c^2 \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{l} \left( 1 - \cos \frac{m\pi t}{l} \right) = 0,$$

тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{l} \left( 1 - \cos \frac{m\pi t}{l} \right) = -\left( \frac{c\pi t}{2l} \right)^2.$$

С учетом введенных выше переменных  $y$  и  $z$  получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos my (1 - \cos mz) = -\frac{z^2}{4} \quad (14)$$

в интервалах  $0 \leq y \leq \pi$ ,  $0 \leq z \leq y$ .

Таким образом, найдены функции, к которым сходятся ряды (3), (5), (7), (9), (12), (13), (14) в соответствующих интервалах

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \sin^2 m\alpha \cos m\beta = -\frac{\alpha^2}{2}, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi - \beta}{2};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin^2 m\alpha \sin m\beta = 0, \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi - \beta}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq \beta \leq \pi;$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m\gamma \cos m\sigma = -\frac{\gamma}{2}, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi \quad \text{и} \quad 0 \leq \gamma \leq \pi - \sigma;$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2 m\alpha = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos my \left( 1 - \frac{1}{mz} \sin mz \right) = -\frac{z^2}{12}, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq y;$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin my \left( \frac{1}{mz} \sin mz - 1 \right) = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq z < y;$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos my (1 - \cos mz) = -\frac{z^2}{4}, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq y.$$

Анализируя каждый ряд в отдельности можно расширить область сходимости рядов. Поэтому на данном этапе правильнее было бы сказать, что данные ряды сходятся, хотя бы, в отмеченных интервалах. Заметим, что доказывать правильность найденных сумм рядов в соответствующих интервалах нет необходимости, т.к. 1) метод Фурье решения дифференциальных уравнений известен и доказан [3, 4, 8] 2) физический анализ состояния механической системы, проведенный в каждой задаче, в соответствующих интервалах координат и времени достаточно тривиален и не требует дополнительных комментариев. Очевидно, предложенный способ нахождения сумм тригонометрических рядов, можно использовать и в других задачах математической физики. Ряды (5) и (12) сходящиеся к нулю, по своему, интересны и могут найти свое применение в математике.

Найденные суммы рядов (3), (5), (7), (9), (12), (13), (14) в расширенном справочнике [10], не обнаружены, т.е. найденные суммы являются новыми результатами.

**2. Заключение.** Предложен метод нахождения сумм тригонометрических рядов посредством сопоставления физического анализа состояния нагруженного тела и функции  $u(x, t)$ , описывающей это состояние. Суть метода заключается 1) в решении уравнения одна часть которого есть функция, описывающая состояние механической системы –  $u(x, t)$ ,  $\varepsilon(x, t)$  или  $v(x, t)$  (в ней содержится

тригонометрический ряд), а другая часть – есть конкретное число или, некоторая, другая функция, обусловленные состоянием механической системы на соответствующих интервалах координат и времени, 2) введением новых переменных и определением координатных и временных интервалов им соответствующих.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Вклад авторов равноценен.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** The authors' contributions are equal.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Фихтенгольц Г.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 3 : Учебное пособие. – Москва : Наука, 1970. – 656 с.
2. *Зельдович Я., Мышкис А.* Элементы прикладной математики : Учебное пособие. – Санкт-Петербург : Лань, 2002. – 592 с.
3. *Натансон И.* Краткий курс высшей математики : Учебное пособие. – Санкт-Петербург : Лань, 2001. – 736 с.
4. *Тимошенко С., Янг Д., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 1985. – 474 с.
5. *Светлицкий В.* Задачи и примеры по теории колебаний : Учебное пособие. Ч. 2. – Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 264 с.
6. *Анофрикова Н.* Колебания упругих стержней : Часть 1: Учебное пособие для студентов механико-математического факультета СГУ. – Саратов, 2014. – 45 с.
7. *Тимошенко С., Гудьер Д.* Теория упругости. – Москва : Наука, 1975. – 576 с.
8. *Кошляков Н., Глинер Э., Смирнов М.* Уравнения в частных производных математической физики : Учебное пособие. – Москва : Высшая школа, 1970. – 720 с.
9. *Карыев Л., Федоров В.* Деформация упругого стержня в условиях приложенной к нему продольной силы // Вестник ТГТУ. Машиностроение. Металлообработка. – 2024. – Т. 30, № 2. – С. 339–345.
10. *Прудников А., Брычков Ю., Маричев О.* Интегралы и ряды. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 797 с.

### REFERENCES

1. *Fichtenholts G.* Course of differential and integral calculus, volume 3 : Textbook. – Moscow : Science, 1970. – 656 p.
2. *Zeldovich Y., Myshkis A.* Elements of applied mathematics : Textbook. – St. Petersburg : Lan Publishing House, 2002. – 592 p.



3. *Natanson I.* A short course in higher mathematics : The textbook. – St. Petersburg : Lan, 2001. – 736 p.
4. *Timoshenko S., Yang D., Weaver W.* Fluctuations in engineering. – Moscow : FIZMATLIT Publishing House, 1985. – 474 p.
5. *Svetlitsky V.* Problems and examples in the theory of oscillations : Textbook. Part 2. – Moscow : Publishing House of Bauman Moscow State Technical University, 1998. – 264 p.
6. *Anofrikova N.* Vibrations of elastic rods : Part 1: Textbook for students of the Faculty of Mechanics and Mathematics of SSU. – Saratov, 2014. – 45 p.
7. *Timoshenko S., Goodyear J.* Theory of elasticity. – Moscow : Science, 1975. – 576 p.
8. *Koshlyakov N., Gleaner E., Smirnov M.* Partial differential equations of mathematical physics : Textbook. – Moscow : Higher school, 1970. – 720 p.
9. *Karyev L., Fedorov V.* Deformation of an elastic rod under conditions of longitudinal force applied to it // Bulletin of TSTU. Mechanical engineering. Metalworking. – 2024. – Vol. 30, no. 2. – P. 339–345.
10. *Prudnikov A., Brychkov Y., Marichev O.* Integrals and series. – Moscow : Nauka. The main editorial office of the physico-mathematical literature, 1981. – 797 p.

В. В. Акимова, М. А. Бударина, Т. Ю. Нефедова, Д. В. Иванов

## ОБ ОЦЕНКЕ МЕЖЭКСПЕРТНОЙ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОДНООСНОМУ СЖАТИЮ ОБРАЗЦОВ ГУБЧАТОЙ КОСТИ

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,  
Саратов, Россия*

**Аннотация.** Эффективный модуль упругости представляет собой ключевой параметр, который характеризует жесткость материала и его способность противостоять деформациям. Известно, что модуль упругости кости сильно коррелирует с ее структурными характеристиками, такими как минеральная плотность и пористость. Множество исследовательских групп сосредоточено на изучении упругих свойств губчатой кости с использованием одноосных экспериментов по сжатию. Учитывая сложности, связанные с проведением натуральных экспериментов на человеческих костях, исследование механических свойств губчатой кости часто осуществляется на образцах крупного рогатого скота. Следует отметить, что получаемые разными экспертами и научными группами результаты могут значительно варьироваться, что подчеркивает необходимость анализа межэкспертной и межлабораторной надежности таких исследований. В данной работе проведено исследование межэкспертной надежности при вычислении эффективного модуля упругости губчатой кости крупного рогатого скота и при построении регрессионных зависимостей, связывающих его со структурными свойствами. Для этого проведен ряд экспериментов по одноосному сжатию образцов губчатой кости, а также определены объемная, минеральная плотность и пористость исследованных образцов. Вычисление модулей упругости, оценка структурных свойств кости выполнены разными экспертами. В результате анализа результатов нам удалось получить достаточно высокие показатели надежности расчета разными экспертами эффективного модуля упругости костной ткани и построения ими зависимостей данного показателя от структурных свойств кости (пористость, минеральная плотность, объемная плотность).

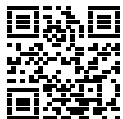
**Ключевые слова:** эффективный модуль упругости, пористость кости, минеральная плотность кости, межэкспертная надежность, одноосное сжатие.

**Акимова Виктория Владимировна**, студентка 3 курса факультета фундаментальной медицины и медицинских технологий; e-mail: viktoriaakimova507@gmail.com; <https://orcid.org/0009-0008-1667-1665>

**Бударина Мария Алексеевна**, студентка 3 курса факультета фундаментальной медицины и медицинских технологий; e-mail: mbudarina058@gmail.com; <https://orcid.org/0009-0008-6900-9148>

**Нефедова Татьяна Юрьевна**, студентка 3 курса факультета фундаментальной медицины и медицинских технологий; e-mail: nefedovaty@gmail.com; <https://orcid.org/0009-0005-9429-8198>

**Иванов Дмитрий Валерьевич**, доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник учебной лаборатории цифровых медицинских технологий; e-mail: ivanovdv.84@ya.ru; <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>; AuthorID: 201794



**для цитирования:** Акимова В. В., Бударина М. А., Нефедова Т. Ю., Иванов Д. В., Об оценке межэкспертной надежности при обработке результатов экспериментов по одноосному сжатию образцов губчатой кости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 128–142. DOI: 10.37972/chgru.2025.64.2.008. EDN: FUAQDQ

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

V. V. Akimova, M. A. Budarina, T. Yu. Nefedova, D. V. Ivanov

## ON ESTIMATION OF INTER-EXAMINER RELIABILITY IN PROCESSING THE RESULTS OF UNIAXIAL COMPRESSION EXPERIMENTS ON SPONGY BONE SPECIMENS

*N.G. Chernyshevsky Saratov State University, Saratov, Russia*

**Abstract.** The effective modulus of elasticity is a key parameter that characterizes the stiffness of a material and its ability to resist deformation. It is known that the modulus of elasticity of bone is strongly correlated with its structural characteristics, such as mineral density and porosity. Many research groups have focused on studying the elastic properties of cancellous bone using uniaxial compression experiments. Given the difficulties associated with conducting in-situ experiments on human bones, studies of the mechanical properties of cancellous bone are often performed on bovine specimens. It should be noted that the results obtained by different experts and scientific groups can vary significantly, which emphasizes the need to analyze the interexpert and interlaboratory reliability of such studies. In this paper, the study of inter-expert reliability in calculating the effective modulus of elasticity of bovine cancellous bone and in constructing regression relationships linking it to structural properties is carried out. For this purpose, a number of experiments on uniaxial compression of spongy bone samples were carried out, and the volume, mineral density and porosity of the studied samples were determined. Calculation of elasticity moduli and assessment of bone structural properties were performed by different experts. As a result of analyzing the results, we were able to obtain sufficiently high reliability values for the calculation of the effective modulus of elasticity of bone tissue by different experts and their construction of dependencies of this index on the structural properties of bone (porosity, mineral density, bulk density).

**Keywords:** effective elastic modulus, bone porosity, bone mineral density, interexpert reliability, uniaxial compression.

**Victoria V. Akimova**, 3rd year student of the Faculty of Fundamental Medicine and Medical Technologies; e-mail: viktoriaakimova507@gmail.com;  
<https://orcid.org/0009-0008-1667-1665>

**Maria A. Budarina**, 3rd year student of the Faculty of Fundamental Medicine and Medical Technologies; e-mail: mbudarina058@gmail.com;  
<https://orcid.org/0009-0008-6900-9148>

**Tatiana Yu. Nefedova**, 3rd year student of the Faculty of Fundamental Medicine and Medical Technologies; e-mail: viktoriaakimova507@gmail.com;  
<https://orcid.org/0009-0008-1667-1665>

**Dmitry V. Ivanov**, Leading Researcher at the Educational Laboratory of Digital Medical Technologies; e-mail: ivanovdv.84@ya.ru;  
<https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>; AuthorID: 201794



**to cite this article:** Akimova V. V., Budarina M. A., Nefedova T. Yu., Ivanov D. V  
On estimation of inter-examiner reliability in processing the results of uniaxial  
compression experiments on spongy bone specimens // Vestn. Chuvash. Gos.  
Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 128–142.  
DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.008

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** Для достижения высокой степени достоверности в компьютерном моделировании реальных биомедицинских процессов крайне важно точно определять физико-механические свойства исследуемых материалов, например, костной ткани [1–4]. Композиционное строение кости обеспечивает ей необходимые механические характеристики, включая твёрдость, упругость и прочность. Механические свойства материала отражают его способность сопротивляться воздействию различных внешних воздействий. Одним из ключевых параметров механических свойств является эффективный модуль упругости, который характеризует жесткость материала и его способность противостоять изменениям формы и размеров. Эффективный модуль упругости костной ткани зависит от ее структурных характеристик, таких как минеральная плотность (МПК) [1, 2, 5]. Исследования показывают, что увеличение МПК приводит к повышению модуля упругости, что делает кость более прочной и менее хрупкой.

Многие научные группы проводят исследования упругих свойств губчатой кости, используя одноосные эксперименты по сжатию [6–9]. Это позволяет получить важные данные о поведении губчатой кости под нагрузкой и способствует лучшему пониманию ее механических свойств. Следует отметить, что расчет эффективного модуля упругости по стержневой теории (при одноосном сжатии) может быть выполнен только для «длинных» образцов, отношение высоты которых к размерам их поперечного сечения должно быть не менее 5 к 1 [6].

Так как натурные эксперименты с человеческими костями затруднены, многие авторы исследуют механические свойства губчатой кости крупного рогатого скота, полагая, что костная ткань животных и человека имеет схожий состав и структуру [10, 11].

Нужно отметить, что при вычислении модуля упругости губчатой костной ткани разными экспертами результаты могут отличаться. Чтобы оценить влияние человеческого фактора на точность вычислений, проводят анализ межэкспертной и межлабораторной надежности. Межэкспертная надежность – это степень согласованности результатов, полученных разными экспертами при анализе одних и тех же данных. А межлабораторная надежность – это степень согласованности результатов, полученных в разных лабораториях при использовании одних и тех же методов. Различия в оборудовании, методах и условиях проведения экспериментов могут привести к вариативности результатов.

Цель работы – оценить межэкспертную надежность при оценке модуля упругости губчатой кости по результатам одноосных экспериментах по сжатию и при получении зависимостей между структурными и механическими свойствами губчатой кости.

## 1. Материалы и методы.

*1.1. Подготовка образцов.* Одноосному сжатию подвергали образцы губчатой кости коленного сустава крупного рогатого скота. Возраст животных на момент забоя составлял 18 месяцев. Срок от момента забоя до проведения экспериментальных исследований не превышал суток. Кости коленных суставов приобретались на продовольственном рынке.

Образцы имели форму прямоугольных параллелепипедов и изготавливались с использованием ручной ножовки по металлу. Каждый образец дорабатывали наждачной бумагой для придания правильной формы. Длина и ширина (глубина) образцов варьировались в диапазоне от 5 мм до 7 мм, тогда как высота изменялась в пределах от 35 до 40 мм. Относительная высота, определяемая как отношение высоты образца к среднему значению его ширины и глубины, находилась в диапазоне от 5 до 7 единиц [6]. Измерение геометрических параметров образцов осуществлялось с использованием цифрового штангенциркуля Mitutoyo (точность до 0.01 мм). Перед сжатием каждый образец взвешивался на весах Ohaus aх5202 (точность 0.01 г).

*1.2. Оценка механических и структурных свойств кости.* Объемная плотность образцов вычислялась по формуле:

$$BVD = \frac{m_{wet}}{V_{wet}}. \quad (1)$$

где  $m_{wet}$  – масса образца до сжигания (г),  $V_{wet}$  – объем образца до эксперимента ( $cm^3$ ).

Каждый образец подвергался одноосному сжатию на универсальной испытательной машине Instron 3342, оснащенной нагрузочной ячейкой 500 Н. Процесс сжатия осуществлялся с постоянной скоростью 2 мм/мин при температуре окружающей среды, равной 20°C. Перед началом сжатия каждый образец предварительно нагружался силой величиной 10 Н [9]. Эффективный модуль упругости определялся по линейному участку на диаграмме сжатия (рисунок 1) по формуле

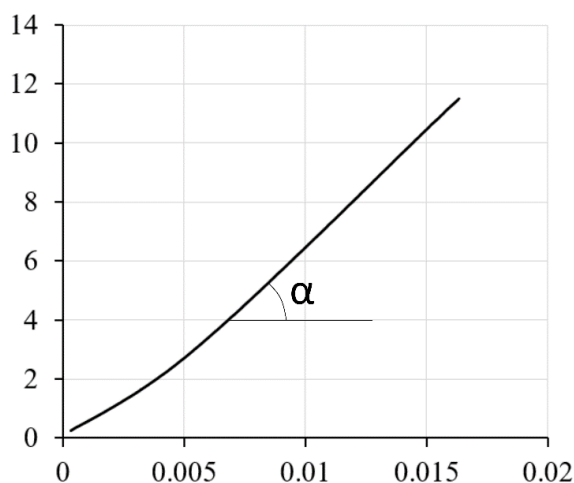
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = tg\alpha \quad (2)$$

где  $E$  – эффективный модуль упругости (Па),  $\sigma$  – напряжение (МПа),  $\epsilon$  – относительная деформация (мм/мм),  $\alpha$  – угол наклона касательной к графику зависимости напряжения ( $\sigma$ ) от деформации ( $\epsilon$ ) в области упругой деформации.

После сжатия каждый образец сжигался в муфельной печи при температуре 600 градусов Цельсия в течение 3 часов для удаления органических соединений [12]. Далее образцы снова взвешивались и определялась их минеральная плотность по формуле:

$$BMD = \frac{m_{adh}}{V_{wet}}. \quad (3)$$

где  $m_{ash}$  – масса образца после сжигания (г),  $V_{wet}$  – объем образца до эксперимента ( $cm^3$ ).



**Рис. 1.** Типичная диаграмма сжатия:  $\sigma$  – напряжение при сжатии в МПа (по вертикали),  $\epsilon$  – относительная деформация (по горизонтали)

Для оценки пористости определялся объем пор в образце после сжигания посредством измерения объема вытесняемого им этилового спирта из мерного цилиндра (объемом 5 мл первого класса точности с ценой деления 0.1 мл) [12]. Пористость кости вычислялась по формуле:

$$\eta = \frac{V_p}{V_{wet}}. \quad (4)$$

где  $V_p$  – объем пор ( $cm^3$ ),  $V_{wet}$  – объем образца ( $cm^3$ ).

*1.3. План экспериментов. 1 тип экспериментов.* Межэкспертное сравнение модулей упругости. Сжатию подвергали 25 образцов. Выполнены построение и сравнительный анализ зависимостей между модулями упругости и пористостью, объемной, а также минеральной плотностью, полученных двумя экспертами.

*2 тип экспериментов.* Сравнение модулей упругости при первичном и повторном сжатиях: при первичном сжатии нагружение осуществлялось в рамках линейного участка. Сжатию подвергали 20 образцов. Оценивались различия в модулях упругости при первичном и повторном сжатиях.

*3 тип экспериментов.* Сравнение модулей упругости свежих и подсушенных образцов. Эксперименты проводились с образцами сразу же после их подготовки и через 7 дней после их подсушивания при комнатной температуре. Сжатию подвергали 16 образцов. Оценивались различия в модулях упругости свежих образцов и после подсушивания.

*1.4. Статистический анализ.*

- (1) Анализ нормальности распределения данных в выборках с использованием теста Шапиро-Уилка. Вычисление описательных статистик.
- (2) Визуализация выборок «диаграммами размаха» в пакете Microsoft Excel.

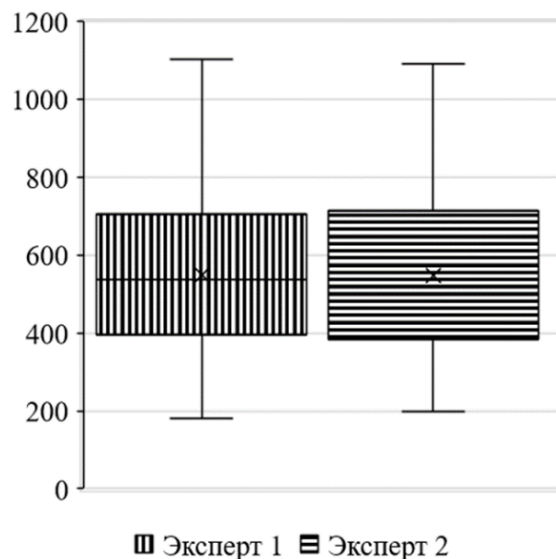


- (3) Сравнение выборок с использованием критерия Манна-Уитни или дисперсионного анализа (ANOVA) в зависимости от распределения данных в выборках.
- (4) Построение регрессионных зависимостей между эффективными модулями упругости структурными свойствами кости и их сравнение с помощью косинусного сходства.

## 2. Результаты.

*2.1. Оценка межэкспертной надежности при вычислении модуля упругости двумя экспертами.* Для оценки межэкспертной надежности проводилось сравнение выборок эффективных модулей упругости, полученных разными экспертами. В связи с тем, что результаты теста Шапиро-Уилка указали на ненормальность распределения, описательные статистики представлены в виде медианы, а также верхнего и нижнего квартилей (таблица 1). Результаты сравнительного анализа межэкспертной надежности иллюстрируются диаграммой, на которой представлены выборки эффективных модулей (рисунок 2).

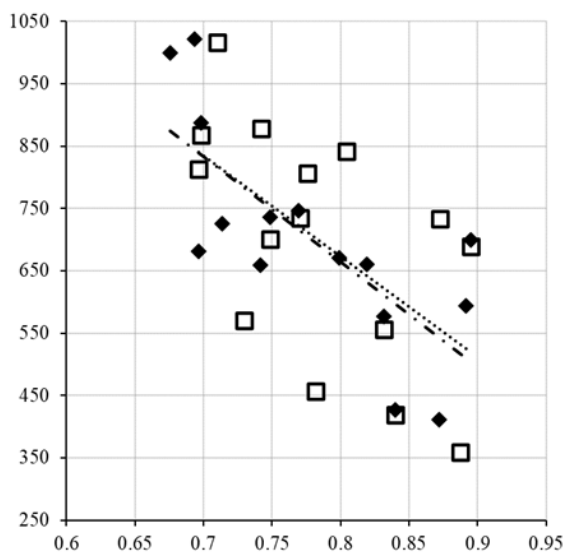
	$Q_1$	Me	$Q_3$
Эксперт 1	397.66	538.63	704.73
Эксперт 2	387.48	517.63	712.88



**Рис. 2.** Диаграмма распределения значений эффективного модуля упругости в выборках, полученных разными экспертами

*2.2. Построение и сравнительный анализ зависимостей между модулями упругости и структурными свойствами губчатой костной ткани.*

2.2.1. *Зависимость модуля упругости от пористости.* Для оценки влияния человеческого фактора на построение зависимостей, провели анализ межэкспертной надежности, в ходе которого сравнивали зависимости, построенные разными экспертами. На рисунке 3 представлены зависимости эффективного модуля упругости ( $E$ ) от пористости ( $\eta$ ).

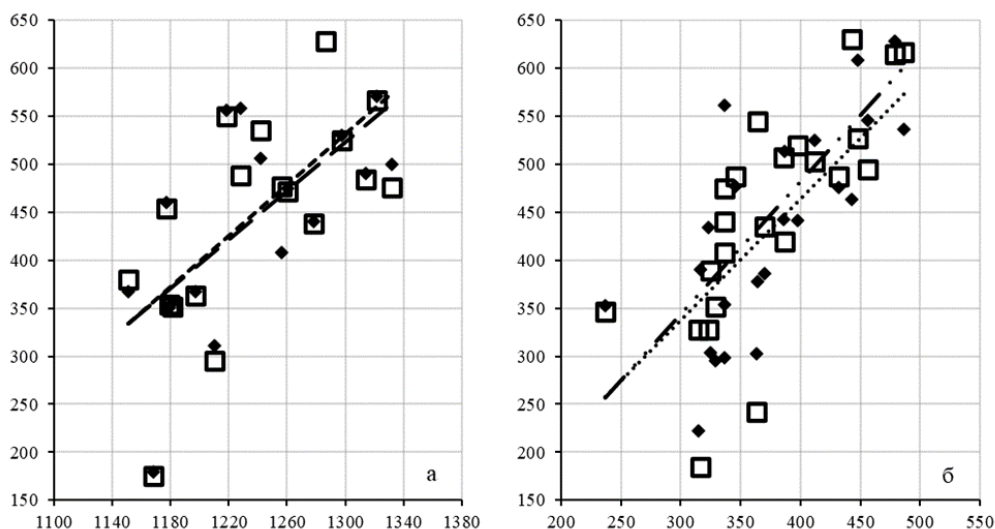


**Рис. 3.** Регрессионные зависимости эффективного модуля упругости ( $E$  в МПа, по вертикали) от пористости ( $\eta$ , по горизонтали): ромбы – эксперт 1 ( $E = -1696.2\eta + 2020.9$ ,  $R^2 = 0.56$ ); пустые квадраты – эксперт 2 ( $E = -1902.5\eta + 2185.7$ ,  $R^2 = 0.41$ )

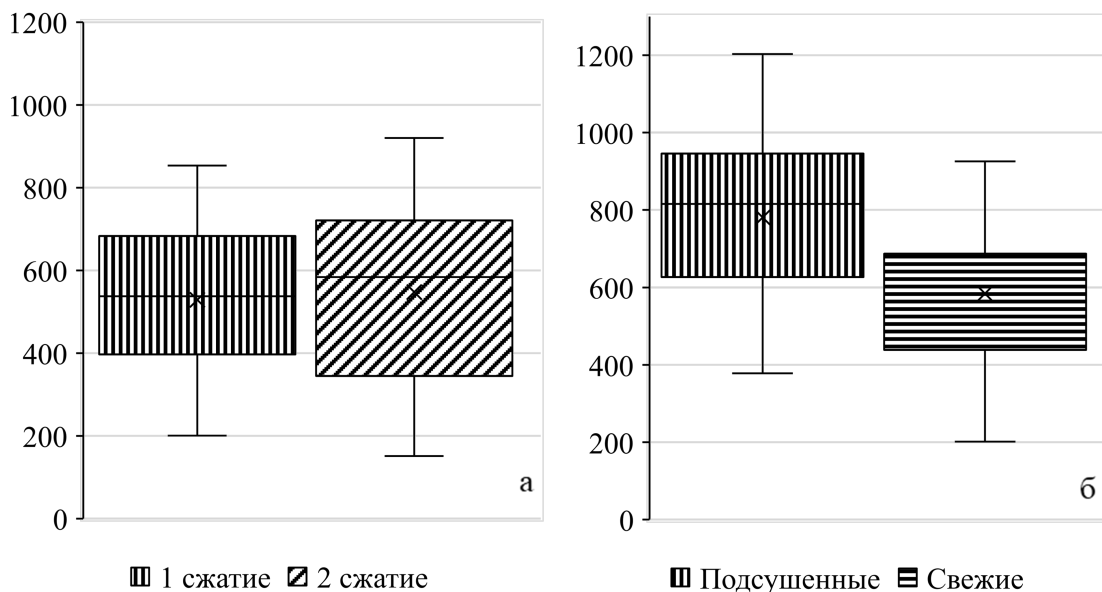
2.2.2. *Зависимости модуля упругости от объемной и минеральной плотности.* Обои экспертами были построены зависимости эффективного модуля упругости от объемной плотности ( $BVD$ ) и от минеральной плотности ( $BMD$ ), показанные на рисунке 4.

Для строгого сравнения полученных зависимостей использовался метод косинусного сходства. Этот метод позволяет определить, насколько векторы (точки) сравниваемых графиков ориентированы в одном направлении. Результаты косинусного сходства между зависимостями, изображенными на рисунках 3 и 4 представлены в таблице 2.

2.3. *Результаты экспериментов 2 и 3 типа (дополнительные эксперименты)*  
 Описательные статистики для выборок, полученных в ходе экспериментов по повторному сжатию и по сжатию свежих и подсушенных образцов, представлены в таблицах 3 и 4 в виде среднего значения и стандартного отклонения, поскольку распределение в выборках являлось нормальным, что было доказано с помощью теста Шапиро-Уилка. Для визуализации распределения значений в выборках использовались диаграммы «ящички с усами» (рисунок 5).



**Рис. 4.** Регрессионные зависимости эффективного модуля упругости ( $E$  в МПа, по вертикали) от объёмной плотности ( $BVD$  в  $г/см^3$ , по горизонтали): пустые квадраты – эксперт 1 ( $E = 1.2663BVD - 1123.6$ ,  $R^2 = 0.44$ ), ромбы – эксперт 2 ( $E = 1.1903BVD - 898.31$ ,  $R^2 = 0.43$ ) (а); регрессионные зависимости эффективного модуля упругости ( $E$  в МПа, по вертикали) от минеральной плотности ( $BMD$  в  $г/см^3$ , по горизонтали): пустые квадраты – эксперт 1 ( $E = 0.9978BMD + 74.435$ ,  $R^2 = 0.60$ ), ромбы – эксперт 2 ( $E = 1.0751 BMD - 68.456$ ,  $R^2 = 0.55$ ) (б)



**Рис. 5.** Диаграмма распределения значений эффективного модуля упругости при повторном сжатии образцов (а) и при сжатии свежих и подсушенных образцов (б)

	$Q_1$	Me	$Q_3$
Пористость	0,693194	0,892177	0,9780868
BVD	0,893786	0,965368	0,9945394
BMD	0,949987	0,984413	0,9968115

**Таблица 1.** Описательные статистики выборок с эффективными модулями упругости, полученные при сравнительном анализе разными экспертами. Здесь  $Q_1$  – первый квартиль,  $Q_3$  – третий квартиль,  $Me$  – медиана

	AVE	SD
<b>1 сжатие</b>	529,04	172,2
<b>2 сжатие</b>	547,51	230,12

**Таблица 2.** Описательные статистики выборок с эффективными модулями упругости, полученные в ходе экспериментов по повторному сжатию. Здесь  $AVE$  – среднее значение,  $SD$  – стандартное отклонение

	AVE	SD
Подсушенные	781,29	247,15
Свежие	584,22	215,3

**Таблица 3.** Описательные статистики, полученные в ходе сравнения выборок с эффективными модулями упругости свежих и подсушенных образцов. Здесь  $AVE$  – среднее значение,  $SD$  – стандартное отклонение

**3. Обсуждение** В клинической практике важно, чтобы результаты оценок механических характеристик биологических материалов были согласованы между разными специалистами. Это особенно актуально при принятии решений о лечении, хирургическом вмешательстве или реабилитации. В этой связи целесообразно прибегать к оценке межэкспертной надежности полученных результатов. Несогласованность может быть обусловлена уровнем квалификации, наличием опыта, заинтересованностью эксперта, а также методом исследования.

В текущем исследовании в рамках экспериментов 1 типа была проведена сравнительная оценка данных, полученных двумя экспертами. С целью анализа межэкспертной согласованности были применены статистические методы, метод косинусного сходства, а также визуализация результатов с использованием графиков. В результате анализа нам удалось получить достаточно высокие показатели надежности расчета разными экспертами эффективного модуля упругости костной ткани, а также при построении зависимостей эффективного модуля упругости от структурных свойств кости (пористость, минеральная

плотность, объемная плотность). Так как в рамках данного исследования модуль упругости вычислялся вручную по линейному участку на диаграмме сжатия, то вероятность расхождения полученных результатов могла быть достаточно велика. Однако, диаграмма размаха (рисунок 2) наглядно демонстрирует, что различия между вычислениями незначительны. Это подтверждает критерий Манна-Уитни, с помощью которого было выявлено, что статистически значимых различий между вычислениями отдельных экспертов нет (таблица 1). Исходя из этого можно предположить, что такая согласованность результатов может быть обусловлена следующими факторами: использование одного и того же метода вычисления эффективного модуля упругости, схожий уровень подготовки и опыт специалистов, поскольку в качестве экспертов выступали студенты.

В контексте построения зависимостей эффективного модуля упругости от структурных свойств костной ткани необходимо отметить, что каждый эксперт принимал самостоятельные решения относительно выбора и удаления выбросов — показателей, которые существенно отклоняются от остальных наблюдений. Обработка выбросов имеет критическое значение, поскольку они могут вносить искажения в результаты анализа. Это подчеркивает возможность существования различий в зависимостях, построенных различными экспертами. Тем не менее, результаты проведенного исследования (рисунки 4 и 5) продемонстрировали визуальное сходство этих зависимостей, а применение метода косинусного сходства для более детального анализа подтвердило высокую степень схожести между полученными результатами. Такая согласованность может быть обусловлена теми же факторами, что и при сравнении эффективных модулей упругости костной ткани, так как все эксперты при построении зависимостей использовали одинаковые показатели структурных характеристик костной ткани.

Далее перейдем к обсуждению результатов дополнительных экспериментов по одноосному сжатию, проведенных в рамках данного исследования. Результаты экспериментов 2 типа позволяют предположить, что костная ткань демонстрирует достаточно высокую сопротивляемость к механическим нагрузкам, что выражается в относительной стабильности модуля упругости в процессе испытаний. Данное наблюдение иллюстрируется диаграммой размаха (рисунок 5 а), которая наглядно демонстрирует незначительный разброс показателей модуля упругости. Результаты дисперсионного анализа ANOVA также подтверждают, что различия между значениями модулей упругости при первом и повторном сжатии не являются статистически значимыми (таблица 2).

Совершенно иную картину демонстрируют результаты экспериментов 3 типа. Дисперсионный анализ позволил установить, что разница между значениями модуля упругости свежих и несвежих образцов является статистически значимой (таблица 3). Данная информация визуализирована на диаграмме размаха

(рисунок 5 б). Основываясь на этом, можно предположить, что хранение образцов кости при комнатной температуре в течение 7 суток оказывает существенное влияние на их жесткость и, соответственно, на эффективный модуль упругости.

**4. Выводы** Показана межэкспертная надежность при оценке эффективного модуля упругости, рассчитываемого по стержневой теории в рамках одноосных экспериментов по сжатию губчатой кости крупного рогатого скота, а также межэкспертная надежность при построении зависимостей эффективного модуля упругости от структурных свойств кости (пористость, минеральная плотность, объемная плотность). Выявлено, что при повторном сжатии губчатой кости модуль упругости практически не меняется. При этом выявлено, что хранение образцов кости при комнатной температуре в течение 7 суток оказывает существенное влияние на эффективный модуль упругости: в среднем он увеличивается в 1.3 раза.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** В. В. Акимова проведение экспериментов, обработка результатов, подготовка текста статьи, М. А. Бударина проведение экспериментов, обработка результатов, подготовка текста статьи, Т. Ю. Нефедова проведение экспериментов, Д. В. Иванов планирование экспериментов, обработка результатов, подготовка текста статьи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена в рамках Государственного задания FSRR-2023-0009 и при поддержке Фонда Потанина.

#### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** V. V. Akimova conducting experiments, processing results, preparing the text of the article, M. A. Budarina conducting experiments, processing results, preparing the text of the article, T. Yu. Nefedova conducting experiments, D. V. Ivanov planning experiments, processing results, preparing the text of the article.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** The work was carried out within the framework of the State Assignment FSRR-2023-0009 and with the support of the Potanin Foundation.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Численный анализ напряженно-деформированного состояния остеотомий первой плюсневой кости / А. В. Полиенко [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2023. – Т. 23, № 4. – С. 496–511.
2. Разработка системы поддержки принятия врачебных решений в травматологии и ортопедии. Биомеханика как инструмент предоперационного планирования / А. С. Бескровный [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2021. – Т. 25, № 2. – С. 118–133.
3. Иванов Д. В. Биомеханическая поддержка решения врача при выборе варианта лечения на основе количественных критериев оценки успешности // Известия

- Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22, № 1. – С. 62–89.
4. Извлечение клинически значимых данных из биомеханического моделирования вариантов хирургического лечения травмы позвоночника при повреждении позвонков Th10, Th11 / А. М. Донник [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2019. – Т. 19, № 4. – С. 439–453.
  5. Методология «планирование – моделирование – прогнозирование» для предоперационного планирования в травматологии-ортопедии / Л. В. Бессонов [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 3. – С. 359–380.
  6. On the question of the effect of the loading method on the cancellous bone effective elasticity modulus / I. F. Parshina [et al.] // *Mechanics of Solids*. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3870–3879.
  7. Разработка и апробация мобильного стенда по исследованию механических свойств биологических тканей / И. Ф. Паршина [и др.] // *Российский журнал биомеханики*. – 2024. – Т. 28, № 3. – С. 39–46.
  8. Influence of osteoporosis on the compressive properties of femoral cancellous bone and its dependence on various density parameters / F. Metzner [et al.] // *Sci Rep*. – 2021. – Vol. 11, no. 1. – P. 13284. – DOI: 10.1038/s41598-021-92685-z.
  9. The effects of force application on the compressive properties of femoral spongy bone / F. Metzner [et al.] // *Clin Biomech (Bristol)*. – 2023. – Vol. 101. – P. 105866. – DOI: 10.1016/j.clinbiomech.2022.105866.
  10. Experimentally-based multiscale model of the elastic moduli of bovine trabecular bone and its constituents / E. Hamed [et al.] // *Mater Sci Eng C Mater Biol Appl*. – 2015. – Vol. 54. – P. 207–216. – DOI: 10.1016/j.msec.2015.02.044.
  11. Structural strength of cancellous specimens from bovine femur under cyclic compression / K. Endo [et al.] // *PeerJ*. – 2016. – Vol. 4. – P. 1562. – DOI: 10.7717/peerj.1562.
  12. К вопросу об изучении структурных и механических характеристик губчатой костной ткани крупного рогатого скота / И. Ф. Паршина [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2025. – Т. 25, № 2. – С. 231–245. – DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-2-231-245.

## REFERENCES

1. Numerical analysis of the stress-strain state of osteotomies of the first metatarsal / A. V. Polienko [et al.] // *Proceedings of the Saratov University. A new series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science*. – 2023. – Vol. 23, no. 4. – P. 496–511. – (in Russian).
2. Development of a medical decision support system in traumatology and orthopedics. Biomechanics as a tool for preoperative planning / A. S. Beskrovny [et al.] // *Russian Journal of Biomechanics*. – 2021. – Vol. 25, no. 2. – P. 118–133. – (in Russian).
3. *Ivanov D. V.* Biomechanical support for a doctor's decision when choosing a treatment option based on quantitative criteria for evaluating success // *Proceedings of*

- the Saratov University. A new series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science. – 2022. – Vol. 22, no. 1. – P. 62–89. – (in Russian).
4. Extracting clinically significant data from biomechanical modeling of surgical treatment options for spinal injury in case of damage to the vertebrae Th10, Th11 / A. M. Donnik [et al.] // Proceedings of the Saratov University. A new series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science. – 2019. – Vol. 19, no. 4. – P. 439–453. – (in Russian).
  5. Methodology of "planning - modeling - forecasting" for preoperative planning in traumatology-orthopedics / L. V. Bessonov [et al.] // Proceedings of the Saratov University. A new series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science. – 2024. – Vol. 24, no. 3. – P. 359–380. – (in Russian).
  6. On the question of the effect of the loading method on the cancellous bone effective elasticity modulus / I. F. Parshina [et al.] // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3870–3879.
  7. Development and testing of a mobile stand for the study of the mechanical properties of biological tissues / I. F. Parshina [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2024. – Vol. 28, no. 3. – P. 39–46. – (in Russian).
  8. Influence of osteoporosis on the compressive properties of femoral cancellous bone and its dependence on various density parameters / F. Metzner [et al.] // Sci Rep. – 2021. – Vol. 11, no. 1. – P. 13284. – DOI: 10.1038/s41598-021-92685-z.
  9. The effects of force application on the compressive properties of femoral spongy bone / F. Metzner [et al.] // Clin Biomech (Bristol). – 2023. – Vol. 101. – P. 105866. – DOI: 10.1016/j.clinbiomech.2022.105866.
  10. Experimentally-based multiscale model of the elastic moduli of bovine trabecular bone and its constituents / E. Hamed [et al.] // Mater Sci Eng C Mater Biol Appl. – 2015. – Vol. 54. – P. 207–216. – DOI: 10.1016/j.msec.2015.02.044.
  11. Structural strength of cancellous specimens from bovine femur under cyclic compression / K. Endo [et al.] // PeerJ. – 2016. – Vol. 4. – P. 1562. – DOI: 10.7717/peerj.1562.
  12. On the issue of studying the structural and mechanical characteristics of spongy bone tissue of cattle / I. F. Parshina [et al.] // Proceedings of the Saratov University. A new series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science. – 2025. – Vol. 25, no. 2. – P. 231–245. – DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-231-245. – (in Russian).



## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ И ГЛАДКИЕ ФУНКЦИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

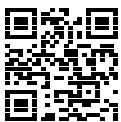
*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

**Аннотация.** В рамках теории малых деформаций на примере задачи о быстровращающемся тонком диске проводится сравнение полей напряжений, перемещений и деформаций определяемых для различных математических моделей изотропного идеального упругопластического тела, включающих гладкие или кусочно-линейные функции пластичности. Обсуждаются общие положения плоского напряженного состояния. Все параметры материала являются постоянными величинами. Показано, что при выборе кусочно-линейных функций пластичности сингулярные режимы выполняются на границе раздела областей, в которых реализуются регулярные режимы пластичности. Установлено, что при увеличении параметра нагрузки происходит смещение границы выполнения сингулярного режима. По этой причине соотношения ассоциированного закона пластического течения в области смещения указанной границы интегрируются численно. Поскольку в процессе нагружения в пластической области изменение положения границы между зонами выполнения регулярных режимов мало, в работе вместо ассоциированного закона пластического течения выбирается ассоциированный закон пластического деформирования. При определении напряженного и деформированного состояния диска рассматривается степенное условие пластичности Карафиллиса-Бойса, которое является одним из обобщений условия пластичности Мизеса, а также при увеличении показателя степени компонент девиатора напряжений переходит в условие пластичности Ишлинского. Рассмотрены процессы увеличения и снятия нагрузки. Приведены графики напряжений, перемещений, деформаций и годографа вектора напряжений.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, плоское напряженное состояние, вращающиеся диски, упругопластическое тело, условие пластичности Карафиллиса-Бойса, ассоциированный закон пластического деформирования, годограф вектора напряжений, вычислительный эксперимент.

**Артемов Михаил Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: artemov\_m\_a@mail.ru; AuthorID: 8282

**Верлин Александр Андреевич**, старший преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: alexandrverlin@mail.ru



**для цитирования:** Артемов М. А., Верлин А. А. Упругопластическое состояние вращающегося диска. Кусочно-линейные и гладкие функции пластичности // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 143–167. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.009. EDN: HACLNS

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

M. A. Artemov, A. A. Verlin

## ELASTIC-PLASTIC STATE OF A ROTATING DISK. PIECEWISE LINEAR AND SMOOTH PLASTICITY FUNCTIONS

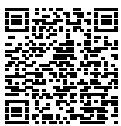
Voronezh State University, Voronezh, Russia

**Abstract.** Within the framework of the theory of small deformations, using the example of the problem of a rapidly rotating thin disk, a comparison is made of the fields of stresses, displacements, and deformations determined for various mathematical models of an isotropic ideal elastic-plastic body, which include smooth or piecewise-linear plasticity functions. The general principles of plane stress state are discussed. All material parameters are considered to be constant values. It is shown that when choosing piecewise-linear plasticity functions, singular modes occur at the boundary separating regions where regular plasticity modes are realized. It has been established that as the load parameter increases, the boundary for the occurrence of the singular mode shifts. For this reason, the relationships of the associated law of plastic flow in the region of the shifting boundary are integrated numerically. Since, during loading in the plastic region, the change in the position of the boundary between zones of regular modes is small, in this work, instead of the associated law of plastic flow, the associated law of plastic deformation is chosen. In determining the stress and strain state of the disk, the power condition of plasticity by Karafillis-Boyce is considered, which is one of the generalizations of von Mises' plasticity condition. Moreover, as the exponent increases, the deviatoric stress components transition to Ishlinsky's plasticity condition. The processes of increasing and removing load are examined. Graphs of stresses, displacements, deformations, and the stress vector hodograph are presented.

**Keywords:** mathematical modeling, plane stress state, rotating disks, elastic-plastic body, Karafillis-Boyce plasticity condition, associated law of plastic deformation, stress vector hodograph, computational experiment.

**Mikhail A. Artemov**, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor; e-mail: artemov\_m\_a@mail.ru; AuthorID: 8282

**Alexandr A. Verlin**, Senior Lecturer; e-mail: alexandrverlin@mail.ru



**to cite this article:** Artemov M. A., Verlib A. A. Elastic-plastic state of a rotating disk. Piecewise linear and smooth plasticity functions // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 143–167. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.009

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

## Введение

Задача об упругопластическом состоянии тонкого вращающегося диска является одной из простейших одномерных задач плоского напряженного состояния. Тем не менее, учитывая практическую важность оценки состояния быстро вращающихся дисков, которые являются элементами многих машин и конструкций, интерес к этой задаче сохраняется до настоящего времени. В статье [1] отмечается, что одной из первых работ в этом направлении является работа Ф. Ласло 1925 г. [2], в которой рассматривались некоторые подходы к изучению деформирования вращающихся дисков. Работы, связанные с рассмотрением упругопластического состояния вращающегося диска, можно классифицировать, например, по выбору условия пластичности. Основная часть работ связана с выбором условия пластичности Треска или условием пластичности Мизеса. Выбор кусочно-линейных функций пластичности для идеально пластического тела позволяет получить аналитическое решение задачи о диске, а выбор гладких функций пластичности, в общем случае, приводит к необходимости численного решения. При этом следует отметить, что для регулярных режимов кусочно-линейных условий пластичности соотношения ассоциированного закона пластического течения интегрируются и переходят в соотношения ассоциированного закона пластического деформирования, а для сингулярных режимов эта процедура не имеет места.

При рассмотрении сплошных и кольцевых дисков под действием только сил инерции в статье [3] выполнено сравнение напряженного состояния для условий пластичности Треска и Мизеса. Отмечается, что для условия Треска, когда диск полностью переходит в пластическое состояние, значение параметра нагрузки меньше, чем для условия Мизеса. Здесь следует отметить, что в [3] в условии Треска и Мизеса выбирался предел пластичности на одноосное растяжение. Определение напряженного и деформированного состояния вращающегося диска для условия Мизеса приведено в [4]; выполнено сравнение полей напряжений и перемещений, полученных в рамках теории пластического течения и деформационной теории. Рассматривая определения не только напряженного, но и деформированного состояния при решении задачи об упругопластическом состоянии сплошного вращающегося диска в работе [5] У. Гамером было высказано суждение о неприемлемости условия пластичности Треска, поскольку это условие не позволяет получить одновременно неразрывные поля напряжений и деформаций. В работе [6] было показано, что если в центре диска для любой кусочно-линейной функции пластичности выполняется сингулярный режим, то в рамках теории пластического течения в малой окрестности центра диска происходит сильный рост пластических деформаций, что приводит к нарушению сплошности. В работе [1] было предложено условие Треска дополнить изотропным упрочением. Такой подход позволяет получить решения с непрерывными полями напряжений и перемещений. В этом случае математическая модель пластической области дополнялась определяющим соотношением для

эквивалентной пластической деформации, которое получается из представления элементарной работы напряжений на приращениях пластической деформации в виде произведения эквивалентного напряжения на приращение эквивалентной пластической деформации. Учет трансляционного упрочнения при определении напряженно-деформированного состояния диска рассматривался в [7], задача решалась методом малого параметра. Влияние пластической сжимаемости на упругопластическое состояние вращающегося диска рассмотрено в [8]. Границы зарождения пластических областей для разных условий пластичности рассматривались в [9]. В ряде работ изучалось упругопластическое состояние дисков переменной толщины. В [10] рассматривался вопрос об определении профиля равнопрочного кольцевого диска для условия Мизеса. В предположении, что все точки диска находятся в предельном состоянии пластические деформации равны нулю, деформации связаны с напряжениями согласно закону Гука. Данные условия позволяют получить уравнение для определения толщины диска. В работе [11] выполнено определение профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины для анизотропного материала, имеющего разные пределы прочности при растяжении и сжатии. Интерес к определению профиля равнопрочного кольцевого вращающегося диска также связан с использованием функционально-градиентных материалов [12, 13]. В настоящей работе предлагается алгоритм определения напряженного и деформированного состояния вращающихся дисков при выборе гладких функций пластичности и на их основе объяснения некоторых особенностей решения задачи при выборе кусочно-линейных функций пластичности.

### Постановка задачи

В рамках теории малых деформаций рассматривается упругопластическое квазистатическое состояние быстровращающегося тонкого кругового диска постоянной толщины. Принимается, что материал диска является идеально упругопластическим, однородным и изотропным. Также принимается гипотеза о естественном состоянии диска и приближение плоского напряженного состояния, для которого все искомые величины являются осредненными по толщине диска. Выбираются кусочно-линейные и гладкие функции пластичности. Рассматривается цилиндрическая система координат  $\rho\theta z$ , ось  $z$  которой проходит через центр диска  $\rho = 0$ , а плоскость  $z = 0$  является средней плоскостью. Внешний контур диска  $\rho = b$  свободен от усилий. На упругопластической границе и границах между областями, в которых реализуются разные режимы пластичности, выполняются условия непрерывности компонент тензора напряжений и вектора перемещений. При выполнении численных расчетов выбирается условие пластичности максимального приведенного напряжения [14] и степенное условие пластичности [15].

### Плоское напряженное состояние

Задачи о плоском напряженном и плоском деформированном состояниях относятся к общей плоской задаче. Отмечается, что задача плоского напряженного состояния не может рассматриваться как частный случай трехмерной задачи.

В общей плоской задаче, когда функция текучести зависящая от ненулевых главных компонент тензора напряжений  $F(\sigma_1, \sigma_2)$ , используется в качестве пластического потенциала, и  $\partial F/\partial\sigma_1 + \partial F/\partial\sigma_2 = 0$ . При этом осевая пластическая деформация  $\varepsilon_3^p$  не определяется [16]. В монографии Д.Д.Ивлева [17] показано, что система уравнений плоского напряженного состояния противоречивая.

В [18] показано, что процедура осреднения всех величин по толщине тонкого диска приводит к обобщенному плоскому напряженному состоянию. Процедура перехода к осредненным по толщине величин, в частности, снимает противоречия, на которые указано в [17], а именно: осредненное осевое перемещение

$$\frac{1}{h} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} w dz = 0,$$

осредненная осевая деформация

$$\varepsilon_z = \frac{1}{h} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \frac{\partial w}{\partial z} dz, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(\rho),$$

определяет изменение профиля диска.

Инкремент осредненной осевой пластической деформации определяется из соотношений ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_3^p = \frac{\partial F/\partial\sigma_3|_{\sigma_3=0}}{\partial F/\partial\sigma_1|_{\sigma_3=0}} d\varepsilon_1^p = \frac{\partial F/\partial\sigma_3|_{\sigma_3=0}}{\partial F/\partial\sigma_2|_{\sigma_3=0}} d\varepsilon_2^p.$$

Отметим, что дифференцирование функции пластичности по компонентам тензора напряжений выполняется до осреднения соотношений ассоциированного закона пластического течения, что согласуется с подходом, приведенным в монографии А. Ю. Ишлинского и Д.Д. Ивлева [19].

Осредненные величины удовлетворяют известным предположениям о плоском напряженном состоянии (выбрана декартова система координат)

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz}^e = \varepsilon_{yz}^e = \varepsilon_{xz}^p = \varepsilon_{yz}^p = 0,$$

а все ненулевые величины не зависят от осевой координаты  $z$ .

### Безразмерные величины

В настоящей работе все соотношения и величины приводятся к безразмерному виду. За характерный масштаб величин, имеющих размерность напряжений, выбирается значение предела пластичности  $k$  при одноосном растяжении, за масштаб длины выбирается значение радиус диска.

Для всех величин, приведенных к безразмерному виду, сохраняются обозначения, принятые для размерных величин, что не требует использования дополнительных обозначений и улучшает восприятие формул. Таким образом, безразмерный предел пластичности обозначается символом  $k$ , значение которого равно единице,  $\sigma_\rho, \sigma_\theta$  – безразмерные компоненты тензора напряжений,  $u$  – безразмерная радиальная компонента вектора перемещений,  $E$  – безразмерный модуль Юнга,  $m = (\gamma\omega^2 b^2)/(gk)$  – безразмерный комплекс, составленный из

размерных величин:  $\omega$  – угловая скорость вращения диска,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\gamma$  – удельный вес. Компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  являются безразмерными величинами. Все параметры материала, входящие в определяющие уравнения, рассматриваются как постоянные величины. Перемещения и деформации умножаются на безразмерный модуль Юнга, что делает их величинами того же порядка, что и безразмерные напряжения.

### Математическая модель упругой области диска

Рассмотрим случай, когда в процессе нагружения в упругой области диска имеются остаточные необратимые деформации. Тогда, полные деформации включают упругие и необратимые остаточные деформации ( $\varepsilon_\rho^*, \varepsilon_\theta^*, \varepsilon_z^*$ ).

Математическая модель упругой области диска включает: уравнение равновесия в собственной системе отсчета [4, 20] (уравнение движения в инерциальной системе отсчета [21])

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho; \quad (1)$$

соотношения закона Гука.

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho^e &= E(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\rho^*) = \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \\ E\varepsilon_\theta^e &= E(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^*) = \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \\ E\varepsilon_z^e &= E(\varepsilon_z - \varepsilon_z^*) = -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta); \end{aligned} \quad (2)$$

условие совместности полных деформаций

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0; \quad (3)$$

соотношения Коши, определяющие деформации через перемещения

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}. \quad (4)$$

Из уравнений (1) – (4) методом исключения переменных можно получить систему дифференциальных уравнений для определения напряжений

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 &= 0, \\ \rho \frac{d\sigma_\theta}{d\rho} + \sigma_\theta - \sigma_\rho + \nu m\rho^2 + E \left( \rho \frac{d\varepsilon_\theta^*}{d\rho} + \varepsilon_\theta^* - \varepsilon_\rho^* \right) &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из этой системы  $\sigma_\theta$  получим уравнение

$$\rho^2 \frac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2} + 3\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + (3 + \nu)m\rho^2 + E \left( \rho \frac{d\varepsilon_\rho^*}{d\rho} + \varepsilon_\rho^* - \varepsilon_\rho^* \right) = 0, \quad (5)$$

или, учитывая формулы (2), (4) дифференциальное уравнение второго порядка для определения перемещений

$$\rho \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho} + \frac{1 - \nu^2}{E} m\rho^2 - \rho \frac{d}{d\rho} (\varepsilon_\rho^* + \nu\varepsilon_\theta^*) + (1 - \nu)(\varepsilon_\theta^* - \varepsilon_\rho^*) = 0.$$

Если в начальном состоянии (до момента нагружения) в диске необратимые деформации равны нулю, то компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в упругой области диска определяются по формулам [20]

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{3+\nu}{8}m\rho^2, \\ \sigma_\theta &= A + \frac{B}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{8}m\rho^2, \\ Eu &= (1-\nu)A\rho + \frac{1+\nu}{\rho}B - \frac{1-\nu^2}{8}m\rho^3.\end{aligned}\quad (6)$$

Если весь диск находится в упругом состоянии, то для условий

$$\begin{aligned}\sigma_\rho|_{\rho=0} &= \sigma_\theta|_{\rho=0}, \\ \sigma_\rho|_{\rho=b} &= 0,\end{aligned}$$

на основании формул (6) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{3+\nu}{8}m(b^2 - \rho^2), \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}m\left(b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}\rho^2\right), \\ Eu &= (1-\nu)\left(\frac{3+\nu}{8}b^2 - \frac{1+\nu^2}{8}\rho^2\right)m\rho.\end{aligned}\quad (7)$$

Обычно в центре диска указывают условие  $u|_{\rho=0} = 0$ . Условие  $\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0}$  является следствием симметрии поля напряжений в центре диска.

Если для всех условий пластичности выбран предел пластичности на одноосное растяжение  $k$ , то при увеличении нагрузки пластическая область зарождается в центре диска когда

$$\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0} = k. \quad (8)$$

Из (6), (8) находим условие зарождения пластической области в центре диска

$$m = m_0 = \frac{8}{b^2} \frac{k + p_b}{3 + \nu}.$$

На основании формул (7) можно определить зависимость

$$\sigma_\theta = \frac{1+3\nu}{3+\nu}\sigma_\rho + \frac{1-\nu}{4}mb^2. \quad (9)$$

Из (9) следует, что годограф вектора напряжений  $\bar{\sigma} = \{\sigma_\rho(\rho), \sigma_\theta(\rho)\}$  на плоскости  $\sigma_z = 0$  в пространстве напряжений – отрезок прямой.

На рис.1 показано положение годографа вектора напряжений для  $m < m_0$  и  $m = m_0$  относительно кривых пластичности Треска, Мизеса, Ишлинского, на плоскости  $\sigma_z = 0$  в пространстве главных напряжений, когда  $\nu = 0.2, k = 1, b = 1, 0 \leq \rho \leq b$ .

Итак, при увеличении нагрузки (параметра  $m$ ) пластическая область зарождается в центре сплошного диска.

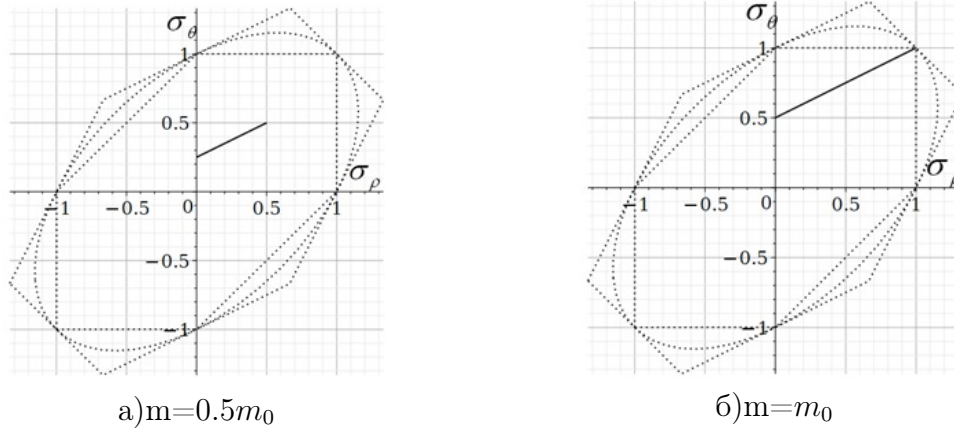


Рис. 1

### Кусочно-линейные функции пластичности

При выборе кусочно-линейной функции пластичности рассмотрим регулярные и сингулярные режимы. Для любого регулярного режима имеем статически определимую задачу ( $i$  - номер стороны многоугольника пластичности)

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho, \quad (10)$$

$$F_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_\rho = k.$$

Решение системы (10) можно записать в виде

$$\sigma_\rho = \frac{k}{\alpha_i + \beta_i} - \frac{\alpha_i}{3\alpha_i + \beta_i} m\rho^2 + C\rho^{-1-\beta_i/\alpha_i},$$

$$\sigma_\theta = \frac{k}{\alpha_i + \beta_i} + \frac{\beta_i}{3\alpha_i + \beta_i} m\rho^2 - \frac{\beta_i}{\alpha_i} C\rho^{-1-\beta_i/\alpha_i}.$$

Для сингулярного режима

$$F_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_\rho = k, \quad F_{i+1} = \alpha_{i+1} \sigma_\theta + \beta_{i+1} \sigma_\rho = k, \quad (11)$$

задача определения напряжений является статически переопределенной, что приводит к дополнительным соотношениям между параметрами модели. Из системы (11) находим, что

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^{(i)} = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} k, \quad (12)$$

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^{(i)} = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} k.$$

Подставляя (12) в уравнение равновесия, получаем

$$\sigma_\theta^{(i)} - \sigma_\rho^{(i)} = \frac{\alpha_i - \alpha_{i+1} + \beta_i - \beta_{i+1}}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} k = m\rho^2. \quad (13)$$



Из (13) следует формула, определяющая взаимно однозначное соответствие между радиальной координатой точек диска и значением параметра  $m$

$$\rho = \rho_i = \sqrt{\frac{\alpha_i - \alpha_{i+1} + \beta_i - \beta_{i+1}}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} \frac{k}{m}}. \quad (14)$$

Из формулы (14) следует, что радиус границы  $\rho = \rho_i$  уменьшается при увеличении значения параметра  $m$ . Будет происходить изменение положения границы между областями с разными регулярными режимами. Таким образом, в рамках теории пластического течения в области перемещения границы  $\rho = \rho_i$  необходимо учитывать изменение пластических деформаций.

Для регулярных режимов из соотношения ассоциированного закона пластического течения следуют пропорции

$$\frac{d\varepsilon_\rho^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho} = \frac{d\varepsilon_\theta^p}{\partial F / \partial \sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_z^p}{\partial F / \partial \sigma_z}. \quad (15)$$

В силу линейной зависимости пластического потенциала от компонент тензора напряжений, интегрируя (15) переходим к соотношениям ассоциированного закона пластического деформирования [22]

$$\frac{\Delta \varepsilon_\rho^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho} = \frac{\Delta \varepsilon_\theta^p}{\partial F / \partial \sigma_\theta} = \frac{\Delta \varepsilon_z^p}{\partial F / \partial \sigma_z},$$

где  $\Delta \varepsilon_\rho^p, \Delta \varepsilon_\theta^p, \Delta \varepsilon_z^p$  - приращения пластических деформаций на каждом этапе нагружения. Для рассматриваемых регулярных режимов в процессе нагружения направляющий тензор пластических деформаций не зависит от времени [23].

#### Условие пластичности Ишлинского

При рассмотрении вопросов, связанных с описанием пластического состояния тел в работе [14] дано обоснование введения условия пластичности максимального приведенного напряжения. В частности показано, что все поверхности пластичности идеально пластического тела, когда выбирается предел пластичности на одноосное растяжение-сжатие, будут располагаться между поверхностью пластичности максимального касательного и максимального приведенного напряжения.

#### В пластической области один режим условия Ишлинского

Рассмотрим случай, когда выбирается условие пластичности Ишлинского и выполняется только один режим

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2k. \quad (16)$$

Учитывая, что в центре диска выполняется условие (8), решая систему уравнений (1),(16) находим

$$\sigma_\rho = k - \frac{m\rho^2}{4}, \quad \sigma_\theta = k + \frac{m\rho^2}{4}. \quad (17)$$

Упругие деформации определяются согласно соотношениям закона Гука

$$E\varepsilon_\rho^e = (1 - \nu)k - \frac{1 + \nu}{4}m\rho^2, \quad E\varepsilon_\theta^e = (1 - \nu)k + \frac{1 + \nu}{4}m\rho^2. \quad (18)$$

Из соотношений ассоциированного закона пластического деформирования и формул Коши, получаем дифференциальное уравнение для определения перемещений в пластической области

$$\frac{dEu}{d\rho} - \frac{Eu}{\rho} + \frac{1 + \nu}{2}m\rho^2 = 0. \quad (19)$$

Решая уравнение (19), находим

$$Eu = \left(C - \frac{1 + \nu}{4}m\rho^2\right)\rho. \quad (20)$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе следует, что

$$C = \frac{1 + \nu}{4}mc^2 + (1 - \nu)k. \quad (21)$$

Учитывая (21), формула (20) примет вид

$$Eu = \left(\frac{1 + \nu}{2}m(2c^2 - \rho^2) + (1 - \nu)k\right)\rho.$$

Пластические деформации

$$E\varepsilon_\rho^p = E\varepsilon_\theta^p = \frac{1 + \nu}{2}m(c^2 - \rho^2), \quad \varepsilon_z^p = -2\varepsilon_\theta^p.$$

На упругопластической границе  $\rho = c$  из (19) следует, что

$$\sigma_\rho|_{\rho=c} = k - \frac{mc^2}{4}, \quad \sigma_\theta|_{\rho=c} = k + \frac{mc^2}{4}.$$

Учитывая условия непрерывности напряжений на упругопластической границе

$$[\sigma_\rho]|_{\rho=c} = 0, \quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c} = 0,$$

определяем величины  $A, B$  в формулах (7)

$$A = k + \frac{1 + \nu}{4}mc^2, \quad B = \frac{1 + \nu}{8}mc^4.$$

Поэтому напряжения в упругой области

$$\sigma_\rho = k + \frac{1 + \nu}{4}\left(1 - \frac{c^2}{2\rho^2}\right)mc^2 - \frac{3 + \nu}{8}m\rho^2,$$

$$\sigma_\theta = k + \frac{1 + \nu}{4}\left(1 + \frac{c^2}{2\rho^2}\right)mc^2 - \frac{1 + 3\nu}{8}m\rho^2.$$

Если на границе  $\rho = b$  задано условие  $\sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b$ , то из него следует, что

$$c = b\sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \nu}\left(4\frac{k + p_b}{mb^2} - 1\right)}},$$

$$m = \frac{8(k + p_b)b^2}{(1 + \nu)(b^2 - c^2)^2 + 2b^4}.$$

Когда в пластической области реализуется только режим (16) и на упругопластической границе компоненты тензора напряжений

$$\sigma_\rho|_{\rho=c} = \frac{2k}{3}, \quad \sigma_\theta|_{\rho=c} = \frac{4k}{3}, \quad (22)$$

то из условия  $\sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b$  определяем

$$m = m_1 = \frac{4}{3b^2} \frac{3p_b + (4 + \nu)k + \sqrt{(13 + 4\nu)k^2 + 6(4 + \nu)kp_b + 9p_b^2}}{3 + \nu}.$$

При выполнении (22), учитывая формулы (17) находим, что

$$mc^2 = \frac{4k}{3}.$$

Поэтому значение радиуса упругопластической границы, когда  $m = m_1$  будет определяться по формуле

$$c = c_1 = b \sqrt{\frac{(3 + \nu)k}{(4 + \nu)k + 3p_b + \sqrt{(13 + 4\nu)k^2 + 6(4 + \nu)kp_b + 9p_b^2}}}.$$

Если  $p_b = 0$ , то

$$m = m_1 = \frac{4k}{3b^2} \frac{4 + \nu + \sqrt{13 + 4\nu}}{3 + \nu},$$

$$c = c_1 = b \sqrt{\frac{3 + \nu}{4 + \nu + \sqrt{13 + 4\nu}}}.$$

На рис.2 показаны графики напряжений, перемещений, пластических деформаций и годографа вектора напряжений когда  $k = 1, b = 1, \nu = 0.25, m = m_1 = 3.2786$ .

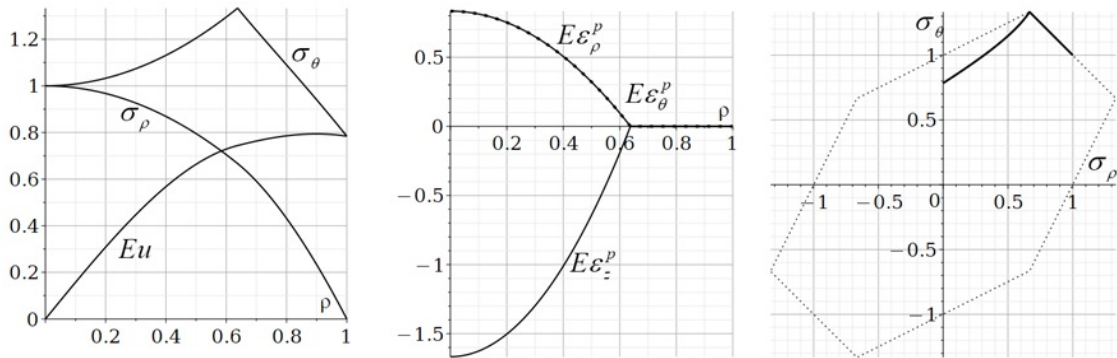


Рис. 2

**В пластической области реализуются три режима условия Ишлинского**

Рассмотрим случай, когда  $m > m_1$  и  $p_b = 0$ . В пластической области  $0 \leq \rho \leq c$  реализуются три режима. Первый режим

$$1) \begin{cases} \sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k, \\ \frac{2k}{3} \leq \sigma_\rho \leq \frac{4k}{3} \end{cases}$$

реализуется в области  $0 \leq \rho \leq c_1$ . Второй режим

$$2) \begin{cases} 2\sigma_\theta - \sigma_\rho = 2k, \\ -\frac{2k}{3} \leq \sigma_\rho \leq \frac{2k}{3} \end{cases}$$

реализуется в области  $c_1 \leq \rho \leq c$ . Третий режим

$$3) \begin{cases} \sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k, \\ 2\sigma_\theta - \sigma_\rho = 2k \end{cases}$$

выполняется только на границе  $\rho = c_1$ .

### Первый режим

Для этого режима справедливы соотношения (17) – (20). На границе  $\rho = c_1$

$$mc_1^2 = \frac{4k}{3}.$$

Поэтому на границе  $\rho = c_1$ , учитывая (20), получаем

$$Eu|_{\rho=c_1} = \left( C - \frac{1+\nu}{3}k \right) c_1. \quad (23)$$

Неизвестная величина  $C$  определяется, например, из условия непрерывности перемещений на границе  $\rho = c_1$ .

### Второй режим

Для второго режима учитывая, что на границе  $\rho = c_1$

$$\sigma_\rho|_{\rho=c_1} = \frac{2k}{3},$$

напряжения в пластической области  $c_1 \leq \rho \leq c$

$$\sigma_\rho = 2 \left( k - \frac{m\rho^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}} \right), \quad (24)$$

$$\sigma_\theta = 2k - \frac{m\rho^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}}.$$

Упругие деформации определяются согласно соотношениям закона Гука

$$E\varepsilon_\rho^e = 2(1-\nu)k + \frac{2-\nu}{5} \left( \frac{3mc_1^2 - 10k}{3} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}} - m\rho^2 \right),$$

$$E\varepsilon_\theta^e = 2(1-\nu)k + \frac{1-2\nu}{5} \left( \frac{3mc_1^2 - 10k}{3} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}} - m\rho^2 \right).$$

Учитывая соотношения ассоциированного закона пластического деформирования и формулы Коши, получаем уравнение для перемещений в пластической области

$$2\frac{dEu}{d\rho} + \frac{Eu}{\rho} + \frac{5-4\nu}{\rho^{1/2}} \left( \frac{\rho^{5/2} - c_1^{5/2}}{5} m + \frac{2c_1^{1/2}}{3} k \right) - 6(1-\nu)k = 0.$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$Eu = 2(1-\nu)k\rho + (5-4\nu) \left( \frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left( \frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{m\rho^2}{35} \right) \rho + \frac{C_1}{\rho^{1/2}}. \quad (25)$$

Полные деформации находим по формулам Коши

$$E\varepsilon_\rho = 2(1-\nu)k + (5-4\nu) \left( \frac{c_1^{1/2}}{2\rho^{1/2}} \left( \frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{3m\rho^2}{35} \right) - \frac{C_1}{2\rho^{3/2}},$$

$$E\varepsilon_\theta = 2(1-\nu)k + (5-4\nu) \left( \frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left( \frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{m\rho^2}{35} \right) + \frac{C_1}{2\rho^{3/2}}.$$

Пластические деформации

$$E\varepsilon_\rho^p = \frac{c_1^{1/2}k}{2\rho^{1/2}} - \left( \frac{1-5\nu}{7} \rho^2 + \frac{3c_1^{5/2}}{4\rho^{1/2}} \right) \frac{m}{5} - \frac{C_1}{2\rho^{3/2}}, \quad (26)$$

$$E\varepsilon_\theta^p = -\frac{c_1^{1/2}k}{2\rho^{1/2}} + \left( 2\frac{1-5\nu}{7} \rho^2 + \frac{3c_1^{5/2}}{2\rho^{1/2}} \right) \frac{m}{5} + \frac{C_1}{2\rho^{3/2}}.$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе  $\rho = c$  находим

$$C_1 = c_1^{1/2}ck - \left( 2\frac{1-5\nu}{35} c^{5/2} + \frac{3c_1^{5/2}}{10} \right) mc. \quad (27)$$

Подстановка (27) в (25) дает

$$Eu = (5-4\nu) \left( \frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left( \frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{m\rho^2}{35} \right) \rho + 2(1-\nu)k\rho - \left( 2\frac{1-5\nu}{35} c^{5/2} + \frac{3c_1^{5/2}}{10} \right) \frac{mc}{\rho^{1/2}} + \frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} ck.$$

На границе  $\rho = c_1$

$$Eu|_{\rho=c_1} = (5-4\nu) \left( \frac{mc_1^2}{14} - \frac{k}{3} \right) c_1 + 2(1-\nu)kc_1 - \left( 2\frac{1-5\nu}{35} \frac{c^{5/2}}{c_1^{1/2}} + \frac{3c_1^2}{10} \right) mc + ck. \quad (28)$$

Из условия непрерывности перемещений на границе  $\rho = c_1$ , учитывая (25), (28), находим

$$C = \left( \frac{1-2\nu}{3} + \frac{c}{c_1} \right) k + \left( \frac{17-\nu}{28} c_1^2 - \frac{3c_1c}{10} - 2\frac{1-5\nu}{35} \frac{c^{7/2}}{c_1^{3/2}} \right) m.$$

### Упругая область

На упругопластической границе  $\rho = c$  из (24) следует, что

$$\sigma_\rho|_{\rho=c} = 2 \left( k - \frac{mc^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c}} \right),$$

$$\sigma_{\theta}|_{\rho=c} = 2k - \frac{mc^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k\sqrt{c_1}}{15\sqrt{c}}.$$

Учитывая условия непрерывности напряжений на упругопластической границе

$$[\sigma_{\rho}]|_{\rho=c} = 0, [\sigma_{\theta}]|_{\rho=c} = 0$$

определяем величины  $A, B$  входящие в формулы (6) для определения напряжений в упругой области

$$A = 2k + \frac{3mc_1 - 10k}{10} \frac{c_1^{1/2}}{c^{1/2}} + \frac{5\nu - 1}{20} mc^2,$$

$$B = \left( \left( \frac{k}{3} - \frac{mc_1^2}{10} \right) \frac{c_1^{1/2}}{c^{1/2}} + \frac{5\nu - 1}{40} mc^2 \right) c^2.$$

На границе  $\rho = b$

$$\sigma_{\rho}|_{\rho=b} = 2k + \left( \frac{5\nu - 1}{10} \left( 1 - \frac{c^2}{2b^2} \right) c^2 + \left( 3 + \frac{c^2}{b^2} \right) \frac{c_1^{5/2}}{5c^{1/2}} - \frac{3 + \nu}{4} b^2 \right) \frac{m}{2} - \left( 1 + \frac{c^2}{3b^2} \right) \frac{c_1^{1/2}}{c^{1/2}} k.$$

Из условия  $\sigma_{\rho}|_{\rho=b} = 0$  численно находим радиус упругопластической границы.

### Третий режим

Третий режим реализуется только на границе  $\rho = c_1$ , где

$$\sigma_{\rho} = \frac{2k}{3}, \quad \sigma_{\theta} = \frac{4k}{3}.$$

На рис. 3 показаны графики напряжений, перемещений пластических деформаций и годографа напряжений, когда  $k = 1, b = 1, m = 3.4036, c_1 = 0.6259, c = 0.87020, \nu = 0.25$ .

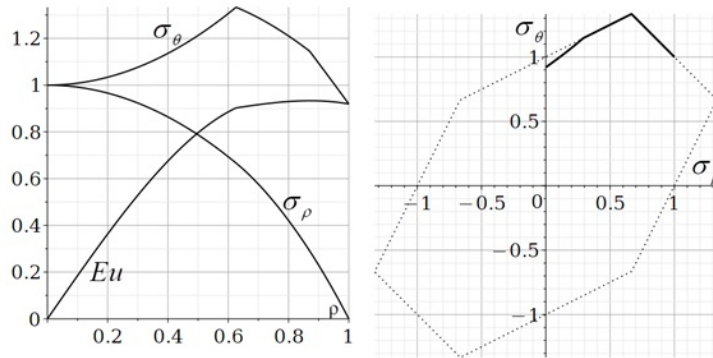


Рис. 3

### Предельное состояние диска

Рассмотрим случай, когда диск находится в предельном состоянии. Весь диск находится в пластическом состоянии, но пластического течения нет; пластические деформации на внешнем контуре диска  $\rho = b$  равны нулю. В области

$0 \leq \rho \leq c_1$  реализуется режим 1, в области  $c_1 \leq \rho \leq b$  выполняется режим 2. Если  $p_b = 0$ , то в области  $c_1 \leq \rho \leq b$  напряжения

$$\sigma_\rho = \frac{2}{5} \left( \frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} - \rho^2 \right) m + 2 \left( 1 - \frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right) k,$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{5} \left( \frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} - \rho^2 \right) m + \left( 2 - \frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right) k.$$

упругие деформации

$$E\varepsilon_\rho^e = \frac{2-\nu}{5} \left( \frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} - \rho^2 \right) m + 2(1-\nu)k - (2-\nu) \frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}} k,$$

$$E\varepsilon_\theta^e = \frac{1-2\nu}{5} \left( \frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} - \rho^2 \right) m + 2(1-\nu)k - (1-2\nu) \frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}} k.$$

Из соотношений ассоциированного закона пластического деформирования, учитывая связь полных упругих и пластических напряжений и соотношений закона Гука получаем уравнение

$$2 \frac{dEu}{d\rho} + \frac{Eu}{\rho} + \frac{5-4\nu}{5} \left( \rho^2 - \frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} \right) m + (5-4\nu) \frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}} k - 6(1-\nu)k = 0.$$

Решая это уравнение получим

$$Eu = \frac{5-4\nu}{10} \left( b^{5/2} \rho^{1/2} - \frac{2}{7} \rho^3 \right) m + \left( 2(1-\nu)\rho - \frac{3}{2} b^{1/2} \rho^{1/2} \right) k + \frac{C_1}{\rho^{1/2}} = 0.$$

Из равенства пластических деформаций на границе  $\rho = b$  находим

$$C_1 = \frac{5-4\nu}{14} (7k - b^2 m) b^{3/2}.$$

На рис. 4 показаны графики напряжений, перемещений, пластических деформаций и годографа напряжений, когда  $m = 3.4196$ ,  $c = b$ ,  $\nu = 0.25$ .

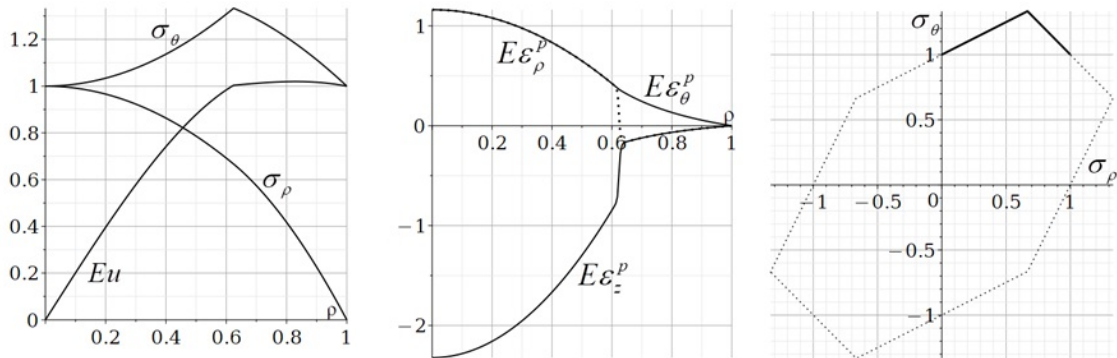


Рис. 4

### Изменение нагрузки

При рассмотрении комбинированной нагрузки можно говорить об изменении нагрузки в целом, уточняя увеличение или уменьшении каждого параметра нагрузки в отдельности. В пространстве параметров нагрузки можно рассматривать траекторию изменения нагрузки. В данной статье определяется один параметр нагрузки -  $m$ . При изменении упругопластического состояния диска, обусловленного уменьшением значения параметра  $m$ , в общем случае, в разных точках пластической области может происходить как разгрузка (уменьшение значения эквивалентного напряжения) так и нагружение, которое может привести к повторному пластическому деформированию, а следовательно к изменению значения начальных необратимых (пластических) деформаций. После снятия нагрузки ( $m = 0$ ) в диске остаются и упругие и пластические деформации.

Рассмотрим процесс, когда значение параметра  $m$  уменьшается от  $m_2$  - значение, при котором диск находится в предельном состоянии, до нуля. При этом контролируем изменение значения эквивалентного напряжения. В момент уменьшения значения параметра  $m$  весь диск переходит в упругое состояние. В области  $0 \leq \rho \leq c_1$  остаются необратимые деформации  $\varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_z^p$ , вычисляемые по формулам (26), в которых надо полагать

$$m = m_2.$$

В области  $0 \leq \rho \leq c_1$  полные деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho &= \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p,\end{aligned}\tag{29}$$

должны удовлетворять условиям совместности. Из уравнения равновесия следует, что

$$\sigma_\theta = \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho + m\rho^2.\tag{30}$$

Учитывая соотношения закона Гука, равенство(30), подставляя (29) в (3), приходим к уравнению

$$\rho^2 \frac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2} + 3\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + (3 + \nu)m\rho^2 - \rho \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{d\rho} - \sigma_\theta^{(0)} + \sigma_\rho^{(0)} - \nu m_2\rho^2 = 0.\tag{31}$$

Решая уравнение (31) и учитывая (30), находим

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= C_1 - \frac{C_2}{\rho^2} + \frac{1 + \nu}{8}m_1\rho^2 - \frac{3 + \nu}{8}m\rho^2, \\ \sigma_\theta &= C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} + 3\frac{1 + \nu}{8}m_1\rho^2 - \frac{1 - 3\nu}{8}m\rho^2.\end{aligned}$$

Неизвестная величина  $C_2 = 0$ .



В области  $c \leq \rho \leq b$  напряжения и перемещения определяются по формулам (6). Из условия  $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$  получаем, что

$$A = \frac{3 + \nu}{8} m b^2 + \frac{B}{b^2}.$$

Величины  $A, C_1$  определяются из условия непрерывности напряжений на границе  $\rho = c$ .

На рис.5, рис.6 приведены графики годографа вектора напряжений, перемещений и полных остаточных деформаций, включающие пластические и остаточные упругие деформации, для  $\nu = 0.25, n = 500$ , при уменьшении значения параметра нагрузки.

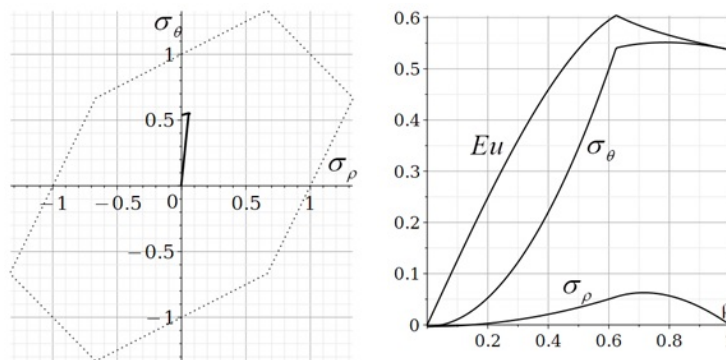


Рис. 5.  $m=0.95$ .

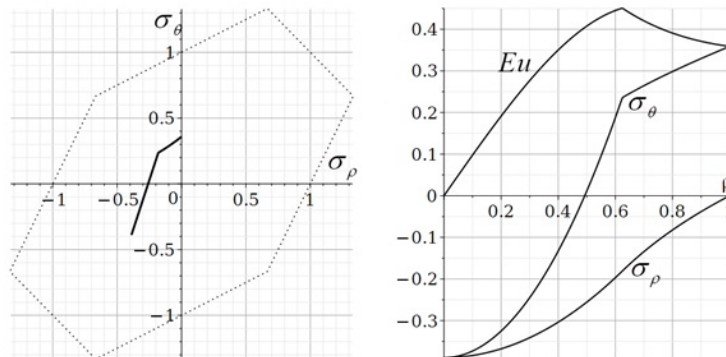


Рис. 6.  $m=0$ .

Изменения эквивалентного напряжения показывает, что при уменьшении параметра  $m$  до нуля в диске не происходит повторного пластического деформирования.

### Гладкие функции пластичности

Рассмотрим случай, когда функция пластичности является гладкой. Выбор конкретной функции пластичности не имеет принципиального значения. В работе [15] была предложена степенная функция пластичности

$$F = \left( \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^{2n} + (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)^{2n} + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^{2n}}{2 + 2^{2n}} \right)^{1/2n} = k. \quad (32)$$

При  $n = 1$  условие (32) переходит в условие пластичности Мизеса [24], при  $n \rightarrow \infty$  условие (32) переходит в условие пластичности Ишлинского.

Для задачи о диске

$$F(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z)|_{\sigma_z=0} = f(\sigma_\rho, \sigma_\theta) = \left( \frac{(2\sigma_\rho - \sigma_\theta)^{2n} + (2\sigma_\theta - \sigma_\rho)^{2n} + (\sigma_\rho + \sigma_\theta)^{2n}}{2 + 2^{2n}} \right)^{1/2n} = k.$$

Связь пластических деформаций и напряжений устанавливает ассоциированным законом пластического деформирования. Из этого закона следуют пропорции

$$\frac{\varepsilon_\rho^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho |_{\sigma_z=0}} = \frac{\varepsilon_\theta^p}{\partial F / \partial \sigma_\theta |_{\sigma_z=0}} = \frac{\varepsilon_z^p}{\partial F / \partial \sigma_z |_{\sigma_z=0}}. \quad (33)$$

Функция пластичности в (32) зависит только от второго и третьего инвариантов девиатора напряжений. Поэтому осредненную по толщине диска осевую компоненту тензора пластических деформаций можно непосредственно определять из условия пластической несжимаемости

$$\varepsilon_z^p = -(\varepsilon_\rho^p + \varepsilon_\theta^p).$$

Ассоциированный закон пластического деформирования, в общем случае, не является следствием ассоциированного закона пластического течения. Также (33) отличается от варианта деформационной теории при рассмотрении гладких поверхностей нагружения в [23].

Напряжения в пластической области  $0 \leq \rho \leq c$  определяем из системы

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho, \quad F = k. \quad (34)$$

Решение (34) находим численно с учетом условий (8).

Напряжения и перемещения в упругой области определяются согласно (5). Неизвестные величины  $A, B$  в (5) и радиус упругопластической границы  $\rho = c$  определяем из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе и граничного условия на внешнем контуре диска  $\rho = c$

$$\sigma_\rho|_{\rho=c} = -p_b.$$

Из ассоциированного закона пластического деформирования, учитывая соотношения (21), соотношения закона Гука и формулы Коши, следует уравнение для определения радиальной компоненты вектора перемещений

$$\frac{dEu}{d\rho} - \sigma_\rho + \nu\sigma_\theta - \frac{\partial F / \partial \sigma_\rho |_{\sigma_z=0}}{\partial F / \partial \sigma_\theta |_{\sigma_z=0}} \left( \frac{Eu}{\rho} - \sigma_\theta + \nu\sigma_\rho \right) = 0.$$

Для изотропного тела функции пластичности является симметрической относительно главных компонент тензора напряжений [19, 25]. Поскольку в центре диска

$$\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0}$$

то

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \partial F / \partial \sigma_\rho|_{\sigma_z=0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \partial F / \partial \sigma_\theta|_{\sigma_z=0}.$$

Для гладких функций пластичности в центре диска радиальная деформация  $\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}$  принимает конечное значение. Поскольку в центре диска  $u|_{\rho=0}$ , то в малой окрестности точки  $\rho = 0$  ( $\rho \leq \delta$ ) приближенно можно полагать  $u = \mu\rho$  [4]. В зависимости от выбранного алгоритма решения задачи величину  $\mu$  определяем, например, из условия непрерывности перемещений на упругопластической границе или из других граничных условий. При выполнении численных расчетов принималось, что  $\delta = 10^{-10}$ .

Из сравнения рис.7 и рис.8 видно, что вблизи границы  $\rho = c_1$ , на которой для условия максимального приведенного напряжений реализуется сингулярный режим, при увеличении значения параметра  $n$  происходит рост градиента радиальной компоненты тензора пластических деформаций.

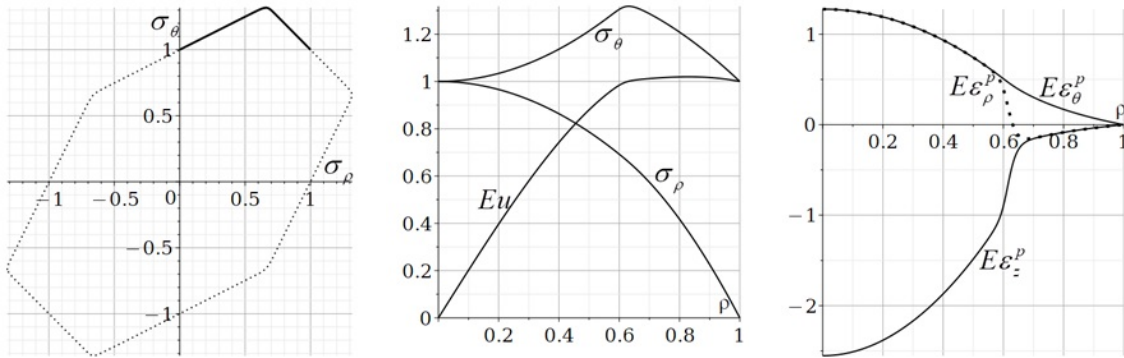


Рис. 7.  $n=30$ ,  $m=3.4177$ .

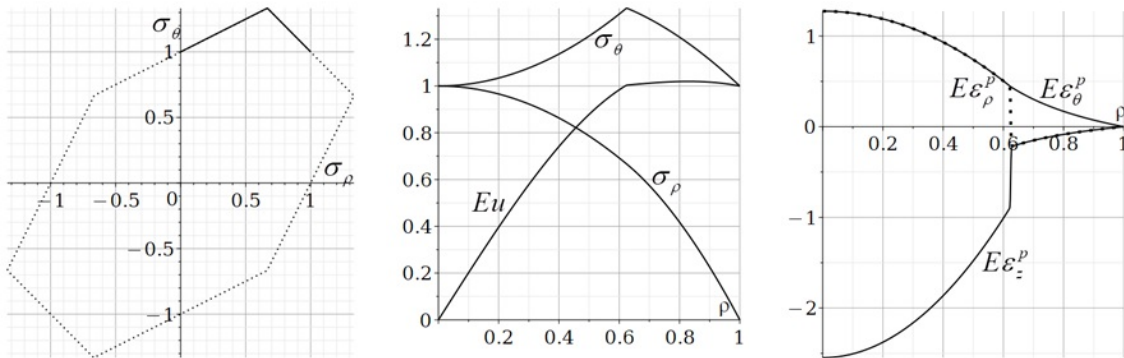


Рис. 8.  $n=500$ ,  $m=3.4177$ .

### Учет пластической сжимаемости

Влияние первого инварианта тензора напряжений на пластическое состояние диска рассматривалось, например, в [8]. Для изотропного идеально пластического тела функция пластичности является функцией инвариантов тензора напряжений [17, 21, 24]. Когда функция пластичности не зависит от первого инварианта тензора напряжений, тогда из ассоциированного закона следует, что след тензора пластических деформаций равен нулю [17, 24]. В этом случае функцию пластичности можно представить в виде функции главных значений девиатора напряжений или второго и третьего инвариантов девиатора напряжений. Наиболее известными условиями пластичности, не зависящими от первого инварианта тензора напряжений и определяющие выпуклые поверхности пластичности, является условие Треска [24], Ишлинского [14], Мизеса [25], Поля [26], Карафиллиса-Бойса [15] и их комбинации.

Рассмотрим вариант, когда в функцию пластичности Карафиллиса-Бойса [15] аддитивно добавлен первый инвариант тензора напряжений

$$F = \left( \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^{2n} + (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)^{2n} + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^{2n}}{2 + 2^{2n}} \right)^{1/2n} + \alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (1 + \alpha)k.$$

В данном случае согласно ассоциированному закону пластического деформирования имеем

$$\frac{\varepsilon_\rho^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho |_{\sigma_z=0}} = \frac{\varepsilon_\theta^p}{\partial F / \partial \sigma_\theta |_{\sigma_z=0}} = \frac{\varepsilon_z^p}{\partial F / \partial \sigma_z |_{\sigma_z=0}}. \quad (36)$$

Поэтому осредненная осевая пластическая деформация определяется из пропорций (36)

$$\varepsilon_z^p = \frac{\partial F / \partial \sigma_z |_{\sigma_z=0}}{\partial F / \partial \sigma_\rho |_{\sigma_z=0}} \varepsilon_\rho^p = \frac{\partial F / \partial \sigma_z |_{\sigma_z=0}}{\partial F / \partial \sigma_\theta |_{\sigma_z=0}} \varepsilon_\theta^p.$$

На рис.9 показаны графики, годографа напряжений, напряжений, пластических деформаций и средней пластической деформации  $\varepsilon = (\varepsilon_\rho^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p)/3$ .

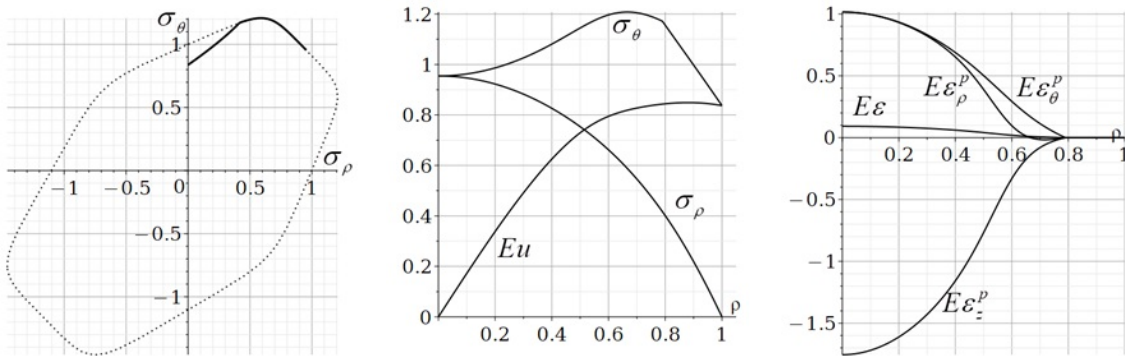


Рис. 9.  $n = 6, \alpha = 0.05, m = 3.1984, c = 0.79$ .

### Заключение

Переход от трехмерной модели к обобщенному плоскому напряженному состоянию, когда рассматриваются осредненные по толщине диска параметры математической модели, при учете пластической сжимаемости, позволяет определить компоненту осевой пластической деформации из осредненных соотношений ассоциированного закона пластического течения или пластического деформирования.

Алгоритм решения задачи о тонком быстровращающемся диске в рамках теории малых деформаций, рассмотренный в данной работе, позволяет выбирать любые функции пластичности. В качестве примера рассматривались условия пластичности максимального приведенного напряжения, условие пластичности Карафиллиса-Бойса и его модификация для учета пластической сжимаемости.

Полученные результаты показывают, что в зависимости от значения параметра нагрузки  $m$ , в пластической области выполняться один или три режима условия пластичности максимального приведенного напряжения. При этом сингулярный режим не будет выполняться в некоторой 2D области, а реализуется только на границе перехода от одного регулярного режима к другому. При увеличении значения параметра нагрузки  $m$ , когда в пластической области реализуются сингулярный режим, образуется область повторного пластического деформирования и в рамках теории пластического течения при интегрировании соотношений ассоциированного закона, необходимо это учитывать.

В рамках деформационной теории пластического деформирования получаем аналитическое решение задачи. При этом алгоритм решения задачи требует рассмотрение каждого режима в отдельности с учетом сопряжения значения искомых величин на границе перехода к другому режиму, что делает алгоритм решения задачи несколько громоздким.

Если с диска, находящегося в предельном состоянии полностью снять нагрузку, то он полностью переходит в упругое состояние, то есть не возникает зоны повторного пластического деформирования.

При выборе гладкой функции пластичности задача в пластической области решается численно. Увеличение значения параметра  $n$  в условии пластичности Карафиллиса-Бойса позволяет получить кривую пластичности, которая с необходимой точностью позволяет аппроксимировать шестиугольник Ишлинского. При этом будет выполняться непрерывность радиальных пластических деформаций. Также, при увеличении, в условии пластичности Карафиллиса-Бойса значения параметра  $n$ , в окрестности линии выполнения сингулярного режима условия Ишлинского, появляется область сильного изменения радиальной компоненты тензора пластических деформаций. При  $n \rightarrow \infty$  кривая пластичности Карафиллиса-Бойса совпадает с шестиугольником пластичности Ишлинского; при выборе ассоциированного закона пластического деформирования в пластической области появляется линия разрыва значений радиальной компоненты тензора пластических деформаций.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Авторы внесли равный вклад в проведение исследований и написание рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** The authors made an equal contribution to the research and writing of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Gamer U.* Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // *Ingenieur-Archiv*. – 1984. – Vol. 54, no. 3. – P. 345–354.
2. *Laszlo F.* Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation // *ZAMM*. – 1925. – Vol. 5, no. 4. – P. 281–293.
3. *Rees D. W. A.* Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*. – 1999. – Vol. 7, no. 4. – P. 281–288.
4. *Соколовский В.* Теория пластичности. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.
5. *Gamer U.* Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // *Transactions ASME: Journal of Applied Mechanics*. – 1983. – Vol. 50, no. 2. – P. 676–678.
6. *Semka E., Artemov M., Babkina Y.* Mathematical modeling of rotating disk states // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2020. – Vol. 1479. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122.
7. *Артемов М., Якубенко А.* Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. – 2014. – № 1. – С. 30–38.
8. *Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs // *Archive of Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 86, no. 1/2. – P. 235–244. – DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9.
9. *Артемов М., Барановский Е., Меджидов Р.* О появлении пластических областей во вращающемся диске // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2024. – № 1. – С. 21–39.
10. *Лямина Е., Новожилова О.* Дизайн равнопрочного вращающегося диска // *Инновационные транспортные системы и технологии*. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 122–134.
11. *Прокудин А.* Расчет профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины с учетом анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. – 2024. – Т. 28, № 4. – С. 701–720.
12. *Alexandrov S., Rynkovskaya M., Jeng Y.-R.* Design of equi-strength annular disks made of functionally graded materials // *Mechanics Based Design of Structures and*

- Machines. – 2023. – Vol. 52, no. 9. – P. 7045–7062. – DOI: 10.1080/15397734.2023.2297241.
13. On the best volume fraction distributions for functionally graded cylinders, spheres and disks – A pseudospectral approach / H. Abdalla [et al.] // Computational Structures. – 2023. – Vol. 311. – P. 116784. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.116784.
  14. *Ишлинский А.* Гипотеза прочности формоизменения // Ученые записки МГУ. – Механика. – 1940. – Т. 46. – С. 117–124.
  15. *Karafillis A., Boyce M.* A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – Vol. 41, no. 12. – P. 1859–1886.
  16. *Freudenthal A., Geiringer H.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum // Elasticity and Plasticity (Elastizität und Plastizität): Handbuch der Physik (Encyclopedia of Physics). 3(6) / ed. by S. Flügge. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1958. – P. 229–433.
  17. *Ивлев Д.* Теория идеальной пластичности. – Москва : Наука, 1966. – 232 с.
  18. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.
  19. *Ишлинский А., Ивлев Д.* Математическая теория пластичности. – Москва : Физматлит, 2001. – 704 с.
  20. *Timoshenko S., Goodier J.* Theory of Elasticity. – 3rd. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 591 p.
  21. *Chakrabarty J.* Theory of Plasticity. – Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. – 882 p.
  22. *Aleksandrova N., Artemov M., Baranovskii E.* Stress/strain state in a rotating disk // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1203. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012001. – International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems", Voronezh State University.
  23. *Ивлев Д., Быковцев Г.* Теория упрочняющегося пластического тела. – Москва : Наука, 1971. – 232 с.
  24. *Tresca H.* Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1864. – Vol. 59. – P. 754–758.
  25. *Kachanov L.* Fundamentals of the Theory of Plasticity. – Moscow : Mir Publishers, 1974. – 482 p.
  26. *Paul B.* Mathematical criteria of plastic flow and fracture // Fracture. Vol. 2 / ed. by H. Liebowitz. – New York, London, 1968. – P. 336–520.

## REFERENCES

1. *Gamer U.* Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // Ingenieur-Archiv. – 1984. – Vol. 54, no. 3. – P. 345–354.
2. *Laszlo F.* Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation // ZAMM. – 1925. – Vol. 5, no. 4. – P. 281–293.
3. *Rees D. W. A.* Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM). – 1999. – Vol. 7, no. 4. – P. 281–288.
4. *Sokolovsky V.* Theory of plasticity. – Moscow : Higher school, 1969. – 608 p.

5. *Gamer U.* Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // Transactions ASME: Journal of Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 50, no. 2. – P. 676–678.
6. *Semka E., Artemov M., Babkina Y.* Mathematical modeling of rotating disk states // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122.
7. *Artemov M., Yakubenko A.* Mathematical modeling of mechanical behavior of a rotating disk // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. – 2014. – No. 1. – P. 30–38.
8. *Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 86, no. 1/2. – P. 235–244. – DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9.
9. *Artemov M., Baranovsky E., Medzhidov R.* On the appearance of plastic regions in a rotating disk // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. – 2024. – Vol. 59, no. 1. – P. 21–39.
10. *Lyamina E., Novozhilova O.* Design of an equal-strength rotating disk // Innovative transport systems and technologies. – 2023. – Vol. 9, no. 1. – P. 122–134.
11. *Prokudin A.* Calculation of the profile of an equal-strength rotating disk of variable thickness taking into account anisotropy and different strength under tension and compression // Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 28, no. 4. – P. 701–720.
12. *Alexandrov S., Rynkovskaya M., Jeng Y.-R.* Design of equi-strength annular disks made of functionally graded materials // Mechanics Based Design of Structures and Machines. – 2023. – Vol. 52, no. 9. – P. 7045–7062. – DOI: 10.1080/15397734.2023.2297241.
13. On the best volume fraction distributions for functionally graded cylinders, spheres and disks – A pseudospectral approach / H. Abdalla [et al.] // Computational Structures. – 2023. – Vol. 311. – P. 116784. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.116784.
14. *Ishlinsky A.* Hypothesis of strength of deformation // Scientific Notes of Moscow State University. Mechanics. – 1940. – Vol. 46. – P. 117–124.
15. *Karafillis A., Boyce M.* A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – Vol. 41, no. 12. – P. 1859–1886.
16. *Freudenthal A., Geiringer H.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum // Elasticity and Plasticity (Elastizität und Plastizität): Handbuch der Physik (Encyclopedia of Physics). 3(6) / ed. by S. Flügge. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1958. – P. 229–433.
17. *Ivlev D.* Theory of ideal plasticity. – Moscow : Nauka, 1966. – 232 p.
18. *Novatsky V.* Theory of elasticity. – Moscow : Mir, 1975. – 872 p.
19. *Ishlinsky A., Ivlev D.* Mathematical theory of plasticity. – Moscow : Fizmatlit, 2001. – 704 p.
20. *Timoshenko S., Goodier J.* Theory of Elasticity. – 3rd. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 591 p.
21. *Chakrabarty J.* Theory of Plasticity. – Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. – 882 p.



22. *Aleksandrova N., Artemov M., Baranovskii E.* Stress/strain state in a rotating disk // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1203. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012001. – International Conference Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, Voronezh State University.
23. *Ivlev D., Bykovtsev G.* Theory of a hardening plastic body. – Moscow : Nauka, 1971. – 232 p.
24. *Tresca H.* Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1864. – Vol. 59. – P. 754–758.
25. *Kachanov L.* Fundamentals of the Theory of Plasticity. – Moscow : Mir Publishers, 1974. – 482 p.
26. *Paul B.* Mathematical criteria of plastic flow and fracture // Fracture. Vol. 2 / ed. by H. Liebovitz. – New York, London, 1968. – P. 336–520.

М. И. Быкова, А. В. Ковалев, Н. В. Минаева, А. И. Шашкин

## ПОРОЖДЕНИЕ ПЕРЕДНИХ КРОМОК ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО И ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГОВ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КРОМКИ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА ОТ ЖЁСТКОЙ ГРАНИЦЫ

*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию формирования и распространения фронта продольной и поперечно-сдвиговой трещины при взаимодействии с жесткой границей. Предлагается концепция моделирования, согласно которой передняя кромка трещины представлена распространяющейся ортогональным образом относительно фронта основной продольной волны пластического нагружения областью, где наблюдаются высокие градиенты скоростей и напряжений. Изучена зависимость интенсивности вторичных трещин простого сдвига и отрыва от угла падения первичной трещины, а также физико-механических характеристик материала. В результате исследования выявлены конкретные условия, при которых отражение отсутствует, что способствует формированию иных видов трещин, отличных от исходных продольных и поперечных сдвигов.

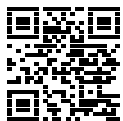
**Ключевые слова:** трещины, продольный сдвиг, поперечный сдвиг, отражение, пластическое нагружение

**Быкова Мария Игоревна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа; e-mail: bykova\_mi@amm.vsu.ru; AuthorID: 124717

**Ковалев Алексей Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования; e-mail: kovalev@amm.vsu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

**Минаева Надежда Витальевна**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: minaeva@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-9366-5575>; AuthorID: 11715

**Шашкин Александр Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического и прикладного анализа; e-mail: shashkin@amm.vsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9925-5019>; AuthorID: 156046



**для цитирования:** Быкова М. И., Ковалев А. В., Минаева Н. В., Шашкин А. И. Порождение передних кромок трещин продольного и поперечного сдвигов при отражении предельной кромки трещины продольного сдвига от жёсткой границы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 168–184. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.010. EDN: JIMZGG

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

M. I. Bykova, A. V. Kovalev, N. V. Minaeva, A. I. Shashkin

## GENERATION OF THE LEADING EDGES OF LONGITUDINAL AND TRANSVERSE SHEAR CRACKS WHEN THE LEADING EDGE OF A LONGITUDINAL SHEAR CRACK REFLECTS FROM A RIGID BOUNDARY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

**Abstract.** The research focuses on studying the formation and propagation of the fronts of longitudinal and transversely sheared cracks interacting with a rigid boundary. A novel concept of modeling is proposed, according to which the leading edge of the crack is represented by a region characterized by high gradients of velocities and stresses, spreading orthogonally relative to the main front of the plastic loading wave. The investigation examines the dependency of the intensity of secondary simple-shear and tensile cracks on the angle of incidence of the initial crack and the physico-mechanical characteristics of the material. As a result of the study, specific conditions have been identified under which reflection does not occur, thus facilitating the formation of other types of cracks distinct from the original longitudinal and transverse shear ones.

**Keywords:** cracks, longitudinal shear, transverse shear, reflection, plastic loading

**Maria I. Bykova**, PhD (Phys.–Math.), Associate Professor, Department of Mathematical and Applied Analysis; e-mail: bykova\_mi@amm.vsu.ru; AuthorID: 124717

**Alexey V. Kovalev**, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia; e-mail: kovalev@amm.vsu.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

**Nadezhda V. Minaeva**, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia; e-mail: minaeva@yandex.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-9366-5575>; AuthorID: 11715

**Alexander I. Shashkin**, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, Head of the Department of Mathematical and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia; e-mail: shashkin@amm.vsu.ru;

<https://orcid.org/0000-0001-9925-5019>; AuthorID: 156046



**to cite this article:** Bykova M. I., Kovalev A. V., Minaeva N. V., Shashkin A. I. Generation of the leading edges of longitudinal and transverse shear cracks when the leading edge of a longitudinal shear crack reflects from a rigid boundary // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 168–184. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.010

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 01.05.25;

accepted: 10.07.25;

published: 19.12.25.

**Введение.** Физической трещиной в твёрдых телах будем называть поверхность  $S$ , ограниченную кривой  $L$  – кромкой трещины. Поскольку на поверхности  $S$  возможно возникновение разрывов величин перемещений и напряжений, введем обозначения сторон  $\hat{S}$  и  $\check{S}$  поверхности  $S$ , принадлежащих к двум областям тела, разделённого данной поверхностью.

Изучение эволюции трещины будем проводить путем анализа роста поверхности  $S$  вдоль ее кромки  $L$ . На расстоянии от кромки  $L$ , существенно превышающем ее линейные размеры, материал будем рассматривать как идеально упругий. В свою очередь, в непосредственной близости к вершине трещины (в окрестности кромки  $L$ ), наблюдается разрушение материала посредством отрыва или сдвига, что свидетельствует о неприменимости классической упругой модели к описанию процесса в вершине трещины [1–3].

В [2] показано, что в вершине трещины в наномасштабе протекают процессы физического и химического взаимодействия частиц материала плёночного характера. Данные взаимодействия являются причиной необратимого формоизменения тела.

В окрестностях вершины трещины статические деформации могут адекватно аппроксимироваться моделью пластического течения [1–3]. При переходе к рассмотрению динамической постановке в первом приближении данный процесс может быть рассмотрен как вязкопластическое течение материала [4, 5] с учетом влияния скорости деформирования.

Экспериментальные исследования указывают на сложность определения скорости  $s$  распространения трещины ввиду сравнительно малых размеров исследуемых образцов и большим значением самой скорости, соизмеримой со скоростями  $c_1$  или  $c_2$  распространения продольных  $\Sigma_1$  или сдвиговых  $\Sigma_2$  упругих волн [3].

Теория конечных деформаций допускает существование поверхности разрыва полей напряжений и скоростей для математической модели динамического деформирования упруговязкопластического материала. Данные поверхности движутся со скоростями  $c_1$  и  $c_2$  упругих волн. Указанное допущение может быть использовано для описания движения передних кромок трещин продольного и поперечного сдвигов и передних кромок отрыва [6]. Процессы распространения поверхностей разрывов скоростей и напряжений рассмотрены в ряде работ [7, 8].

Интерес представляют закономерности распространения передних кромок трещин и их отражения от разного вида границ – жёстко закреплённых или с другими заданными граничными условиями.

Одной из возможных моделей динамического деформирования материала в окрестности вершины трещины, учитывающей свойства упругости, пластичности и вязкости, является модель Бингама.

**1. Основные закономерности деформирования упруговязкопластического материала на передних кромках трещин.** Согласно модели

упруговязкопластического материала [5–7, 9–11], используемой для описания поведения материала около вершины растущей трещины, до тех пор, пока действующие напряжения ниже предела пластичности Мизеса  $K$ , материал ведет себя исключительно упруго. После превышения указанного предела начинают возникать дополнительные пластические деформации, сопровождающиеся затухающим эффектом вязкого сопротивления.

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 2\mu e_{ij}^p; \quad e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p; \quad e_{ij}^p = e_{ij}^v; \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = \frac{(I_2 - K\sqrt{2}) \sigma'_{ij}}{I_2 \eta}. \quad (1)$$

Здесь:  $e_{ij} = \frac{(u_{i,j} + u_{j,i})}{2}$  - полные деформации по Коши;  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ;  $I_2 = (\sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{\frac{1}{2}}$ , где  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  - девиаторные компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ ;  $\lambda$ ,  $\mu$  - упругие параметры Ламе;  $\eta$  - коэффициент вязкости.

Реологические соотношения, представленные системой уравнений (1), включающую в себя линейные уравнения в частных производных и полулинейные уравнения для скоростей пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t}$ . Критерий начала пластических процессов определяется условием пластичности Мизеса, которое выражено следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}^p = 0, \text{ если } \sigma_{ij}^p \sigma_{ij}^p - 2K^2 < 0; \quad \varepsilon_{ij}^p \neq 0, \text{ если } \sigma_{ij}^p \sigma_{ij}^p - 2K^2 \geq 0. \quad (2)$$

Модель динамических деформаций упруговязкопластичного материала в области передней кромки трещины отрыва представлена полным набором уравнений, число которых строго соответствует количеству неизвестных функций, необходимых для полного описания напряженно-деформированного состояния. Основой данной модели служат реологические уравнения, устанавливающие связь между механическими характеристиками материала и действующими внешними силами, дополненные уравнениями движения, выраженными через напряжения.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i; \quad \text{где } b_i \text{ -- массовые силы} \quad (3)$$

и уравнением неразрывности  $\rho = \rho_0 = const$  где  $\rho$  - плотность среды.

Рассмотрим систему уравнений (1)-(3), содержащую частные производные по  $x$  и времени  $t$ , на переднем фронте пластического предвестника трещины  $\Sigma_\delta$ . Для этого преобразуем данную систему, записав её в подвижной системе координат, где  $y$  - криволинейные координаты в локальной подвижной системе координат,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial n} n_i + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\delta f}{\delta t} - c \frac{\partial f}{\partial n}, \quad (i = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь  $\frac{\delta f}{\delta t}$  - локальная производная по времени  $t$  от функции, заданной на подвижной поверхности  $\Sigma$ ;  $g^{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta}$  - метрический тензор.

Реологические уравнения (1) и уравнения движения (3), записанные в подвижной системе координат, связанной с подвижной передней кромкой трещины, принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu (e_{ij} - e_{ij}^p), \\ \dot{e}_{ij}^p &= \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = \frac{\delta e_{ij}^p}{\delta t} - c \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} = \frac{I_2 - K\sqrt{2}}{I_2 \eta} \sigma'_{ij}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial n} n_j + \frac{\partial u_j}{\partial n} n_i + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial u_j}{\partial y_\alpha} \right), \\ v_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\delta u_i}{\delta t} - c \frac{\partial u_i}{\partial n}, \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \rho \frac{\delta v_i}{\delta t} - c \frac{\partial v_i}{\partial n} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial n} n_j + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_\alpha} + b_i.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь использована связь полной и локальной производных на переднем фронте трещины.

Представление решений для скоростей и напряжений в виде степенного ряда с разрывом первого рода при  $n = 0$

$$f(n, y_1, y_2, t) = \sum \frac{1}{l!} \cdot \frac{\partial^l f(0, y_1, y_2, t)}{\partial n^l} n^l. \quad (6)$$

относится к классу обобщённых функций, не имеющих нормальной производной в точке разрыва и подчиняющихся дифференциальным законам (5) в интегральной форме. Последовательно применяя интегрирование уравнений (5) по  $n$  на отрезке от  $-\varepsilon$  до  $+\varepsilon$  и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  [12], получим следующие уравнения:

$$-\rho c [v_i] = [\sigma_{ij}] n_j, [e_{ij}^p] = 0, \quad \left[ \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} \right] \neq 0. \quad (7)$$

Физический смысл второго уравнения в (7) заключается в следующем: пластические деформации  $e_{ij}^p$  непрерывны на поверхности  $\Sigma_\delta$ , являющейся предвестником трещины. При этом возникает градиент пластических деформаций:

$$[e_{ij}^p] = 0; \quad \left[ \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} \right] \neq 0. \quad (8)$$

Система уравнений (7) в части реологических уравнений и выражений для деформаций  $e_{ij}$  и скоростей  $v_i$ , записанная в терминах разрывов основных величин на поверхности предвестника  $\Sigma_\delta$ , принимает вид

$$\begin{aligned}[\sigma_{ij}] &= \lambda [e_{kk}] \delta_{ij} + 2\mu ([e_{ij}] - [e_{ij}^p]); \quad [v_i] = \frac{\delta [u_i]}{\delta t} - c \left[ \frac{\partial u_i}{\partial n} \right]; \\ [e_{ij}] &= \frac{1}{2} \left( [u_{i,j}] + [u_{j,i}] + g^{\alpha\beta} x_{j,\beta} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right] + g^{\alpha\beta} x_{i,\beta} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial y_\alpha} \right] \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (7)-(9) является однородной системой линейных алгебраических уравнений. Неизвестными величинами в ней являются скачки скоростей  $[v_i]$ , градиентов перемещений  $\left[ \frac{\partial u_i}{\partial n} \right]$ , напряжений  $[\sigma_{ij}]$ , перемещений  $[u_i]$  и градиентов перемещений  $\left[ \frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right]$  вдоль  $y_\alpha$ .

Система (5)-(9) может быть дополнена условиями сплошности материала и непрерывности перемещений вдоль  $\Sigma_\delta$  по  $y_\alpha$ , которые записываются в форме

$$\frac{\delta [u_i]}{\delta t} = 0; \quad \left[ \frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right] = \frac{\partial [u_i]}{\partial y_\alpha} = 0. \quad (10)$$

Исключая  $[\sigma_{ij}]$ ,  $[e_{ij}]$ ,  $[u_{i,j}]$  из уравнений (7) получаем

$$\rho c^2 [v_i] = (\lambda + \mu) [v_j] n_i n_j + \mu [v_i]. \quad (11)$$

Существует только два отличных от нуля решения для  $[v_i]$ :

$$[v_i] n_i = \omega_n, \quad \text{при условии } \rho c_1^2 = \lambda + 2\mu. \quad (12)$$

$$[v_i] \tau_i = \omega_\tau, \quad \text{при условии } \rho c_2^2 = \mu. \quad (13)$$

Решение разрывного типа, характеризуемое наличием резких изменений нормальной составляющей скорости  $[v_n] = \omega_n$  на границе движущегося со скоростью  $c_1$  фронта  $\Sigma_1$  и тангенциальной составляющей скорости  $[v_\tau] = \omega_\tau$  на фронте  $\Sigma_2$ , перемещающемся со скоростью  $c_2$ , реализуется исключительно вблизи краев развивающихся трещин.

Описанный подход учитывает особенности кинематики перемещения частиц материала в непосредственной близости от областей образования трещин продольного сдвига, отрыва и антиплоской деформации. Благодаря этому удается уточнить математическую модель, позволяющую описать движение частиц среды возле кромки трехмерной трещины, используя формализованные понятия скорости перемещения отдельных элементов вещества.

**2. Математическая модель передней кромки трещины.** Для исследования процессов, происходящих вблизи передней кромки  $L$  трещины, выделим ее  $\delta$  – окрестность, имеющую цилиндрическую форму с криволинейной осью  $L$ . Граница  $\Sigma_\delta$  этой области представляет собой поверхность слабых разрывов, возникающих вследствие начальных возмущений при зарождении процесса трещинообразования. Кривую  $L_\delta$ , расположенную на  $\Sigma_\delta$ , примем за предвестник появления передней трещины.

Пространственная траектория продвижения фронта волны-предвестника характеризуется кривой  $L_\delta$ , лежащей на поверхности  $\Sigma_\delta$ . Символы  $\wedge$  и  $\vee$  будут использоваться для обозначения значений функций выше и ниже следа  $L_\delta$  трещины соответственно.

Анализ соответствия кинематики движения частиц материала вблизи вершины трещины в перемещениях и кинематики поведения среды вблизи фронтов продольных и сдвиговых волн в скоростях перемещений позволяет сделать выводы:

- (1) Передняя кромка предвестника пространственной трещины  $L$  развивается вдоль направления, ортогонального волновой поверхности  $\Sigma_\delta$  с принадлежащей ей линией  $L_\delta$ , характеризующаяся разрывами скоростей и напряжений.

- Развитие трещины, вызванной продольным сдвигом, происходит со скоростью  $c_1$ , соответствующей скорости распространения продольных волн в упругом материале.
  - Движение фронта трещины, обусловленное антиплоским сдвигом или отрывом, протекает со скоростью  $c_2$ , равной скорости сдвиговых волн в среде.
- (2) В целях удобства введём характеристику интенсивности передней кромки трещины  $L_\delta$ , определяемой изменением скорости при прохождении через границу  $S$ .
- В случае трещины продольного сдвига на  $\Sigma_1$  интенсивность рассчитывается следующим образом

$$\omega_{nL} = \left( \hat{v}_n - \check{v}_n \right) \Big|_L = [v_n]_L. \quad (14)$$

- Для трещины антиплоского сдвига на  $\Sigma_2$  справедлива формула

$$\omega_{2L} = \left( \hat{v}_{\tau_2} - \check{v}_{\tau_2} \right) \Big|_L = [v_{\tau_2}]_L. \quad (15)$$

- Для трещины отрыва на  $\Sigma_2$  может быть использовано равенство

$$\omega_{1L} = \left( \hat{v}_{\tau_1} - \check{v}_{\tau_1} \right) \Big|_L = [v_{\tau_1}]_L. \quad (16)$$

Таким образом, классификация типа трещины основывается на типе предвестника  $\Sigma_1$  или  $\Sigma_2$ , сам факт существования передней кромки определяется интенсивностью фронта, обусловленной превышением динамического второго инварианта девиатора тензора напряжений над пределом пластичности  $K$ :  $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \geq K^2$ .

Покажем, что интенсивность трещины  $\omega_L$  (14)-(16) определяется интенсивностью соответствующих волн сильного разрыва  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$

В окрестности предвестника  $L$  трещины на  $\Sigma$  имеют место выражения

$$\begin{aligned} \hat{v} &= v^+ - [\hat{v}]; & \check{v} &= v^+ - [\check{v}]; \\ \omega_L &= \hat{v} - \check{v} = -[\hat{v}] + [\check{v}]. \end{aligned}$$

Предложим следующую концепцию оценки наличия и развития трещины в твёрдом теле: трещина возникает и распространяется, если на одной или обеих сторонах её передней кромки  $L$  наблюдается пластическое деформирование материала. Данный подход предполагает исследование механизма формирования и эволюции трещин путём подробного изучения напряжённо-деформированного состояния среды, находящегося за фронтом волн сильного разрыва.

**3. Кинематика отражения предельной пластической волны предельного сдвига от жёсткой границы.** Теоретические расчеты наряду с результатами экспериментальных наблюдений [3] подтверждают, что передние края трещин, находящиеся на границах волновых фронтов, формируются как ортогональные траектории распространения самих фронтов. Установлено, что



скорость продвижения этих краев абсолютно соответствует скоростям распространения продольных или сдвиговых волн в изучаемой среде.

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (17)$$

Процесс распространения передней кромки трещины описывается  $\delta$ -окрестностью пластичной зоны, которая создает механизм направленного распространения трещины перпендикулярно направлению движения фронта пластического нагружения. Например, для продольно-направленной трещины предполагается наличие разрывов скорости за фронтом продольной волны, пересекающей плоскость трещины.

Интенсивность передней кромки трещины оценивается через разницу продольных скоростей, рассчитанных выше и ниже плоскости самой трещины (14). Скорости за фронтом волны подчиняются фундаментальным законам вязкоупругопластического деформирования материала (11) и тесно связаны с характером отражения волновых фронтов от граничных поверхностей объекта. Такая постановка задачи позволяет выявить точные количественные связи, характерные для каждой отдельной ситуации распространения трещины.

Обозначим области за падающими и отражёнными волнами  $\Sigma_1, \Sigma_2$  как (1), (2) и (3) [12]. Исходя из условия одновременного присутствия в конкретной точке пространства трёх взаимодействующих волн  $\Sigma_1, \Sigma'_1$  и  $\Sigma'_2$  (штрихом обозначен фронт отраженной волны), можно заметить, что углы падения и отражения волн подчиняются закону Снеллиуса:

$$\frac{c_1}{\sin \varphi} = \frac{c_1}{\sin \varphi'} = \frac{c_2}{\sin \psi'}. \quad (18)$$

Из этого положения получаем соотношение углов

$$\sin \psi' = \frac{c_2}{c_1} \sin \varphi, \quad \varphi' = \varphi. \quad (19)$$

Условия совместности для напряжений и скоростей на фронте сильной волны перед  $\Sigma_1$  имеют вид:

$$-c_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega_n, \quad (20)$$

где  $\omega_n$  – скачок нормальной компоненты скорости на фронте волны и  $\omega_n = [v_i] n_i$ .

Условия (12) и (13) подчеркивают важный факт: источником фронта  $\Sigma_\delta$  предвестника пространственной трещины выступает волна продольной деформации для трещины продольного сдвига, распространяющаяся со скоростью  $c_1$  ( $\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu$ ), и волна сдвиговой деформации для трещин отрыва или поперечного сдвига, распространяющаяся со скоростью  $c_2$  ( $\rho c_2^2 = \mu$ ).

Связь между скачками напряжений и скачком скорости выражается таким образом:

$$[\sigma_{ij}] = -\frac{1}{c} \lambda [v_n] \delta_{ij} - \frac{1}{c} \mu ([v_i] n_j + [v_j] n_i).$$

Наконец, обратимся к рассмотрению траектории движения передней кромки трещины на фронте  $\Sigma_\delta$  волнового предвестника, которая представляется в виде пространственной кривой  $L_\delta$ , расположенной на поверхности  $\Sigma_\delta$ .

Рассмотрим след передней кромки трещины на фронте  $\Sigma_\delta$  волнового предвестника, который представлен пространственной кривой  $L_\delta$ , принадлежащей поверхности  $\Sigma_\delta$ .

Скачки скоростей и напряжений на отраженных волнах  $\Sigma'_1$  и  $\Sigma'_2$  связаны соотношениями

$$-c_1 [\sigma_{ij}]_1 = \left( \lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1, \quad [v_i]_1 = \omega_1 \cdot n_i^{(1)}. \quad (21)$$

$$-c_2 [\sigma_{ij}]_2 = \mu \left( \tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau, \quad [v_i]_2 = \omega_\tau \tau_i^{(2)} \quad (22)$$

Систему уравнений (20)-(22) дополним граничными условиями

$$v_i^{(3)} \cdot n_i = 0, \quad \text{где } v_i^{(3)} \text{ — скорость материала на границе в зоне (3)}. \quad (23)$$

Приведём выражения для компонент векторов  $\bar{n}$ ,  $\bar{n}^{(1)}$ ,  $\bar{n}^{(2)}$ ,  $\bar{\tau}^{(2)}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{T}$ :

$$\begin{aligned} \bar{n} &= (\sin \varphi, \cos \varphi, 0); \quad \bar{n}^{(1)} = (\sin \varphi', -\cos \varphi', 0) \\ \bar{n}^{(2)} &= (\sin \psi', -\cos \psi', 0); \quad \bar{\tau}^{(2)} = (\cos \psi', \sin \psi', 0); \\ \bar{N} &= (0, 1, 0); \quad \bar{T} = (1, 0, 0). \end{aligned} \quad (24)$$

Введем следующие величины на падающих и отражённых волнах:

$$[\sigma_{ij}]_0 = -\sigma_{ij}^{(1)}; \quad [\sigma_{ij}]_1 = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}; \quad [\sigma_{ij}]_2 = \sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(3)}. \quad (25)$$

Из (20)-(22) получим

$$\begin{aligned} -[\sigma_{ij}]_0 &= \frac{1}{c_1} (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega, \\ -[\sigma_{ij}]_1 &= \frac{1}{c_1} \left( \lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1, \quad -[\sigma_{ij}]_2 = \frac{1}{c_2} \mu \left( \tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Для вычисления интенсивности напряжений  $I_2^{(2)}$  и  $I_2^{(3)}$  определим напряжения в зонах (2) и (3), исключая скачки напряжений. Из формул (25)-(26) получим выражение для напряжений в зоне (3)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(3)} &= \frac{1}{c_1} (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega + \\ + \frac{1}{c_1} \left( \lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1 + \frac{\mu}{c_2} \left( \tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая соотношения (26)-(27), из формулы (25) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} &= \sigma_{ij}^{(3)} + [\sigma_{ij}]_2 = \frac{1}{c_1} (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega + \\ + \frac{1}{c_1} \left( \lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1 + \frac{\mu}{c_2} \left( \tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau - \frac{\mu}{c_2} \left( \tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau = \\ &= \frac{1}{c_1} (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega + \frac{1}{c_1} \left( \lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что на предельной продольной пластической волне  $\omega = \frac{\sqrt{3}K}{2\mu}$  и, вводя обозначение  $\tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$ , получим выражение для  $\omega$  через  $\tilde{c}$

$$\omega^2 = \frac{K^2}{\rho^2 \tilde{c} c_1^2 \left( \frac{10}{3} \tilde{c} - 1 \right)}. \quad (28)$$

Граничные условия отсутствия скорости  $v_i^{(3)} = 0$  на отражающей границе позволяют определить скачки скоростей на отражённых продольной и сдвиговой волнах. На отражённых волнах при условии  $v_i^{(3)} = 0$  имеем:

$$\begin{aligned} [v_i]' &= v_i^{(1)} - v_i^{(2)} = \omega'_n n'_i, \\ [v_i]'' &= v_i^{(2)} - v_i^{(3)} = \omega''_\tau \tau''_i. \end{aligned} \quad (29)$$

Складывая последние два уравнения, получим одно векторное уравнение

$$\omega'_n n'_i + \omega''_\tau \tau''_i = v_i^{(1)} = -\omega n_i. \quad (30)$$

В проекции на нормаль отражённой продольной волны  $n'_i$  и на касательное направление  $\tau''_i$  система уравнений (30) представляет собой систему двух линейных алгебраических уравнений для скачков отражённых волн  $\omega'_n$  и  $\omega''_\tau$ , которая получается путём умножения уравнения (30) на  $n'_i$  и  $\tau''_i$ .

$$\begin{aligned} 1) \omega'_n + \omega''_\tau \tau''_i n'_i &= -\omega n_i n'_i; \\ 2) \omega'_n n'_i \tau''_i + \omega''_\tau &= -\omega n_i \tau''_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Решение для скачка  $\omega'_n$  скорости на отражённой продольной волне получим, если первое уравнение системы (31) умножить на свёртку  $n'_k \tau''_k$  и сложить его со вторым уравнением. А решение для скачка  $\omega''_\tau$  получим, умножив второе уравнение системы (31) на свёртку  $n'_k \tau''_k$  и сложив его с первым.

$$\omega'_n = -\omega \frac{n_i n'_i - n_k \tau''_k n'_i \tau''_i}{1 - (n_i \tau''_i)^2}. \quad (32)$$

$$\omega''_\tau = -\omega \frac{n_i \tau''_i - (n_i n'_i) n_k \tau''_k}{1 - (n_i \tau''_i)^2}. \quad (33)$$

Выражения для скачков отражённых волн  $\omega'_n$  и  $\omega''_\tau$  удобнее представлять в безразмерном виде как коэффициенты отражения продольной и сдвиговой волн. Развёртывая скалярные произведения векторов  $n$ ,  $n'$ ,  $\tau''$  и используя закон Снелла (19), выражение для безразмерных коэффициентов отражения продольной и сдвиговой волн примут вид

$$\tilde{k}_1 = \frac{\omega'_n}{\omega} = \frac{\cos 2\varphi + \sin^2(1 - \tilde{c}^2)}{1 - \sin^2 \left( \tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1 - \tilde{c}^2 \sin^2 \varphi} \right)^2}. \quad (34)$$

$$\tilde{k}_2 = \frac{\omega''_\tau}{\omega} =$$

$$= \frac{-\left(\sin \varphi \cdot \sqrt{1 - \tilde{c}^2 \sin^2 \varphi} + \tilde{c} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi\right) - \cos 2\varphi \cdot \left(\sin \varphi \sqrt{1 - \tilde{c}^2 \sin^2 \varphi} - \tilde{c} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi\right)}{1 - \sin^2 \left(\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1 - \tilde{c}^2 \sin^2 \varphi}\right)^2}. \quad (35)$$

На рисунках 1 и 2 представлены 3d-графики коэффициентов отражения как функции угла падения  $\varphi$  и коэффициента  $\tilde{c} = t = \frac{c_2}{c_1}$ . Графики отражают факт увеличения коэффициентов отражения с увеличением угла  $\varphi$  и ростом отношения  $\frac{c_2}{c_1}$  скоростей продольной и сдвиговой волн.

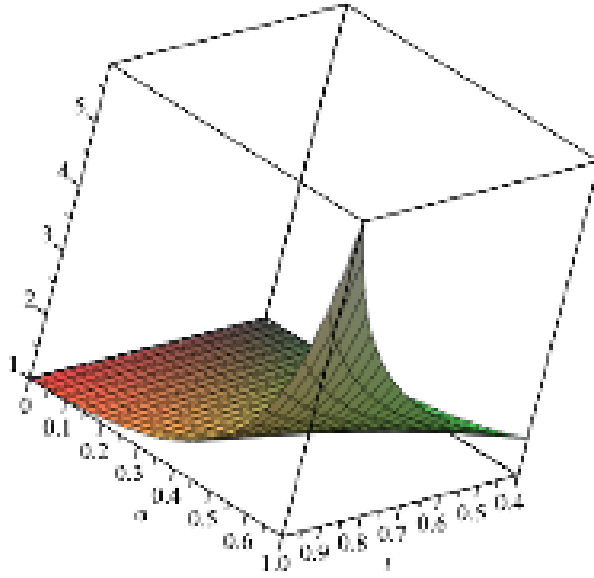


Рис. 1. Графическое представление коэффициента  $\tilde{k}_1 = \frac{\omega'_n}{\omega}$ .

В случае отражённой волны  $\Sigma'_1$  от жёсткой границы, интенсивность разрыва скоростей сдвига определяется выражением

$$\omega_{1L}^{\text{отр}} = \left(\hat{v}_1^- - \check{v}_1^-\right)\Big|_L = \tilde{k}_1 \hat{v}_1^+ - \tilde{k}_1 \check{v}_1^+ = \tilde{k}_1 \left(\hat{v}_1^+ - \check{v}_1^+\right) = \tilde{k}_1 \omega_{1L}^{\text{пад}}. \quad (36)$$

Отметим, что коэффициент отражения  $\tilde{k}_1$  скачка скорости волны продольного сдвига совпадает с коэффициентом отражения интенсивности передней кромки трещины. Тем самым, о величине отражённой передней кромки трещины можно судить по коэффициенту отражения разрыва скоростей продольной сдвиговой волны. Те же утверждения имеют место для скачка поперечной скорости на переднем фронте отражённой трещины поперечного сдвига

$$\omega_{2L}^{\text{отр}} = \left(\hat{v}_1^- - \check{v}_1^-\right)\Big|_L = \tilde{k}_2 \hat{v}_1^+ - \tilde{k}_2 \check{v}_1^+ = \tilde{k}_2 \left(\hat{v}_1^+ - \check{v}_1^+\right) = \tilde{k}_2 \omega_{1L}^{\text{пад}}. \quad (37)$$

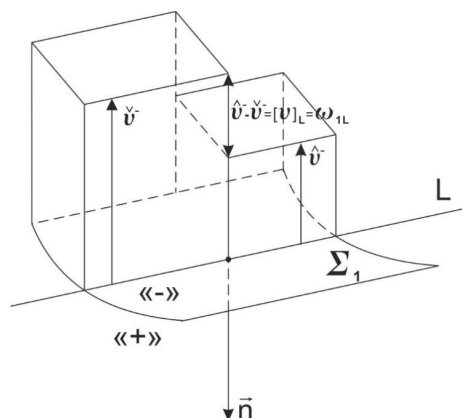


Рис. 2. Графическое представление коэффициента  $\tilde{k}_2 = \frac{\omega''}{\omega}$ .

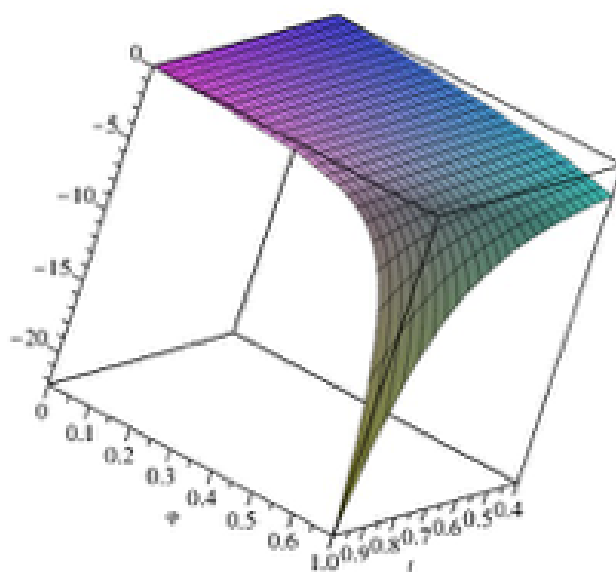


Рис. 3. Графическое представление поведения скорости сдвига за фронтом продольной волны на передней кромке  $L$  волны продольного сдвига.

Таким образом, на рисунках 1, 2 представлены графики отражения скачков скорости на передних кромках отражённых трещин продольного и поперечного сдвигов. Отражённые передние кромки фронтов продольных и поперечных волн не всегда являются трещинами, поскольку напряжённое состояние за ними может быть как упругим, так и пластическим.

**4. Условие зарождения отражённых передних кромок трещин продольного и поперечного сдвигов.** Существование отражённых трещин

продольного и поперечного сдвигов определяется величиной пластического состояния, которое оценивается интенсивностью напряжённого состояния  $I_2$  в зонах (2) и (3). При  $\frac{I_2^{(2)}}{2K^2} > 1$  и  $\frac{I_2^{(3)}}{2K^2} > 1$  имеет место отражение трещин от жёсткой границы.

Напряжения в зонах (2) и (3) могут быть представлены и через скачки скоростей:

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(1)} - [\sigma_{ij}]_1 = \frac{1}{c_1} \left( (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n'_i n'_j) \omega'_n - (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega \right); \quad (38)$$

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \frac{1}{c_1} (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega + \frac{1}{c_1} (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n'_i n'_j) \omega'_n + \frac{\mu}{c_2} (\tau''_i n''_j + \tau''_j n''_i) \omega''_\tau; \quad (39)$$

$$\sigma_{kk}^{(2)} = \frac{1}{c_1} (3\lambda + 2\mu) (\omega'_n - \omega); \quad (40)$$

$$\sigma_{kk}^{(3)} = \frac{1}{c_1} (3\lambda + 2\mu) (\omega + \omega'_n); \quad (41)$$

$$\sigma'_{kk}{}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{c_1} (3\lambda + 2\mu) (\omega'_n - \omega) \delta_{ij}; \quad (42)$$

$$\sigma'_{kk}{}^{(3)} = \sigma_{ij}^{(3)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{c_1} (3\lambda + 2\mu) (\omega + \omega'_n) \delta_{ij}. \quad (43)$$

Выражение  $I_2^{(2)}$  в зоне (2) представимо в виде функции от  $\varphi$  и от  $\tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$ :

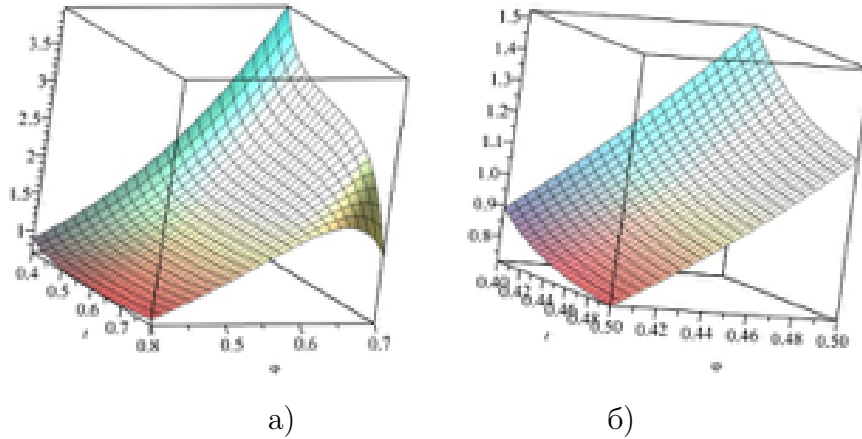
$$\begin{aligned} I_2^{(2)} = & \frac{K\tilde{c}}{\left(\frac{10}{3}\tilde{c}-1\right)} \left\{ \left( \left( \frac{\cos 2\varphi + \sin^2 \varphi \cdot (1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right)^2 - 1 \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left( 3\tilde{c}^2 (1-2\tilde{c}^2)^2 + 2\tilde{c} (1-2\tilde{c}^2) + 4 \right) - \\ & \left. - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\cos 2\varphi + \sin^2 \varphi \cdot (1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} - 1 \right)^2 \cdot (3\tilde{c} (1-2\tilde{c}^2) + 2)^2 \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

Выражение  $I_2^{(3)}$  в зоне (3) представимо в виде функции от  $\varphi$  и от  $\tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$ :

$$\begin{aligned} I_2^{(3)} = & \frac{K(4\tilde{c}^4 + 3(1-2\tilde{c}^2)^2 + 2\tilde{c}^2(1-2\tilde{c}^2))}{\tilde{c}\left(\frac{10}{3}\tilde{c}-1\right)} \left( 1 + \left( \frac{\cos 2\varphi + \sin^2 \varphi \cdot (1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right)^2 \right) + \\ & + \frac{2K\tilde{c}^5}{\frac{10}{3}\tilde{c}-1} \left( \frac{-\sin \varphi (\sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi + \tilde{c} \cdot \cos \varphi) - \cos 2\varphi \sin \varphi (\sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi - \tilde{c} \cdot \cos \varphi)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right)^2 + \\ & + \frac{K(4\tilde{c}^4 \cos^2 2\varphi + 3(1-2\tilde{c}^2)^2 + 4\tilde{c}^2(1-2\tilde{c}^2))}{\tilde{c}\left(\frac{10}{3}\tilde{c}-1\right)} \left( \frac{\cos 2\varphi + \sin^2 \varphi \cdot (1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right)^2 + \\ & + \frac{2K\tilde{c}}{\frac{10}{3}\tilde{c}-1} \left( \frac{-\sin \varphi (\sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi + \tilde{c} \cdot \cos \varphi) - \cos 2\varphi \sin \varphi (\sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi - \tilde{c} \cdot \cos \varphi)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right) \times \\ & \times \left( \tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi \right) \left( \tilde{c} \sin^3 \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2K\tilde{c}}{\frac{10}{3}\tilde{c}-1} \left( \frac{-\sin\varphi(\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi}+\tilde{c}\cdot\cos\varphi)-\cos 2\varphi\sin\varphi(\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi}-\tilde{c}\cdot\cos\varphi)}{1-\sin^2\varphi\cdot(\tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi})} \right) \times \\
 & \times \left( \tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi} \right) \left( \tilde{c}\sin^3\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi} \right) \times \\
 & \times \left( \frac{-\sin\varphi(\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi}+\tilde{c}\cdot\cos\varphi)-\cos 2\varphi\sin\varphi(\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi}-\tilde{c}\cdot\cos\varphi)}{1-\sin^2\varphi\cdot(\tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi})} \right) + \\
 & + \left( \frac{\cos 2\varphi+\sin^2\varphi\cdot(1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2\varphi\cdot(\tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi})} \right)^2 - \frac{K(4\tilde{c}^4+9(1-2\tilde{c}^2)^2+12\tilde{c}^2(1-2\tilde{c}^2))}{3\tilde{c}(\frac{10}{3}\tilde{c}-1)} \times \\
 & \times \left( 1 + \left( \frac{\cos 2\varphi+\sin^2\varphi\cdot(1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2\varphi\cdot(\tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi})} \right)^2 \right).
 \end{aligned}$$

На рисунках 4 представлены 3d –графики величины  $\frac{I_2^{(2)}}{2K^2}$  в зоне (2) для различных интервалов изменения  $\varphi$  и  $\tilde{c} = t$ : а)  $0,4 < \varphi < 0,8$ ,  $0,4 < \tilde{c} = t < 0,7$  и б)  $0,4 < \varphi < 0,5$ ,  $0,4 < \tilde{c} = t < 0,5$



**Рис. 4.** а)  $0,4 < \varphi < 0,8$ ,  $0,4 < \tilde{c} = t < 0,7$ ; б)  $0,4 < \varphi < 0,5$ ,  $0,4 < \tilde{c} = t < 0,5$

На рисунках 5 представлены 3d-графики величины  $\frac{I_2^{(3)}}{2K^2}$  в зоне (3) для различных интервалов изменения  $\varphi$  и  $\tilde{c} = t$ : а)  $0,4 < \varphi < 0,8$ ,  $0,4 < \tilde{c} = t < 0,7$  и б)  $0,6 < \varphi < 0,7$ ,  $0,6 < \tilde{c} = t < 0,7$

Графические представления величин  $\frac{I_2^{(2)}}{2K^2} > 1$  и  $\frac{I_2^{(3)}}{2K^2} > 1$  позволяют выделить интервалы углов падения  $\varphi$  и коэффициента  $\tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$ , при которых возможно существование отражённых трещин продольного и поперечного сдвигов от жёсткой границы. В противном случае, когда  $\frac{I_2^{(2)}}{2K^2} < 1$  и  $\frac{I_2^{(3)}}{2K^2} < 1$ , отражённые трещины продольного и поперечного сдвигов отсутствуют, то есть падающая волна не всегда порождает отражённые трещины продольного и поперечного сдвигов.

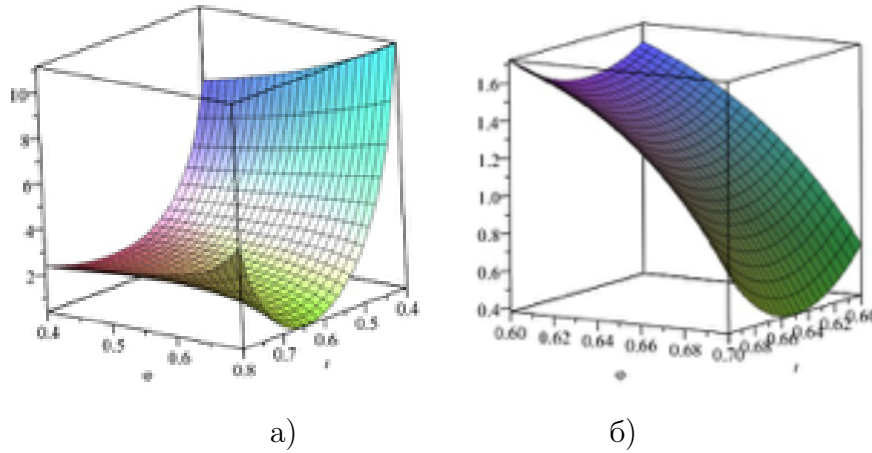


Рис. 5. а)  $0,4 < \varphi < 0,8$ ,  $0,4 < \tilde{c} = t < 0,7$ ; б)  $0,6 < \varphi < 0,7$ ,  $0,6 < \tilde{c} = t < 0,7$

**Заключение.** Кинематические закономерности отражения предельной пластической волны продольного деформирования  $\Sigma_1$  показывают:

- (1) Коэффициенты  $\tilde{k}_1$  и  $\tilde{k}_2$  скачков скоростей на передних кромках трещин возрастают с увеличением угла падения  $\varphi$  трещины продольного сдвига и с увеличением  $t = \tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$ .
- (2) Величины вторых инвариантов  $I_2^{(2)}$  и  $I_2^{(3)}$  девиатора тензора напряжений в зонах (2) и (3) растут с увеличением угла падения  $\varphi$ .
- (3) Зависимость от отношения скоростей продольных и сдвиговых волн  $t = \tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$  является более сложной, так что с увеличением  $t$  при некоторых  $t = t^*$  ( $t^* \in [t_1; t_2]$ ) не отражаются трещины продольного и поперечного сдвигов, но при дальнейшем увеличении  $t > t_2$  возможно отражение трещины продольного и поперечного сдвигов.
- (4) Падающая передняя кромка трещины продольного сдвига, следующая за фронтом падающей волны  $\Sigma_1$ , может порождать передние фронты трещины продольного сдвига, следующие за отражённой продольной волной и передний фронт трещины отрыва за фронтом отражённой сдвиговой волны. Это возможно только в случаях возникновения пластического деформирования в окрестности передних кромок трещин за фронтами отражённых волн, ограничивающих зоны (2) и (3).



## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** А. В. Ковалев, Н. В. Минаева, А. И. Шашкин – постановка задачи, обсуждение методов решения, редактирование текста рукописи. М. И. Быкова – построение математической модели, вычислительный эксперимент, написание текста рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении данного исследования.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** A. V. Kovalev, N. V. Minaeva, A. I. Shashkin – problem statement, discussion of solution methods, editing of the manuscript text. M. I. Bykova – construction of the mathematical model, computational experiment, writing of the manuscript text.

**Competing interests.** The authors declare no obvious or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**Funding.** The authors declare no external funding for this study.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. – Москва : Наука, 1974. – 312 с.
2. Иевлев В. М. Структура поверхностей раздела в пленках металлов. – Москва : Металлургия, 1992. – 172 с.
3. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамика хрупкого разрушения. – Москва : Машиностроение, 1988. – 240 с.
4. Кукуджанов В. Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформирования : тех. отч. / Вычислительный центр АН СССР. – Москва, 1967.
5. Ивлев Д. Д. Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2005. – 357 с.
6. Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара. – Воронеж : Издательство Воронежского государственного университета, 1997. – 204 с.
7. Буренин А. А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21, № 5. – С. 3–8.
8. Ковтаниок Л. В. О критерии возникновения пластического течения околосферической каверны // Проблемы естествознания и производства. Сборник трудов ДВГТУ. – Владивосток : Издательство ДВГТУ, 1997. – С. 19–23. – (Серия 5 ; 119).
9. Вервейко Н. Д., Шашкин А. И., Крупенко С. Е. Зарождение и движение вершин трещин за фронтами упруговязкопластических волн. – Воронеж : Кварта, 2017. – 124 с.
10. Verveyko N. D., Shashkin A. I., Krupenko S. E. Mathematical modeling of the propagations of precursors of the front edges of crack as spatial curves on the fronts of waves of a strong discontinuity of rates and stresses // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1203, no. 1. – P. 012033. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012033. – URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012033>.

11. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – Москва : Мир, 1964. – 308 с.
12. A model of dynamic reflection of a longitudinal shear crack from a stressed boundary / M. I. Bykova [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – P. 012123. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012123. – URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012123>.

## REFERENCES

1. *Kachanov L. M.* Fundamentals of fracture mechanics. – Moscow : Nauka, 1974. – 312 p. – (in Russian).
2. *Ievlev V. M.* Thin films of inorganic materials: mechanisms of growth and structure: textbook. – Voronezh : CPI of Voronezh State University, 2008. – 172 p. – (in Russian).
3. *Parton V. Z., Boriskovsky V. G.* Dynamics of brittle fracture. – Moscow : Nauka, 1988. – 240 p. – (in Russian).
4. *Kukudzhanov V. N.* Propagation of elastoplastic waves in a rod taking into account the influence of the deformation rate : tech. rep. / Computer Center of the USSR Academy of Sciences. – Moscow, 1967. – (in Russian).
5. *Ivlev D. D.* Theory of limit state and ideal plasticity: selected works. – Voronezh : Voronezh State University, 2005. – 357 p. – (in Russian).
6. *Verveiko N. D.* Radiation theory of elastic-viscoplastic waves and shock waves. – Voronezh : Voronezh State University, 1997. – 204 p. – (in Russian).
7. *Burenin A. A.* On impact deformation of an incompressible elastic half-space // Applied Mechanics. – 1985. – Vol. 21, no. 5. – P. 3–8. – (in Russian).
8. *Kovtanyuk L. V.* On the criterion for the occurrence of plastic flow of a near-spherical cavity // Problems of natural science and production. Collection of Proceedings of DVG TU, issue 119, series 5. – Vladivostok : DVG TU Publishing House, 1997. – P. 19–23. – (in Russian).
9. *Verveiko N. D., Shashkin A. I., Krupenko S. E.* The origin and motion of crack tips for the fronts of elastoviscoplastic waves. – Voronezh : Quarta, 2017. – 124 p. – (in Russian).
10. *Verveiko N. D., Shashkin A. I., Krupenko S. E.* Mathematical modeling of the propagations of precursors of the front edges of crack as spatial curves on the fronts of waves of a strong discontinuity of rates and stresses // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1203. – P. 012033. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012033. – URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012033>.
11. *Thomas T.* Plastic flow and destruction in solids. – Moscow : Mir, 1964. – 308 p. – (in Russian).
12. A model of dynamic reflection of a longitudinal shear crack from a stressed boundary / M. I. Bykova [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – P. 012123. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012123. – URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012123>.

А. В. Ковалев<sup>1</sup>, М. М. Коротков<sup>1</sup>, Н. В. Минаева<sup>1</sup>, А. И. Шашкин<sup>1</sup>

## АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ СЖАТИИ

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

**Аннотация.** Рассматривается сжатие полосы, выполненной из неоднородного материала и имеющей неровную поверхность с боковых сторон. Усилия, приложенные по верхней и нижней сторонам и по боковым кромкам поперечного сечения, считаются независимыми. В качестве необходимого условия нарушения нормального функционирования полосы предлагается использовать критерий непрерывной зависимости функции, характеризующей поведение изучаемого объекта, от исходных данных. Нарушение этой непрерывности способно вызывать потерю устойчивости (первая группа предельных состояний) или чрезмерные деформации, отклонения от проектируемых расчетных значений (вторая группа предельных состояний). Рассмотрены математические модели для исследования непрерывной зависимости с граничными условиями в деформированном состоянии, а также модель, в которой были учтены углы поворота в уравнениях равновесия (согласно работам Новожилова, Ивлева). Получено условие, позволяющее определять область, на границе которой состояние полосы станет предельным (потеря устойчивости равновесной формы). Достоверность полученных результатов подтверждается совпадением с известными результатами других авторов. Для различных значений параметров поперечного сечения построены области, в пределах которых НДС полосы близко к однородному.

**Ключевые слова:** предельное состояние, упругая полоса, непрерывная зависимость, комбинированное нагружение.

**Ковалев Алексей Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования; e-mail: kovalev@amm.vsu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

**Коротков Михаил Михайлович**, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: mihaillkorotkov97@rambler.ru

**Минаева Надежда Витальевна**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: minaeva@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-9366-5575>; AuthorID: 11715

**Шашкин Александр Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического и прикладного анализа; e-mail: shashkin@amm.vsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9925-5019>; AuthorID: 156046



**для цитирования:** Ковалев А. В., Коротков М. М., Минаева Н. В., Шашкин А. И. Анализ математических моделей, используемых при исследовании предельного состояния упругой неоднородной полосы при сжатии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 185–197. DOI: 10.37972/chgru.2025.64.2.011. EDN: LJOPZD

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

A. V. Kovalev<sup>1</sup>, M. M. Korotkov<sup>1</sup>, N. V. Minaeva<sup>1</sup>, A. I. Shashkin<sup>1</sup>

## ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS USED IN THE STUDY OF THE LIMITING STATE OF AN ELASTIC INHOMOGENEOUS BAND UNDER COMPRESSION

<sup>1</sup> Voronezh State University, Voronezh, Russia

**Abstract.** We considered compression of a strip made of an inhomogeneous material and having an uneven surface on the sides. The forces applied on the upper and lower sides and on the lateral edges of the cross section are considered independent. As a necessary condition for disruption of the normal functioning of the band, it is proposed to use the criterion of continuous dependence of the function characterizing the behavior of the studied object on the initial data. A violation of this continuity can cause loss of stability (the first group of limiting states) or excessive deformations, deviations from the projected design values (the second group of limiting states). Mathematical models for studying continuous dependence with boundary conditions in a deformed state are considered, as well as a model in which rotation angles in equilibrium equations were taken into account (according to the works of Novozhilov and Ivlev). A condition we obtained that makes it possible to determine the area at the boundary of which the state of the strip will become marginal (loss of stability of the equilibrium shape). The reliability of the obtained results is confirmed by the coincidence with the known results of other authors. For different values of the cross-section parameters, regions we constructed within which the stress-strain state of the strip is close to homogeneous.

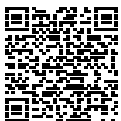
**Keywords:** limiting state, elastic band, continuous dependence, combined loading.

**Alexey V. Kovalev**, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor;  
e-mail: kovalev@amm.vsu.ru ; <https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>;  
AuthorID: 11051

**Mikhail M. Korotkov**, Scientific Researcher; e-mail: mihaillkorotkov97@rambler.ru

**Nadezhda V. Minaeva**, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor;  
e-mail: minaeva@yandex.ru ; <https://orcid.org/0000-0002-9366-5575>;  
AuthorID: 11715

**Alexander I. Shashkin**, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor;  
e-mail: shashkin@amm.vsu.ru ; <https://orcid.org/0000-0001-9925-5019>;  
AuthorID: 156046



**to cite this article:** Kovalev A. V., Korotkov M. M., Minaeva N. V., Shashkin A. I. Analysis of mathematical models used in the study of the limiting state of an elastic inhomogeneous band under compression // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 185–197. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.011

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

**Введение.** Проблема старения конструктивных элементов приобретает особую значимость в условиях интенсивной эксплуатации различных инженерных объектов, таких как авиационная техника, транспортные системы и промышленные сооружения. Под воздействием переменных нагрузок, температурных изменений и других внешних факторов геометрические и физические свойства элементов постепенно изменяются в квазистатическом режиме на протяжении их службы. При проектировании предполагается, что напряженно-деформированное состояние конструкций будет соответствовать установленным эксплуатационным требованиям и расчетным допускам. Однако несоответствие этим требованиям может привести элементы к критическому состоянию [1].

Для обеспечения надежности и безопасности конструкции необходимо, чтобы изменения характеристик элементов оказывали лишь минимальное влияние на их напряженно-деформированное состояние [2]. Если это условие не соблюдается, возможны аварийные ситуации или даже техногенные катастрофы. Таким образом, ключевым аспектом безопасной эксплуатации конструкций на этапе математического моделирования является непрерывность решения от начальных параметров [2–4]. Нарушение этой непрерывности способно вызывать потерю устойчивости (первая группа предельных состояний) или чрезмерные деформации, отклонения и сбои в работе системы (вторая группа предельных состояний) [5–7].

В работах [8], [9] показано, что проводить исследование устойчивости равновесия упругих тел следует на основе задачи, в которой краевые условия учитывают деформацию граничной поверхности.

В [10] приведено обоснование такого подхода. Согласно полученным результатам, при анализе непрерывной зависимости граничные условия в напряжениях следует ставить на границе тела в деформированном состоянии. В противном случае задача будет поставлена противоречиво (на границе уже предполагается непрерывность).

В [11] предлагается ставить общую задачу устойчивости упругого тела в рамках уравнений нелинейной теории упругости. Согласно предложенному подходу, надо учитывать компоненты вращения в уравнениях равновесия.

В [12], используя эти результаты, было проведено исследование устойчивости полосы при сжатии. Полученные значения критического давления были ниже известных ранее [11].

Несмотря на широкий спектр исследований в данной области, разработка методов анализа предельных состояний, учитывающих особенности упругонелинейного деформирования, остается актуальной задачей.

**1. Математическая модель НДС неоднородной полосы при сжатии.** Рассмотрим упругую полосу, выполненную из неоднородного несжимаемого материала и имеющую неровную поверхность с обеих боковых сторон поперечного сечения. Его верхняя и нижняя кромки прямолинейные. Вдоль

этих кромок действует сжимающее усилие  $p_y$ . Отличие боковых кромок от прямых линий  $x \pm \ell$  характеризуется функциями  $q_i(y)$  ( $i = 1, 2$ ). Они сжимаются усилиями  $p_x$ .

Напряжённое состояние полосы (плоская деформация) описывается решением следующей задачи [9], [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_x - \sigma_y &= 4G \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau &= G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \sigma_y|_{y=\pm h} &= -p_y, \\ \sigma_x|_{x=q_i(y)} &= -p_x \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $G = G_0 + G_1(x, y)$ ,  $G_0 = \text{const}$  соответствует модулю сдвига однородного материала, а  $G_1(x, y)$  описывает изменение физических свойств полосы в процессе эксплуатации. Функции  $g_1(y)$  и  $g_2(y)$  описывают правую и левую кромки поперечного сечения полосы после деформирования.

Если пренебречь несовершенствами, т.е.  $q_i(y) = 0$  ( $i = 1, 2$ ), то задача (1) допускает решение, описывающее однородное состояние:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x^0 &= -p_x, & \sigma_y = \sigma_y^0 &= -p_y, & \tau = \tau^0 &= 0, \\ u = u^0 &= \varepsilon_x^0 x, & v = v^0 &= \varepsilon_y^0 y, \end{aligned} \quad (2)$$

где константы  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$  из (2), определяются следующим соотношением

$$\varepsilon_y^0 = \frac{p_x - p_y}{4G}, \quad \varepsilon_x^0 = -\varepsilon_y^0.$$

В процессе эксплуатации происходят незначительные изменения геометрических размеров и физических свойств материала. Проанализируем, насколько эти изменения могут повлиять на напряженно-деформированное состояние полосы, описываемое (2). Т.е. проведем исследование непрерывной зависимости решения задачи (1) от исходных данных при  $G = G_0, q_i(y) = 0$  ( $i = 1, 2$ ).

**2. Исследования непрерывной зависимости решения от исходных данных.** Согласно [10], [14], следует рассмотреть вспомогательную линеаризованную однородную задачу относительно функций  $\zeta_i$ , которая получена на основе (1) при  $\sigma_x = \sigma_x^0 + \zeta_1, \sigma_y = \sigma_y^0 + \zeta_2, \tau = \tau^0 + \zeta_3, u = u^0 + \zeta_4, v = v^0 + \zeta_5$ . Для непрерывной зависимости необходимо, чтобы она была регулярной, все ее первые производные по всем своим аргументам были непрерывны, а также она имела только тривиальное решение.

Будем проводить исследование на основе подходов, предложенных в [9] и [11] В первом случае, при построении математической модели для исследования непрерывности ограничимся учетом деформации границы контура поперечного сечения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} &= 0, \\
\zeta_1 - \zeta_2 &= 4G_0 \frac{\partial \zeta_4}{\partial x}, & \zeta_3 &= G_0 \left( \frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial \zeta_4}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2|_{y=\pm h} &= 0, & \zeta_4|_{y=\pm h} &= 0, \\
\left( \zeta_3 + p_y \frac{\partial \zeta_4(0, y)}{\partial y} \right)_{x=0} &= 0, & \zeta_1|_{x=0} &= 0, \\
\left( \zeta_3 + p_y \frac{\partial \zeta_4(\ell, y)}{\partial y} \right)_{x=\ell_1} &= 0, & \zeta_1|_{x=\ell_1} &= 0, \\
\ell_1 &= 2\ell \left( 1 + \frac{p_x - p_y}{4G_0} \right)
\end{aligned} \tag{4}$$

В результате проведенных исследований получили, что эта задача имеет ненулевое решение, если исходные данные удовлетворяют условию:

$$\cosh^2((\alpha_x - \alpha_y - 2)\pi mn) - m^2 n^2 (1 + \alpha_y)^2 (\alpha_x - \alpha_y - 2)^2 = 0 \tag{5}$$

$$\alpha_x = \frac{p_x}{2G_0}, \quad \alpha_y = \frac{p_y}{2G_0}, \quad m = \frac{\ell}{h}, \quad n \in Z$$

Если положить  $\alpha_x = 0$ , то можно сравнить  $\alpha_y = 0$  с эйлеровой критической нагрузкой  $p^*$  для продольного изгиба стержня с шарнирно закрепленными концами, как это сделано в работах [9] и [12]. В соответствии с результатами из [9] при  $m = 0.1$  значения параметров усилий практически равны:  $\frac{\alpha_y}{p^*} = 1.00143$ .

Проведем далее исследование, выполненное согласно подходу, предложенному Новожиловым [11], [15]. Учитывая углы поворота в уравнениях равновесия для вспомогательной задачи, получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} + \frac{p_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \zeta_5}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} \right) &= 0, \\
\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} - \frac{p_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta_5}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} \right) &= 0, \\
\frac{\partial \zeta_4}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} &= 0, \\
\zeta_1 - \zeta_2 &= 4G_0 \frac{\partial \zeta_4}{\partial x}, \quad \zeta_3 = G_0 \left( \frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Граничные условия имеют вид (4). Группа условий, касающаяся регулярности и непрерывности производных в (6), (4) выполняется. В результате анализа



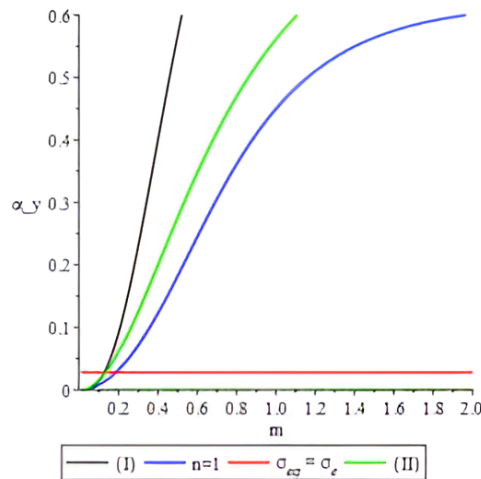
существования только тривиального решения было получено соотношение, когда это требование не выполняется

$$\frac{2(\cosh(\ell_1 k) \cosh(\ell_1 k \sqrt{1-\gamma}) - 1)}{\sinh(\ell_1 k) \sinh(\ell_1 k \sqrt{1-\gamma})} = \frac{(2-\gamma+2\alpha_y)\sqrt{1-\gamma}}{(2-\gamma-\gamma\alpha_y)(1+\alpha_y)} + \frac{(2-\gamma-\gamma\alpha_y)(1+\alpha_y)}{(2-\gamma+2\alpha_y)\sqrt{1-\gamma}} \quad (7)$$

$$\gamma = \frac{\alpha_y - \alpha_x}{1 - \alpha_x}, \quad k = \frac{\pi n}{\ell}$$

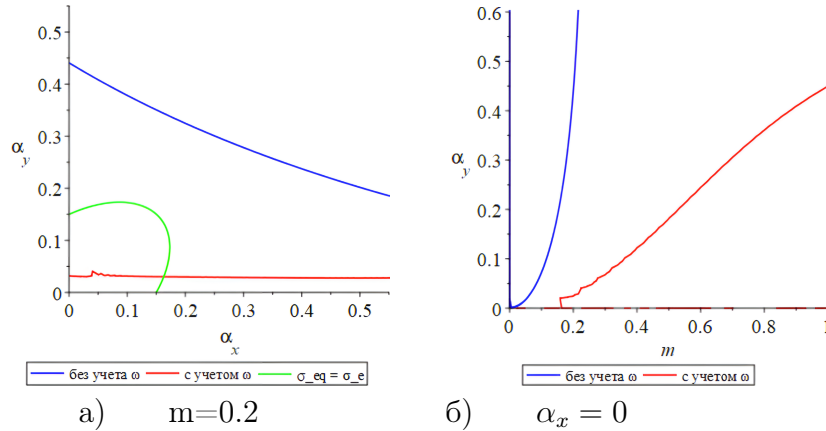
Условие (7) ограничивает область непрерывной зависимости решения задачи (1) от функций, характеризующих физические и геометрические несовершенства. Вид (7) при  $\alpha_x = 0$  с точностью до обозначений совпадает с полученным в [9].

На рис. 1 представлена область при  $\alpha_x = 0$  для материала, изучаемого в [9]. Результаты, полученные в [9] обозначены (I), а (II) соответствует кривой, найденной в [12]. Как видно, для малых  $m$  значения критических параметров эти линии совпадают. Значениям  $m \geq 0.2$  будут соответствовать напряжения, выходящие за пределы упругости известных материалов. Это полностью согласуется с результатами, приведенными в работах [8], [9], [12].



**Рис. 1.** Область непрерывной зависимости для  $\frac{3\sigma_y}{2E} = 0.01184$  при  $\alpha_x = 0$

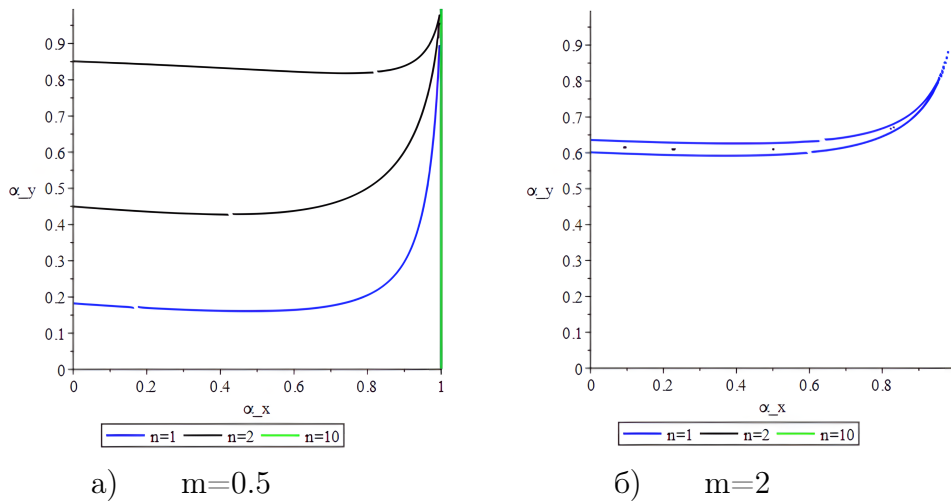
Сопоставляя результаты, полученные без учета углов поворота в уравнениях равновесия и с ними (рис. 2), получаем, что (7) дает более низкие значения для границы области непрерывной зависимости решения задачи (1) от исходных данных. Причем, при исследовании в рамках первого подхода, получаем, что решение (2) будет приближенно описывать состояние полосы при любых значениях сжимающих усилий в упругой области, что соответствует завышенной оценке.



**Рис. 2.** Сравнение областей непрерывной зависимости, полученных на основе (5) и (7)

Поэтому в дальнейшем при рассмотрении непрерывной зависимости решения задачи (1) от исходных данных при  $G = G_0, q_i(y) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) будем использовать условие (7).

**3. Построение областей непрерывной зависимости для различных несжимаемых изотропных материалов.** Для несжимаемых изотропных материалов, у которых  $\frac{3\sigma_y}{2E} > 1$ , область непрерывной зависимости на плоскости параметров  $\alpha_x, \alpha_y$  для частных случаев отношения линейных размеров сечения будет иметь вид (рис. 3)

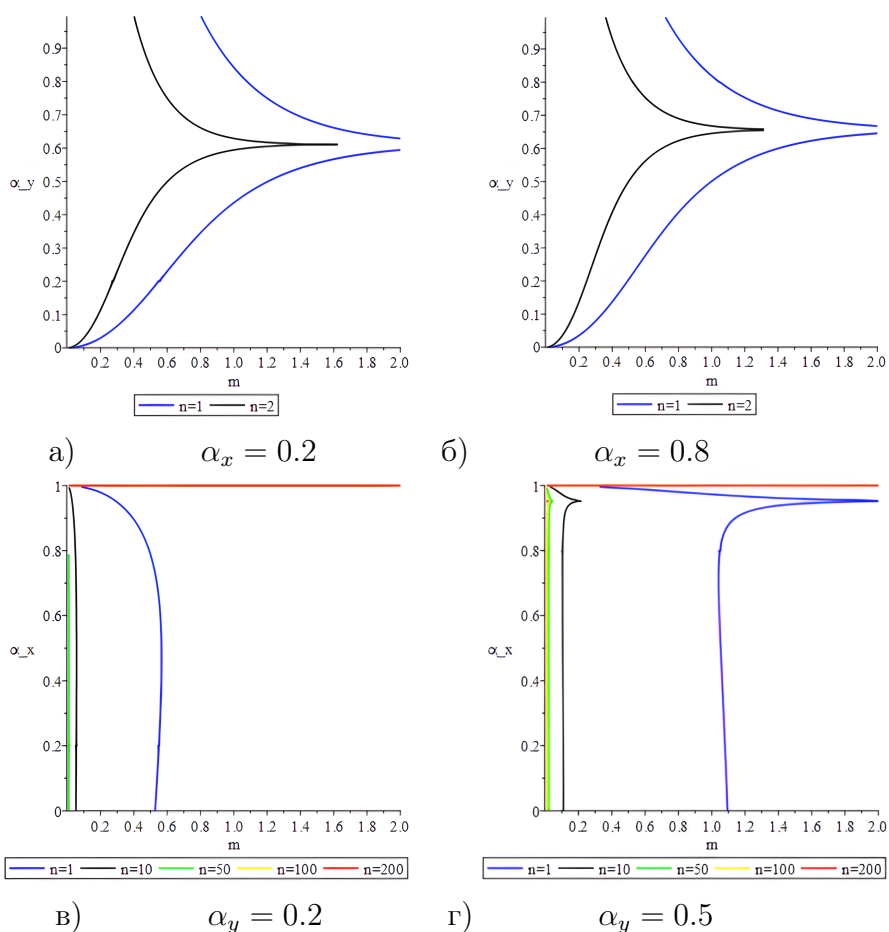


**Рис. 3.** Область непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы

Поскольку в процессе эксплуатации не только физические свойства меняются, но и размеры сечения тоже могут претерпевать незначительные изменения, то линии (7) соответствуют случаям, когда решение (2) уже не будет описывать напряженно-деформированное состояние реальной полосы и не будет соответствовать установленным эксплуатационным и расчетным требованиям. В этом случае оно становится предельным (потеря устойчивости равновесной формы).

Если рассмотреть вариант, когда в процессе эксплуатации одно из усилий не изменяет своего значения, то можно указать область изменения размеров сечения и параметра другого сжимающего усилия, при которых напряженно-деформированное состояние полосы будет близко к однородному.

Далее рассмотрим случай, когда  $\alpha_y$  или  $\alpha_x$  не меняют своего значения. Область, ограниченная (7) на плоскости параметров размеров поперечного сечения и усилия будет иметь вид, представленный на (рис. 4).

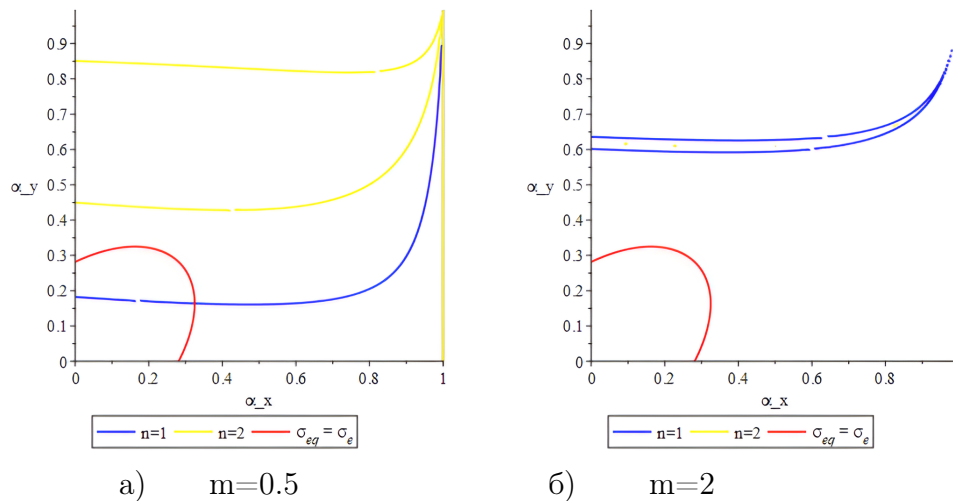


**Рис. 4.** Область непрерывной зависимости для различных сжимающих усилий

Поскольку в процессе эксплуатации геометрические размеры не претерпевают значительных изменений, то «опасные» значения параметров сжимающих

воздействий будут наблюдаться в окрестностях точек, принадлежащих линиям (7).

Для случая, когда у несжимаемого изотропного материала  $\frac{3\sigma_y}{2E} \ll 1$ , линии (7) имеют вид, аналогичный представленному на рис.4. Но для подобных материалов при достаточно малых нагрузках начинают проявляться пластические свойства, и напряжения превосходят предел упругости (рис.5). Учитывая это, получаем, что либо решение (2) будет приближенно описывать напряженно-деформированное состояние полосы во всей области упругости, либо только в той ее части, которая ограничена линией (7).



**Рис. 5.** Область непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы

**4. Заключение** Таким образом, использование в математической модели для изучения непрерывной зависимости уравнений равновесия в форме, предложенной Новожиловым, предпочтительнее, поскольку получаем более низкую границу области такой зависимости. Недостатком такого подхода являются более сложные выкладки при проверке необходимых условий.

Когда исходные параметры достигают значений, соответствующих кривой (7), зависимость теряет свою непрерывность. В итоге могут появиться значительные перемещения, прогибы или углы поворота, что приводит систему к предельному состоянию. В частности происходит потеря устойчивости равновесной формы (2), и состояние полосы, соответствующее (2) станет предельным. Полученные результаты следует учитывать при проектировании различных конструкций, при анализе соответствия установленным эксплуатационным требованиям и расчетным допускам.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** А. В. Ковалев, Н. В. Минаева, А. И. Шашкин – постановка задачи, обсуждение методов решения, редактирование текста рукописи. М. М. Коротков – построение математической модели, вычислительный эксперимент, написание текста рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** A. V. Kovalev, N. V. Minaeva, A. I. Shashkin – problem statement, discussion of solution methods, editing of the manuscript text. M. M. Korotkov – construction of the mathematical model, computational experiment, writing of the manuscript text.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

## ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – Москва, 2015. – Введ. с 01.07.15.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. – Москва : Физматгиз, 1963. – 880 с.
3. *Железнов Л. П.* Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении крутящим и изгибающим моментами и внутренним давлением // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64, № 2. – С. 182–192. – DOI: 10.1134/S0021894423020177.
4. Influence of Shape Imperfections on the Stability of thin Spherical Shells / V. A. Vazhenov [et al.] // Strength of Materials. – 2021. – Vol. 53. – P. 842–851. – DOI: 10.1007/s11223-022-00351-0.
5. *Спорыхин А. Н., Шашкин А. И.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. – Москва : Физматлит, 2004. – 232 с.
6. *Броуде Б. М.* Потеря устойчивости как предельное состояние // Строительная механика и расчет сооружений. – 1970. – № 6. – С. 4–7.
7. *Броуде Б. М., Бельский Г. И., Беляев Б. И.* О потере устойчивости как предельном состоянии стальных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 3. – С. 88–91.
8. *Гусейнова С. В., Дибиргаджиев А. М., Муртазалиев Г. М.* Возможные постановки задач потери устойчивости конструкций // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2014. – Т. 35, № 4. – С. 113–118. – DOI: 10.21822/2073-6185-2014-35-4-113-118.
9. *Ишлинский А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Украинский математический журнал. – 1954. – Т. 6, № 2. – С. 140–146.
10. *Минаева Н. В.* Адекватность математических моделей деформируемых тел. – Москва : Научная книга, 2006. – 236 с.

11. *Новозhilов В. В.* Теория упругости. – Санкт-Петербург : Политехника, 2012. – 409 с.
12. *Ершов Л. В., Ивлев Д. Д.* Об устойчивости полосы при сжатии // Доклады Академии наук СССР. – 1961. – Т. 138, № 5. – С. 1047–1049.
13. *Korotkov M. M., Minaeva N. V., Shashkin A. I.* Investigation of Quasi-Static Deflection of an Elastic Plate Made of Inhomogeneous Material under Compression // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3811–3817. – DOI: 10.1134/S0025654424606578.
14. *Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Журнал математических наук. – 2007. – Т. 145, № 6. – С. 5311–5453. – DOI: 10.1007/s10958-007-0356-2.
15. Study on Stability for Compressive Elastic-Fixed Strip / T. V. T. Thi [et al.] // Civil Engineering and Architecture. – 2025. – Vol. 13, no. 3. – P. 1509–1516. – DOI: 10.13189/cea.2025.130306.

## REFERENCES

1. GOST 27751-2014. Reliability of building structures and foundations. The main provisions. – Moscow, 2015. – (in Russian). Introduced on 07/01/15.
2. *Volmir A. S.* Stability of elastic systems. – Moscow : Fizmatgiz, 1963. – 880 p. – (in Russian).
3. *Zheleznov L. P.* Study of nonlinear deformation and stability of a composite cylindrical shell under combined loading with torque, bending moments and internal pressure // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2023. – Vol. 64, no. 2. – P. 332–341. – DOI: 10.1134/S0021894423020177. – (in Russian).
4. Influence of Shape Imperfections on the Stability of Thin Spherical Shells / V. A. Bazhenov [et al.] // Strength of Materials. – 2021. – Vol. 53. – P. 842–851. – DOI: 10.1007/s11223-022-00351-0.
5. *Sporykhin A. N., Shashkin A. I.* Stability of the equilibrium of spatial bodies and problems of rock mechanics. – Moscow : Fizmatlit, 2004. – 232 p. – (in Russian).
6. *Brode B. M.* Loss of stability as a limiting condition // Structural Mechanics and Calculation of Structures. – 1970. – No. 6. – P. 4–7. – (in Russian).
7. *Brode B. M., Belsky G. I., Belyaev B. I.* On loss of stability as a limiting condition of steel structures // Construction Mechanics and Calculation of Structures. – 1990. – No. 3. – P. 88–91. – (in Russian).
8. *Guseinova S. V., Dibirgadzhiyev A. M., Murtazaliyev G. M.* Possible statements of problems of loss of stability designs // Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences. – 2014. – Vol. 35, no. 4. – P. 113–118. – DOI: 10.21822/2073-6185-2014-35-4-113-118. – (in Russian).
9. *Ishlinsky A. Y.* On the Problem of Elastic Bodies Equilibrium Stability in Mathematical Theory of Elasticity // Ukrainian Mathematical Journal. – 1954. – Vol. 6, no. 2. – P. 140–146. – (in Russian).
10. *Minaeva N. V.* The Adequacy of Mathematical Models of Deformable Bodies. – Moscow : Science Book, 2006. – 236 p. – (in Russian).
11. *Novozhilov V. V.* Theory of Elasticity. – St. Petersburg : Polytechnic, 2012. – 409 p. – (in Russian).

12. *Yershov L. V., Ivlev D. D.* On Stability of a Strip in Compression // Bulletin of USSR Academy of Sciences. – 1961. – Vol. 138, no. 5. – P. 1047–1058. – (in Russian).
13. *Korotkov M. M., Minaeva N. V., Shashkin A. I.* Investigation of Quasi-Static Deflection of an Elastic Plate Made of Inhomogeneous Material under Compression // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3811–3817. – DOI: 10.1134/S0025654424606578.
14. *Darinskiy V. S., Sapronov Y., Tsarev S.* Bifurcations of extremals of Fredholm functionals // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – Vol. 145. – P. 5311–5453. – DOI: 10.1007/s10958-007-0356-2. – (in Russian).
15. Study on Stability for Compressive Elastic-Fixed Strip / T. V. T. Thi [et al.] // Civil Engineering and Architecture. – 2025. – Vol. 13, no. 3. – P. 1509–1516. – DOI: 10.13189/cea.2025.130306.

А. А. Римский<sup>1</sup>, Е. Ю. Крылова<sup>2</sup>, Н. В. Островский<sup>2</sup>, А. В. Гаркави<sup>1</sup>

## ВЛИЯНИЕ ПРОКСИМАЛЬНОЙ ОСТИОТОМИИ МАЛОБЕРЦОВОЙ КОСТИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МЕНИСКОВ КОЛЕННОГО СУСТАВА

<sup>1</sup>Первый Московский государственный медицинский университет имени И. М. Сеченова Минздрава России (Сеченовский Университет), Москва, Россия

<sup>2</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

**Аннотация.** Варусная деформация встречается в 32-45% пациентов с гонартрозом, вызывает патологическую перегрузку медиального мениска и инициирует тяжелые дегенеративные изменения коленного сустава. В 2018 году впервые была описана малоинвазивная методика коррекции варусной деформации – проксимальная остеотомия малоберцовой кости. В работе на основании построенной трехмерной модели нижней конечности с учетом связочного аппарата и трабекулярных элементов апофисов бедренной и большеберцовой кости методом конечных элементов был проведен анализ влияния проксимальной остеотомии малоберцовой кости на напряженно деформированное состояние менисков коленного сустава в зависимости от степени варусной деформации. Установлены пределы применимости данного метода: ПОМК существенно уменьшает площадь области высоких напряжений в случае варуса в 2 и 4 градуса, менее заметно в случае нормальной геометрии и совсем не изменяет размеров площади высоких напряжений при 6 градусах варуса. Показано, что учет в модели действия длинной малоберцовой мышцы еще более снижает напряжения на внутреннем мениске, а также приводит к росту напряжений на внешнем мениске. Таким образом, можно говорить об эффекте «перераспределения» напряжений с медиального/внутреннего на латеральное/внешнее направление коленного сустава посредством механизма «конкуренции мышц» после проксимальной остеотомии малоберцовой кости.

**Ключевые слова:** биомеханическое моделирование, метод конечных элементов, проксимальная остеотомия малоберцовой кости (ПОМК), коррекция варусной деформации, мениски коленного сустава, мышечный ответ длинной малоберцовой мышцы, пределы применимости ПОМК.

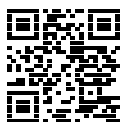
**Римский Арсений Александрович**, аспирант кафедры травматологии, ортопедии и хирургии катастроф; e-mail: arsrin@mail.ru; <https://orcid.org/0009-0008-6141-983X>

**Крылова Екатерина Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: kat.krylova@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982



**Островский Николай Владимирович**, доктор медицинских наук, профессор кафедры основ медицины и медицинских технологий; e-mail: [nvostrovsky@mail.ru](mailto:nvostrovsky@mail.ru);  
<https://orcid.org/0000-0002-8370-2299>; AuthorID: 116256

**Гаркави Андрей Владимирович**, доктор медицинских наук, профессор кафедры травматологии, ортопедии и хирургии катастроф; e-mail: [avgar22@yandex.ru](mailto:avgar22@yandex.ru);  
<https://orcid.org/0000-0003-4996-1657>



*для цитирования:* Римский А. А., Крылова Е. Ю., Островский Н. В., Гаркави А. В. Влияние проксимальной остиотомии малоберцовой кости на напряженно-деформированное состояние менисков коленного сустава // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 198–220. DOI: 10.37972/chgru.2025.64.2.004. EDN: ZAZMBP

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

A. A. Rimskiy<sup>1</sup>, E. Yu. Krylova<sup>2</sup>, N. V. Ostrovsky<sup>2</sup>, A. V. Garkavi<sup>1</sup>

## INFLUENCE OF PROXIMAL OSTEOTOMY OF THE FIBULA ON THE STRESS-STRAIN STATE OF THE KNEE JOINT MENISCUSES

<sup>1</sup>*Sechenov First Moscow State Medical University (Sechenov University), Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Saratov State University, Saratov, Russia*

**Abstract.** Varus deformity occurs in 32-45% of patients with gonarthrosis, causes pathological overload of the medial meniscus and initiates severe degenerative changes in the knee joint. In 2018, a minimally invasive technique for correcting varus deformity, fibula proximal osteotomy, was described for the first time. In the work, based on the constructed three-dimensional model of the lower limb, considering the ligamentous apparatus and trabecular elements of the femur and tibia apices, the effect of fibula proximal osteotomy on the stress-strain state of the knee joint meniscus was analyzed using the finite element method, depending on the varus deformity degree. The limits of this method applicability were established. Fibula proximal osteotomy significantly reduces the high-stress region area in the case of varus of 2 and 4 degrees, less noticeably in the case of normal geometry and does not change the size of the high-stress area at 6 degrees of varus. It has been shown that considering the action of the long peroneus muscle in the model further reduces stress on the medial meniscus and also leads to an increase in stress on the lateral meniscus..

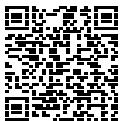
**Keywords:** biomechanical modeling, finite element method, proximal fibula osteotomy, correction of varus deformity, knee menisci, muscle response of the peroneus longus muscle, limits of applicability of proximal fibula osteotomy.

**Arseniy A. Rimskiy**, PhD student; e-mail: arsrin@mail.ru;  
<https://orcid.org/0009-0008-6141-983X>

**Ekaterina Yu. Krylova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD), Associate Professor; e-mail: kat.krylova@bk.ru;  
<https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982

**Nikolay V. Ostrovsky**, Doctor of Medical Sciences, Professor; e-mail: nvostrovsky@mail.ru;  
<https://orcid.org/0000-0002-8370-2299>; AuthorID: 116256

**Andrey V. Garkavi**, Doctor of Medical Sciences, Professor; e-mail: avgar22@yandex.ru;  
<https://orcid.org/0000-0003-4996-1657>



**to cite this article:** Rimskiy A. A., Krylova E. Yu., Ostrovsky N. V., Garkavi A. V. Influence of Proximal Osteotomy of the Fibula on the Stress-Strain State of the Knee Joint Meniscuses // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 198–220. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.004

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**1. Введение.** Патология коленного сустава является ведущей причиной нарушения функции конечности. Обращает на себя внимание случаи, когда пациент не отмечает факт травмы. Зачастую, это напрямую коррелирует с нарушениями биомеханики нижней конечности [1]. Варусная деформация коленного сустава встречается в 32-45% пациентов с гонартрозом [2], вызывает патологическую перегрузку медиального мениска и суставного хряща, инициируя дегенеративные изменения [3]. При углах варусной деформации больше 5 градусов пиковые напряжения в заднем роге медиального мениска превышают физиологические в 1.8-2.3 раза [4], что объясняет высокую частоту разрывов мениска в этой зоне.

Хирургическая коррекция варусной деформации направлена на восстановление биомеханической оси нижней конечности и снижение перегрузки медиального мениска. Проксимальная вальгизирующая остеотомия большеберцовой кости (high tibia osteotomy - НТО) считается “золотым стандартом” [5], однако проксимальная остеотомия малоберцовой кости (ПОМК) предлагается как менее инвазивная альтернатива для разгрузки медиального отдела коленного сустава [6]. Хотя клинические исследования демонстрируют уменьшение боли в медиальном отделе коленного сустава и коррекцию оси нижней конечности после ПОМК [5, 7], единого мнения о механизме ее действия нет. Предложены несколько конкурирующих или взаимодополняющих теорий. Гипотеза “неравномерной усадки” (Non-uniform Settlement): с возрастом остеопороз приводит к “проседанию” менее плотной медиальной части проксимального метаэпифиза большеберцовой кости, в то время как латеральная часть, поддерживаемая плотной малоберцовой костью, “оседает” меньше. Это усиливает варусную деформацию. ПОМК, устраняя латеральную опору в виде малоберцовой кости, позволяет латеральному плато “осесть”, выравнивая нагрузку и уменьшая варус [8, 9]. Гипотеза “большого количества кортикальных слоев” (Too-Many-Cortices Theory): Медиальный мыщелок большеберцовой кости “опирается” на одну кортикальную пластинку, а латеральный — на кортикальный слой большеберцовой кости плюс две кортикальные пластинки малоберцовой кости. Эта избыточная латеральная поддержка препятствует равномерному распределению нагрузки при “проседании” медиального отдела. ПОМК устраняет этот дисбаланс [8, 10]. Гипотеза “динамической дистализации малоберцовой кости” (Dynamic Fibular Distalization): После ПОМК тяга мышц (*m. soleus*, *peroneus longus*), прикрепляющихся к проксимальному фрагменту малоберцовой кости, вызывает его смещение вниз. Это создает натяжение в латеральных структурах, сужая латеральную суставную щель и смещая ось нагрузки медиально [8, 11].

Несмотря на множество гипотез, отсутствуют количественные биомеханические данные, подтверждающие преобладающий механизм действия ПОМК, особенно, в зависимости от степени варусной деформации. Пределы применимости данной методики, для разгрузки медиального мениска также экспериментально не доказаны, хотя обширный клинический опыт показывает диапазон от 2 до 6 градусов варусной деформации.

Трехмерное конечно-элементное (КЭ) моделирование стало золотым стандартом в ортопедической биомеханике для решения таких задач [12, 13]. Разработаны методы позволяющие создавать анатомически точные 3D-модели сложных структур (кость, хрящ, мениски, связки) на основе данных КТ и МРТ [14]. Методы биомеханики дают возможность количественно оценить напряжения в глубоких слоях тканей *in silico*, что невозможно *in vivo* [15], проводить контролируемые виртуальные эксперименты с вариацией параметров (угол и уровень деформации, тип остеотомии, нагрузка) без этических ограничений, верифицировать биомеханические гипотезы путем анализа НДС [16–18].

Ранее в работе [19] авторы настоящей статьи построили биомеханическую модель нижней конечности с учетом ПОМК, предложили метод моделирования варусной деформации на основе здоровой конечности, провели верификацию данной модели посредством сравнения расчетов по ней с результатами других авторов. На геометрии в норме и малом угле варусности подтвердили, что ПОМК может снижать значения напряжений на медиальном мениске коленного сустава человека.

Цель настоящей работы: посредством биомеханического численного эксперимента методом конечных элементов выявить пределы применимости ПОМК, то есть показать при коррекции каких углов варусной деформации данный метод дает наилучшее снижение значений напряжений в области медиального мениска коленного сустава человека. А также проверить гипотезу “динамической дистализации малоберцовой кости”, то есть выяснить действительно ли усиление действия длинной малоберцовой мышцы может способствовать перераспределению напряжений с медиального мениска на латеральный.

**2. Постановка задачи.** В качестве объекта исследования в работе выступала здоровая разогнутая правая нога. Были рассмотрены трабекулярные и кортикальные элементы бедренной (*femur*), большеберцовой (*tibia*), малоберцовой (*fibula*) и таранной (*talus*) костей, а также суставные хрящи апексов выше указанных объектов (*articular cartilage*) (рис. 1). Биомеханическая модель была построена на основе компьютерной томографии нижней конечности. Исходные данные компьютерной томографии пациента обрабатывались в программе *Mimics*. Посредством системы автоматизированного проектирования “*SolidWorks*” внутренний и внешний мениск коленного сустава были добавлены в трехмерную твердотельную модель нижней конечности. Посредством конечно-элементного пакета “*ANSYS 19.2*” в твердотельную модель в соответствии с их анатомическим расположением [19, 20] были добавлены связки голеностопного и коленного суставов и межкостная мембрана, связывающая малоберцовую и большеберцовую кости. Для моделирования данных элементов были выбраны одномерные объекты типа “*Spring*”, при этом для большего соответствия связочной ткани предполагалось, что они работают только на растяжение. Их жесткость рассчитывалась следующим образом:

$$C = \frac{2Eh}{1 - \nu^2},$$

здесь  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $h$  – толщина моделируемого связочного элемента. Жесткости связочных элементов представлены в таблице 1 [21–28]. Более подробно процесс создания рассматриваемой твердотельной модели описан в более ранней работе авторов [19].

Название	Жесткость, [Н/м]
Дельтовидная связка (передняя порция)	$7.00 \cdot 10^4$
Межкостная мембрана	$4.00 \cdot 10^5$
Передняя крестообразная связка	$1.60 \cdot 10^6$
Переднее-латеральная связка	$2.00 \cdot 10^4$
Глубокий листок Медиальной коллатеральной связки	$3.15 \cdot 10^4$
Поверхностный листок Медиальной коллатеральной связки	$3.15 \cdot 10^4$
Малоберцово-бедренная связка	$3.35 \cdot 10^4$
Боковая бедрено-большеберцовая связка	$8.37 \cdot 10^4$
Сухожилие подколенной мышцы	$2.86 \cdot 10^4$
Передняя большеберцово-малоберцовая связка проксимального сочленения	$1.40 \cdot 10^5$
Задняя большеберцово-малоберцовая связка проксимального сочленения	$1.09 \cdot 10^5$
Переднее-нижняя большеберцово-малоберцовая связка дистального сочленения	$7.80 \cdot 10^4$
Передняя таранно-малоберцовая связка	$1.40 \cdot 10^5$
Задне-нижняя большеберцово-малоберцовая связка дистального сочленения	$1.01 \cdot 10^5$
Задняя таранно-малоберцовая связка	$1.60 \cdot 10^5$
Пяточно-малоберцовая связка	$1.20 \cdot 10^5$
Дельтовидная связка (большеберцово-пяточная и большеберцово-ладьевидная)	$1.62 \cdot 10^5$

**Таблица 1.** Жесткости связочных элементов, учтенные в твердотельной модели нижней конечности

В ходе биомеханического эксперимента все твердотельные элементы модели считались однородными, линейно-упругими, изотропными. В таблице 2 приведены механические свойства всех используемых в модели материалов [29–31].

Биомеханическое моделирование напряженно-деформированного состояния рассматриваемого объекта основывалось на решении задачи статики упругого тела.

#### Граничные условия:

- фиксация модели осуществлялась посредством жесткой заделки таранной кости по нижней ее плоскости;

- в областях соприкосновения апофисов большеберцовой и бедренной кости устанавливался контакт без трения;
- в области контакта корней и внешнего радиуса менисков с хрящом большеберцовой кости запрещались относительные перемещения (Форма контактах областей заранее подготавливалась в модуле геометрического редактора “DesignModeler” пакета “Ansys”. Для этого мениски делились на их анатомические области (рис. 3), выделялась область внешнего радиуса, после очертания полученных зон проецировались на хрящ большеберцовой кости);
- коэффициентом трения 0.2 [29] учитывался при контакте верхней поверхности менисков и бедренного хряща, а также нижних поверхностей с хрящом большеберцовой кости, не охваченных полным контактом (не разрешающим относительных перемещений);
- ограничений на повороты бедренной, большеберцовой и малоберцовой костей не накладывалось;
- перемещения бедренной и большеберцовой костей запрещались в направлении корональной и сагиттальной осей, по аксиальной оси были разрешены (направления соответствующих осей приведены на рис.1).

Трехмерная твердотельная модель покрывалась десятиузловыми конечными элементами типа “тетраэдр”. Зона интереса биомеханического моделирования НДС рассматриваемого объекта была сконцентрирована на области тканей мениска. Анализ сеточной сходимости и обоснование достоверности получаемых результатов приведены в более ранней статье авторов настоящей работы [19]. Основываясь на результатах работы [19] численные эксперименты проводились с размером конечных элементов 1.5 мм – мениски и 3 мм – остальные элементы модели.

Моделирование НДС элементов коленного сустава проводилось с учетом веса пациента посредством силы направленной по механической оси. Механическая ось нижней конечности соединяет центр головки бедренной кости и середину суставной линии голеностопного сустава.

Ценность подхода в данной работе заключается в том, что исследование влияния ПОМК на изменение НДС менисков коленного сустава в зависимости от степени варусной деформации строится авторами на модели одного исходного здорового коленного сустава (сустава с геометрией в норме) (рис. 2а). Моделирование варусной деформации проводится в программном пакете “SolidWorks” посредством иссечения клина, соответствующего варусу в 2, 4 и 6 градусов в проксимальном метаэпифизе здоровой большеберцовой кости (рис. 2б). После иссечения “клин закрывался” (рис. 2в). Разделенные части кортикального и губчатого компонента большеберцовой кости фиксировались посредством контакта “bonded” (полный контакт, не позволяющий относительных перемещений) при настройке расчетной модели в ANSYS.

В основе данного варианта моделирования лежит протокол предоперационного планирования коррекции варусной/вальгусной деформации конечности посредством высокой остеотомии большеберцовой кости [32, 33].

Для моделирования ПОМК в программном пакете “SolidWorks” на расстоянии 8 см от проксимального апекса малоберцовой кости удалялся 2 см сегмент (рис.1). Таким образом, были получены 4 модели с учетом ПОМК: 0, 2, 4, 6 градусов варусной деформации.

Материал	Модуль Юнга, [МПа]	Коэффициент Пуассона	Источник
Кортикальная кость	17000	0.30	[29]
Трабекулярная кость	840	0.20	[30]
Ткань мениска	80	0.30	[31]
Хрящевая ткань	12	0.45	[31]

Таблица 2. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона материалов модели

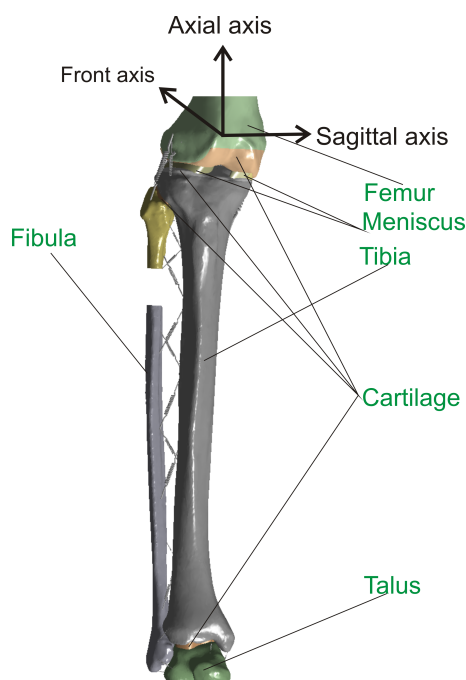
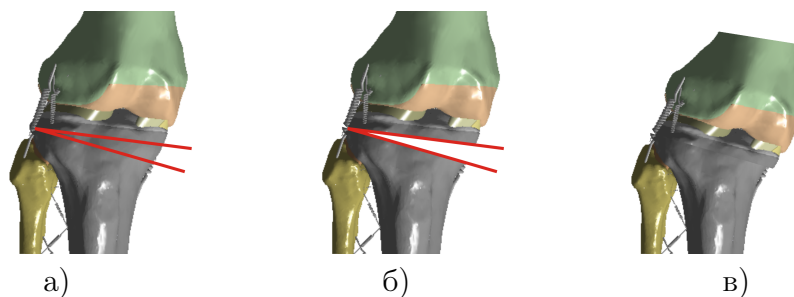


Рис. 1. Трехмерная модель нижней конечности с учетом проксимальной остеотомии малоберцовой кости



**Рис. 2.** Схема моделирования варусной деформации: (а) – клин соответствующий нужному углу варусности; (б) – иссечение клина; (в) – “закрытие клина”

### 3. Численный эксперимент.

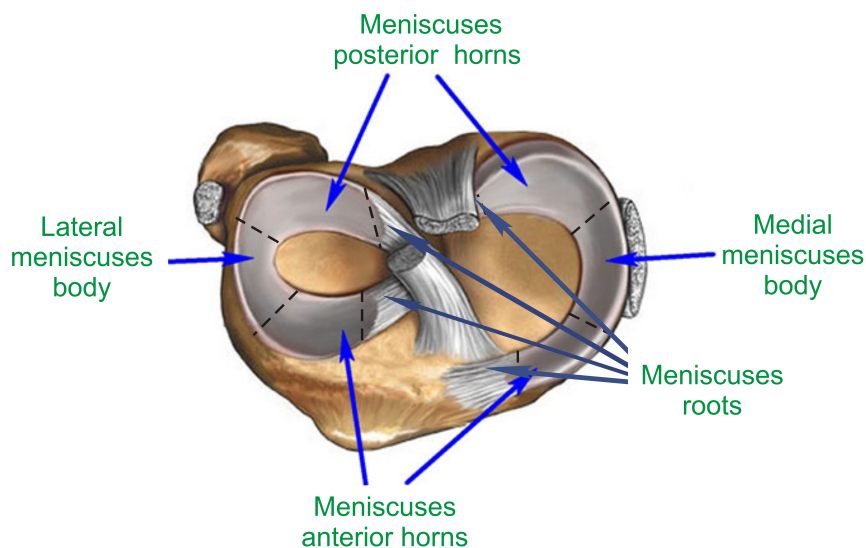
*3.1. Влияние ПОМК на НДС менисков коленного сустава.* Результаты моделирования влияния степени варусной деформации на НДС медиальных менисков приведены на рисунках 3-6. Во всех экспериментах бралась аксиальная нагрузка 2400 Н. Предложенное значение отвечает нагрузке на сустав мужчины среднего роста, весом 75 кг после прыжка с 35 см. Авторы работы [34] провели серию экспериментов, позволивших определить пределы прочности тканей менисков коленного сустава человека в зависимости от пола и возраста. Согласно исследованиям минимальный предел прочности – 23 МПа. Нагрузка, рассматриваемая в экспериментах настоящей работы, не является экстремальной и не приводит к напряжениям способным привести к разрыву тканей мениска.

Все биомеханические эксперименты показали, что наиболее подвержен нагрузкам медиальный (внутренний) мениск коленного сустава, зоны высоких напряжений располагаются в области его заднего рога и центральной части (теле). Анатомия менисков коленного сустава человека с обозначением, выделяемых анатомических зон, приведена на рисунке 3.

Увеличение угла варусной деформации от 0 до 6 градусов приводит к росту значений максимальных напряжений от 4.01 МПа до 7.46 МПа, соответственно, области высоких напряжений начинают покрывать большую площадь медиального мениска. Ранее было показано [19], что угол варусной деформации в 2 градуса влечет рост максимумов напряжений (25% относительно нормы) Из таблицы 3 видно, что данная тенденция сохраняется: угол варусной деформации в 4 градуса увеличил напряжения относительно нормальной геометрии на 65%, а угол в 6 градусов – на 86%.

Моделирование проксимальной остеотомии малоберцовой кости для всех четырех кейсов приводило к снижению напряжений на внутреннем мениске (таблица 4). Биомеханический эксперимент показал, что в случае варусной деформации в 2 и 4 градуса снижение максимумов напряжений соответственно 34% и 31%. Эксперимент с ПОМК на геометрии с 6 градусами варусной деформации дал снижение напряжений всего на 10%, в случае нормальной геометрии на 16.5%. Более того, рисунки 4-7 показывают значительное снижение площади





**Рис. 3.** Анатомические зоны менисков коленного сустава

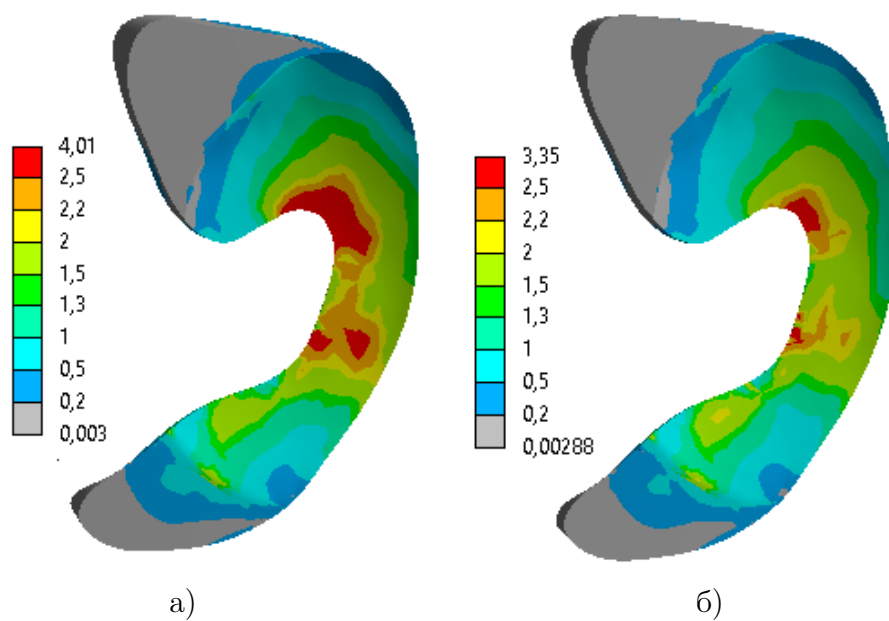
Угол, [градусы]	Max, [МПа]	Увеличение на процент от нормы	Увеличение на процент от предыдущей строки
0	4,01	-	-
2	5,01	25	25
4	6,60	65	32
6	7,47	86	13

**Таблица 3.** Влияние угла варусной деформации на напряжение в тканях медиального мениска

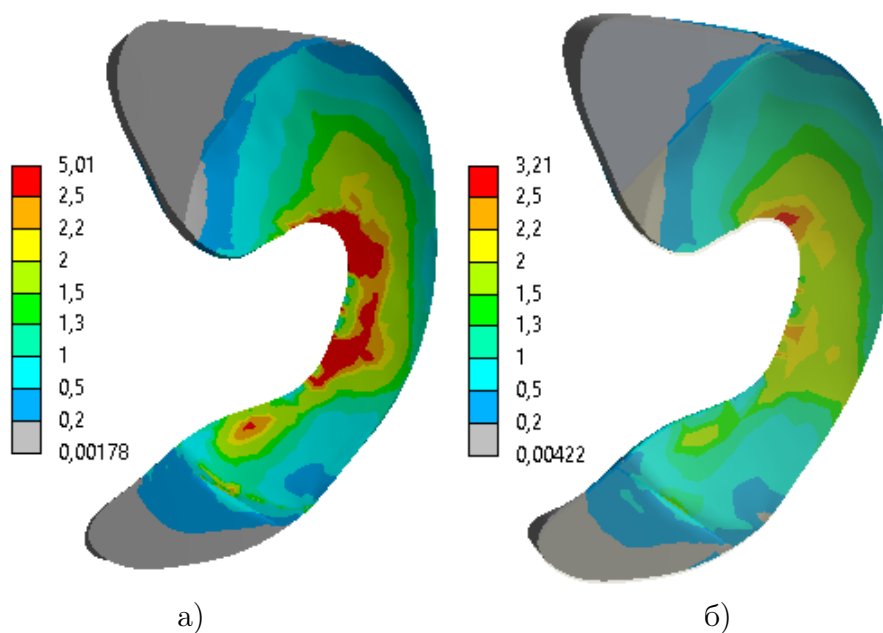
высоких напряжений после ПОМК для углов варусной деформации 2 и 4 (рис. 5-6). В то время, как эксперимент с ПОМК на геометрии с 6 градусами варусной деформации не привел к изменению картины распределения напряжений (рис. 7). В случае нормальной геометрии (рис. 4) площади области высоких напряжений уменьшились после моделирования ПОМК, но не так существенно, как при 2 и 4 градусах варусной деформации.

Результаты данного численного эксперимента могут свидетельствовать о том, ПОМК целесообразно применять для эффективного снижения нагрузки на область медиального мениска коленного сустава в случае варусной деформации в диапазоне от 2 до 4 градусов.

**4. Влияние действия длинной малоберцовой мышцы на НДС менисков коленного сустава после ПОМК.** Авторы [35] в своей клинической

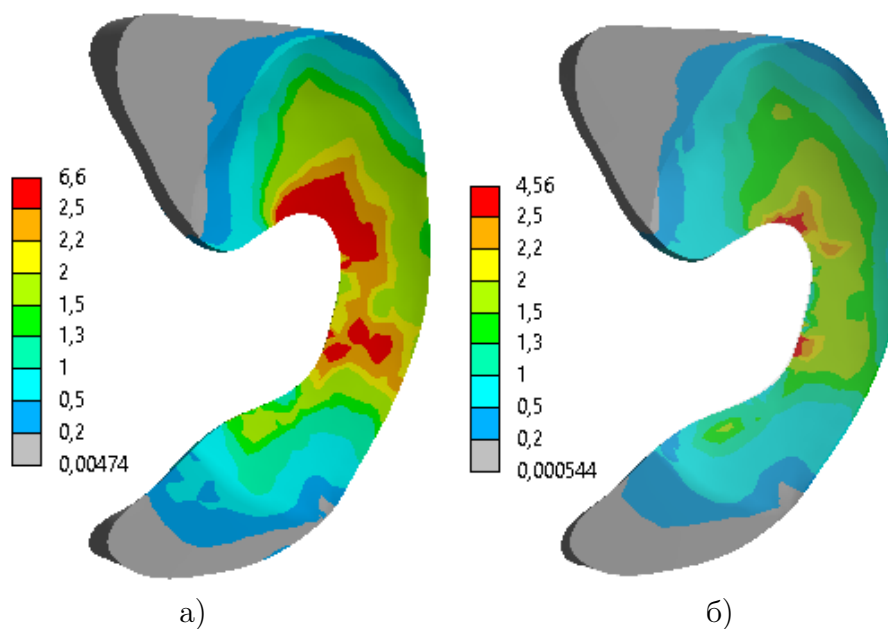


**Рис. 4.** Карта значений напряжения по Мизесу (2400Н, варус – 0 градусов): а. до ПОМК; б. после ПОМК

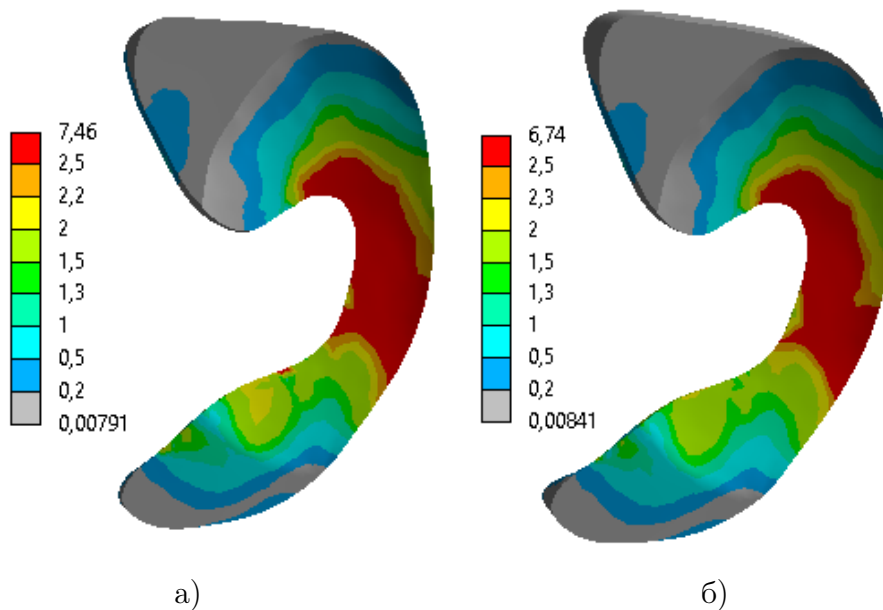


**Рис. 5.** Карта значений напряжения по Мизесу (2400Н, варус – 2 градусов): а. до ПОМК; б. после ПОМК

практике исследовали пациентов до и после выполнения ПОМК и сделали предположения о том, что одним из механизмов улучшающих состояние пациентов



**Рис. 6.** Карта значений напряжения по Мизесу (2400Н, варус – 4 градуса): а. до ПОМК; б. после ПОМК



**Рис. 7.** Карта значений напряжения по Мизесу (2400Н, варус – 6 градусов): а. до ПОМК; б. после ПОМК

после рассматриваемого хирургического вмешательства может быть так называемая “конкуренция мышц” головки бицепса бедра и длинной малоберцовой

Угол, [градус]	Мах до ПОМК, [МПа]	Мах после ПОМК, [МПа]	Процент снижение МАХ напряжений
0	4,01	3,35	16,5
2	5,01	3,31	<b>34</b>
4	6,60	4,56	<b>31</b>
6	7,46	6,47	10

**Таблица 4.** Влияние ПОМК на напряжения медиального мениска

мышцей. Именно эта конкуренция, по мнению авторов, способствует “перераспределению” напряжений с медиального мениска на латеральный, тем самым разгружая первый и снижая болевой синдром у пациентов. Их наблюдения показали, что после операционного вмешательства мышечный ответ длинной малоберцовой мышцы и двуглавой мышцы бедра возрастал.

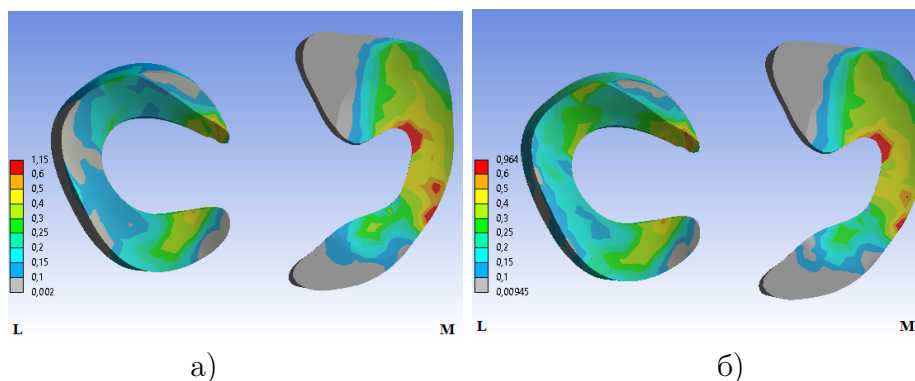
С учетом, сделанных в работе [35] предположений, дистализация малоберцовой кости может быть достигнута, если равнодействующая “конкурирующих” мышц направлена по линии действия длинной малоберцовой в дистальном направлении. Поэтому в рамках данного численного эксперимента к трехмерным моделям конечностей со значениями угла варусной деформации в 2 и 4 градуса до и после ПОМК прикладывалась сила, по линии действия длинной малоберцовой мышцы (от проксимальной к дистальной головке малоберцовой кости по оси кости).

Эксперимент проводился со значением нагрузки, имитирующей вес человека в 70кг, стоящего на одной ноге (700Н). Сила длинной малоберцовой мышцы варьируется от 400 до 600Н [36]. В численном эксперименте к проксимальной головке малоберцовой кости прикладывалась сила в 200Н (50% от нижнего значения силы длинной малоберцовой мышцы).

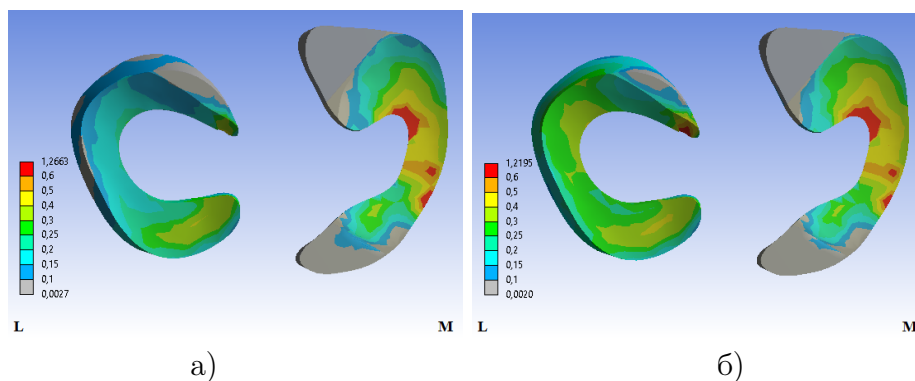
На рисунках 8-9 приведены карты значений напряжений на менисках коленного сустава в случае 4 и 2 градусов варусной деформации после проксимальной остеотомии малоберцовой кости с учетом возросшего мышечного ответ длинной малоберцовой мышцы и без учета мышечного ответа.

Численные эксперименты показывают снижение значений максимумов напряжений: на 16% в случае угла варусной деформации в 4 градуса и лишь на 4% в случае 2 градусов. Учет мышечного ответа длинной малоберцовой мышцы также привел к небольшому уменьшению площади высоких напряжений в центральной части (теле) внутреннего (медиального) мениска и росту значений напряжений (в рамках данного эксперимента более чем в два раза) во всех областях (тело, передний и задний рог) внешнего (латерального) мениска.

Данный результат говорит в пользу выводов авторов работы [35] и может стать некоторым подтверждением, того, что гипотеза “конкуренции мышц” после выполнения пациентам проксимальной остеотомии малоберцовой кости может способствовать снижению болевых ощущений во внутренней области коленного сустава.



**Рис. 8.** Распределение напряжений по Мизесу на менисках 700Н, варус 4 градуса: (а) без учета длинной малоберцовой мышцы; (б) с учетом длинной малоберцовой мышцы



**Рис. 9.** Распределение напряжений по Мизесу на менисках 700Н, варус 2 градуса: (а) без учета длинной малоберцовой мышцы; (б) с учетом длинной малоберцовой мышцы

**Обсуждение.** Проведенное в данной работе методом конечных элементов исследование было направлено на решение двух фундаментальных вопросов, связанных с биомеханическим обоснованием проксимальной остеотомии малоберцовой кости (ПОМК): определение границ ее эффективности в зависимости от степени варусной деформации и проверки гипотезы о роли длинной малоберцовой мышцы в механизме действия данной операции.

Полученные результаты убедительно демонстрируют, что биомеханическая эффективность ПОМК напрямую зависит от исходного угла варусной деформации коленного сустава. Численные расчеты показали, что при варусе в 2 и

4 градуса наблюдается максимальное снижение как пиковых напряжений (на 34% и 31% соответственно), так и площади зон высоких напряжений в медиальном мениске. Это позволяет рассматривать ПОМК как высокоэффективную малоинвазивную альтернативу для коррекции умеренной варусной деформации. Данный вывод находится в полном согласии с клиническими наблюдениями, которые эмпирически определяют “идеального кандидата” на ПОМК как пациента с углом варусной деформации до 4-5° [6, 7].

Крайне важным является установленный в настоящей работе предел применимости методики. При варусной деформации в 6 градусов ПОМК приводила к незначительному снижению пиковых напряжений (всего на 10%) и, что наиболее важно, не оказывала влияния на площадь зон высоких напряжений. Это свидетельствует о том, что при выраженном варусе патологические изменения в медиальном отделе коленного сустава носят уже столь грубый характер, что одного лишь устранения выпячивания остеотомии малоберцовой кости недостаточно для существенной разгрузки. В таких случаях, требуется более радикальная коррекция механической оси, обеспечиваемая методами высокой тибиальной остеотомии (НТО), что подтверждает ее статус “золотого стандарта” для коррекции деформаций высокой степени [5]. Таким образом, проведенное в настоящей работе исследование предоставляет количественное биомеханическое обоснование для клинического отбора пациентов на ПОМК.

Второй частью исследования в работе была верификация гипотезы “динамической дистализации малоберцовой кости”. Моделирование усилия со стороны длинной малоберцовой мышцы после ПОМК выявило два значимых эффекта: дальнейшее, хотя и небольшое, снижение напряжений на медиальном мениске и их закономерное увеличение на мениске латеральном. Этот феномен можно охарактеризовать как эффект “перераспределения” или “перемещения” нагрузки с медиального на латеральный отдел. Данные результаты служат прямым численным доказательством в пользу теории, выдвинутой Huang Z. et al. [35], и объясняют клинические наблюдения об увеличении мышечного ответа после операции. Мы полагаем, что именно этот механизм – динамическое натяжение латеральных структур коленного сустава за счет мышечной тяги – является ключевым в реализации декомпрессионного эффекта ПОМК, дополняя статические гипотезы “неравномерной усадки” и “большего количества кортикальных слоев” [8–10].

**Заключение.** В работе рассматривается трехмерная модель нижней конечности человека в положении полного разгибания, включающая в себя бедренную, малоберцовую, большеберцовую, таранную кость (с учетом как кортикальных, так и трабекулярных компонент), элементы моделирующие хрящи, покрывающие апексы бедренной и большеберцовой кости, медиальный и латеральный мениски, межкостную мембрану, связочный аппарат коленного и части голеностопного сустава [19]. На основе этой модели построена модель с учетом

варусной деформации вследствие деформации большеберцовой кости. Построена модель ПОМК для нормальной геометрии и геометрии с учетом варусной деформации вследствие деформации большеберцовой кости.

Исследование влияния угла варусности вследствие деформации большеберцовой кости показала существенную зависимость НДС менисков от данного параметра. Во всех экспериментах зоны высоких напряжений располагаются в области заднего рога и центральной части медиального мениска. Максимальные значения напряжений по Мисису на медиальном мениски в рамках приведенного эксперимента выросли на 25%, 65%, 86% при 2, 4 и 6 градусах варусности, соответственно, относительно нормальной геометрии конечности.

Показано, что ПОМК снижает максимальные значения напряжений на медиальном мениске для всех рассмотренных случаев (норма, варус 2, 4, 6 градусов). Для 2 и 4 градусов снижение составляло 34% и 31%, соответственно, для случая нормы и 6 градусов варусности на 16.5% и 10%, соответственно. ПОМК существенно уменьшает площадь области высоких напряжений в случае варусной деформации в 2 и 4 градуса, менее заметно в случае нормальной геометрии и совсем не изменяет размеров площади высоких напряжений при 6 градусах варусности. Данный результат может говорить о пределе применимости ПОМК.

Показано, что учет в модели действия длинной малоберцовой мышцы еще более снижает напряжения на медиальном мениске (для приведенного эксперимента на 16% для 4 градусов, на 4% для 2 градусов), а также приводит к росту напряжений на латеральном мениске. Можно говорить об эффекте “перетекания” напряжений с медиального на латеральное направление коленного сустава в следствии “конкуренции” головки бицепса бедра и длинной малоберцовой мышцы.

**Ограничения исследования.** Необходимо отметить ряд ограничений приведенной в работе модели. Моделирование проводилось для положения полного разгибания коленного сустава, в то время как максимальная нагрузка на мениски происходит при флексии. Кроме того, модель учитывала лишь основные связки и не включала полный мышечный корсет нижней конечности, что, однако, частично компенсировалось учетом тяги длинной малоберцовой мышцы. Механические свойства тканей принимались линейно-упругими и изотропными, что является общепринятым упрощением в биомеханическом моделировании, но может не в полной мере отражать вязкоупругие свойства биологических тканей.

**Перспективы.** Несмотря на указанные ограничения, настоящее исследование вносит существенный вклад в понимание механизмов действия ПОМК. Впервые количественно определен предел эффективности этой операции для разгрузки медиального мениска, показав ее максимальную результативность

при варусной деформации в 2–4 градуса. Кроме того, предоставлены полноценные данные в поддержку гипотезы о динамическом перераспределении нагрузок благодаря мышечному фактору. В перспективе представляется целесообразным исследование влияния ПОМК при различных углах сгибания коленного сустава, а также моделирование отдаленных последствий операции с учетом процессов ремоделирования костной ткани.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Римским А.А. был сделан литературный обзор, написано обсуждение, активно участвовал в интерпретации полученных результатов, работал над написанием и корректировкой текста статьи. Крылова Е.Ю. построение биомеханической модели, получение численных результатов, работа над написанием и корректировкой текста статьи. Островский Н.В., Гаркави А.В., постановка задачи, интерпретация полученных результатов.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** A.A. Rimsky conducted the literature review, wrote the Discussion section, actively participated in interpreting the results, and worked on writing and editing the manuscript. E.Yu. Krylova developed the biomechanical model, obtained the numerical results, and contributed to writing and editing the manuscript. N.V. Ostrovsky and A.V. Garkavi formulated the research problem and interpreted the results..

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Two years follow-up of patients with knee varus deformity and medial meniscus extrusion after medial opening wedge high tibial osteotomy and arthroscopic meniscus centralization / M. Wang, Y. Bai, W. Sun, [et al.] // *International Orthopaedics*. – 2024. – Vol. 48, no. 2. – P. 481–486. – DOI: 10.1007/s00264-023-05959-8.
2. Wear patterns of compartments in varus knee osteoarthritis among an Asian population: A cross-sectional study with radiographic and intraoperative analysis / K. Loh, K. Ayob, F. Che-Hamzah, [et al.] // *International Orthopaedics*. – 2025. – P. 1861–1867. – DOI: 10.1007/s00264-025-06549-6.
3. *Chung K., Ha J., Ra H.* Prognostic factors in the midterm results of pullout fixation for posterior root tears of the medial meniscus // *Arthroscopy: The Journal of Arthroscopic & Related Surgery*. – 2016. – Vol. 32, no. 7. – P. 1319–1327. – DOI: 10.1007/s00264-025-06549-6.
4. Meniscal root tears: from basic science to ultimate surgery / R. Papalia, S. Vasta, F. Franceschi, [et al.] // *British Medical Bulletin*. – 2013. – Vol. 106, no. 1. – P. 91–115. – DOI: 10.1093/bmb/1dt002.
5. Perioperative complications in osteotomies around the knee: a study in 858 cases / F. Ferner, C. Lutter, I. Schubert, [et al.] // *Archives of Orthopaedic and Trauma Surgery*. – 2022. – Vol. 142, no. 5. – P. 769–775. – DOI: 10.1007/s00402-020-03696-w.



6. Wang X., Wei L., Lv Z. Proximal fibular osteotomy: a new surgery for pain relief and improvement of joint function in patients with knee osteoarthritis // Journal of International Medical Research. – 2017. – Vol. 45, no. 1. – P. 282–289. – DOI: 10.1177/0300060516676630.
7. Proximal fibular osteotomy: systematic review on its outcomes / M. Ashraf, P. Purudappa, V. Sakthivelnathan, [et al.] // World Journal of Orthopedics. – 2020. – Vol. 11, no. 11. – P. 499. – DOI: 10.5312/wjo.v11.i11.499.
8. Shanmugasundaram S., Kambhampati S., Saseendar S. Proximal fibular osteotomy in the treatment of medial osteoarthritis of the knee—A narrative review of literature // Knee Surgery & Related Research. – 2019. – Vol. 31, no. 1. – P. 16. – DOI: 10.1186/s43019-019-0016-0.
9. Radiographic measures of settlement phenomenon in patients with medial compartment knee osteoarthritis / T. Dong, W. Chen, F. Zhang, [et al.] // Clinical Rheumatology. – 2016. – Vol. 35, no. 6. – P. 1573–1578. – DOI: 10.1007/s10067-015-3146-0.
10. Prakash L. Proximal Fibular Osteotomy for Medial compartment arthritis of the knee joint // Elsebaiy. – 2018. – Vol. 22. – P. 96–101.
11. Mechanism and influencing factors of proximal fibular osteotomy for treatment of medial compartment knee osteoarthritis: a prospective study / D. Qin, W. Chen, J. Wang, [et al.] // Journal of International Medical Research. – 2018. – Vol. 46, no. 8. – P. 3114–3123. – DOI: 10.1177/0300060518772715.
12. Донник А., Коссович Л., Оленко Е. Поведение сегмента грудного отдела позвоночника при оскольчатом переломе позвонка до и после хирургического лечения: биомеханический эксперимент // Российский журнал биомеханики. – 2022. – Т. 26, № 1. – С. 25–39. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.1.02.
13. Analysis of cartilage loading and injury correlation in knee varus deformity / H. Zhang, J. Ma, A. Tian, [et al.] // Medicine. – 2024. – Vol. 103, no. 19. – P. 38065. – DOI: 10.1097/MD.00000000000038065.
14. Biomechanical effects of digitally constructed titanium, modified polyetheretherketone, and polyetherketoneketone subperiosteal implants on atrophied maxilla: a finite element analysis / M. El-Sawy [et al.] // BMC Oral Health. – 2025. – Vol. 25, no. 1. – P. 1142. – DOI: 10.1186/s12903-025-06426-z.
15. The role of mechanical wall stress and wall shear stress on coronary artery disease / A. Tziotziou, A. de Juana Fabra, A. Hoogendoorn, [et al.] // Computer Methods and Programs in Biomedicine. – 2025. – P. 108968. – DOI: 10.1016/j.cmpb.2025.108968.
16. Finite element analysis-assisted surgical planning and evaluation of flap design in hand surgery / G. Yang [et al.] // Frontiers in Bioengineering and Biotechnology. – 2025. – Vol. 13. – P. 1611993. – DOI: 10.3389/fbioe.2025.1611993.
17. Численный анализ напряженно-деформированного состояния остеотомий первой плюсневой кости / А. Полиенко [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2023. – Т. 23, № 4. – С. 496–511. – DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-4-496-511.
18. Методология «Планирование - Моделирование – Прогнозирование» для предоперационного планирования в травматологии-ортопедии / Л. Бессонов [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.

- Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 3. – С. 359–380. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-3-359-380.
19. Проксимальная остеотомия малоберцовой кости в лечении патологии внутреннего отдела коленного сустава: экспериментальная математическая модель / А. Римский [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2025. – Т. 29, № 2. – С. 71–82. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2025.2.06.
  20. The crural interosseous membrane re-visited: Part II, new biomechanical concepts / J. Morley [et al.] // Turkish Journal of Kinesiology. – 2022. – Vol. 8, no. 4. – P. 97–106. – DOI: 10.31459/turkjin.1170716.
  21. Siegler S., Block J., Schneck C. The mechanical characteristics of the collateral ligaments of the human ankle joint // Foot & Ankle. – 1988. – Vol. 8, no. 5. – P. 234–242. – DOI: 10.1177/107110078800800502.
  22. Tensile properties of the interosseous membrane of the human forearm / H. Pfaeffle [et al.] // Journal of Orthopaedic Research. – 1996. – Vol. 14, no. 5. – P. 842–845. – DOI: 10.1002/jor.1100140525.
  23. A finite element model of the human knee joint for the study of tibio-femoral contact / T. Haut Donahue [et al.] // Journal of Biomechanical Engineering. – 2002. – Vol. 124, no. 3. – P. 273–280. – DOI: 10.1115/1.1470171.
  24. The anterolateral ligament: an anatomic, radiographic, and biomechanical analysis / M. Kennedy [et al.] // The American Journal of Sports Medicine. – 2015. – Vol. 43, no. 7. – P. 1606–1615. – DOI: 10.1177/0363546515578253.
  25. Comparative analysis of the structural properties of the collateral ligaments of the human knee / W. Wilson [et al.] // Journal of Orthopaedic & Sports Physical Therapy. – 2012. – Vol. 42, no. 4. – P. 345–351. – DOI: 10.2519/jospt.2012.3919.
  26. Mechanical properties of the posterolateral structures of the knee / R. LaPrade [et al.] // The American Journal of Sports Medicine. – 2005. – Vol. 33, no. 9. – P. 1386–1391. – DOI: 10.1177/0363546504274143.
  27. The proximal tibiofibular joint: a biomechanical analysis of the anterior and posterior ligamentous complexes / D. Marchetti [et al.] // The American Journal of Sports Medicine. – 2017. – Vol. 45, no. 8. – P. 1888–1892. – DOI: 10.1177/0363546517697288.
  28. A biomechanical evaluation of the tibiofibular and tibiotalar ligaments of the ankle / M. Beumer [et al.] // Foot & Ankle International. – 2003. – Vol. 24, no. 5. – P. 426–429. – DOI: 10.1177/107110070302400509.
  29. Finite element analysis of different internal fixation methods for the treatment of Pauwels type III femoral neck fracture / L. Tianye [et al.] // Biomedicine & Pharmacotherapy. – 2019. – Vol. 112. – P. 108658. – DOI: 10.1016/j.biopha.2019.108658.
  30. Finite element analysis of the effect of cannulated screw placement and drilling frequency on femoral neck fracture fixation / J. Mei [et al.] // Injury. – 2014. – Vol. 45. – P. 2045–2050. – DOI: 10.1016/j.injury.2014.07.014.
  31. Finite element analysis of unicompartmental knee arthroplasty / A. Hopkins [et al.] // Medical Engineering & Physics. – 2010. – Vol. 32. – P. 14–21. – DOI: 10.1016/j.medengphy.2009.10.002.

32. Osteotomy around the knee: the surgical treatment of osteoarthritis / H. Peng [et al.] // *Orthopaedic Surgery*. – 2021. – Vol. 13, no. 5. – P. 1465–1473. – DOI: 10.1111/os.13021.
33. Высокая тибиальная остеотомия при лечении больных со II–III стадией гонартроза. Ближайшие результаты и факторы, влияющие на результат / В. Бялик [и др.] // *Научно-практическая ревматология*. – 2017. – Т. 55, № 6. – С. 668–674. – DOI: 10.14412/1995-4484-2017-668-674.
34. Вагапова В., Рыбалко Д., Самоходова О. Гистотопография и прочностные свойства менисков коленного сустава человека // *Медицинский вестник Башкортостана*. – 2007. – Т. 2, № 3/4. – С. 96–100.
35. Evidence and mechanism by which upper partial fibulectomy improves knee biomechanics and decreases knee pain of osteoarthritis / Z. Huang [et al.] // *Journal of Orthopaedic Research*. – 2018. – Vol. 36, no. 8. – P. 2099–2108. – DOI: 10.1002/jor.23867.
36. Examination of the Tensile Strength of the Peroneus Longus Muscle / H. Yağar [et al.] // *Cureus*. – 2024. – Vol. 16, no. 8. – e66683. – DOI: 10.7759/cureus.66683.

## REFERENCES

1. Two years follow-up of patients with knee varus deformity and medial meniscus extrusion after medial opening wedge high tibial osteotomy and arthroscopic meniscus centralization / M. Wang [et al.] // *International Orthopaedics*. – 2024. – Vol. 48, no. 2. – P. 481–486. – DOI: 10.1007/s00264-023-05959-8.
2. Wear patterns of compartments in varus knee osteoarthritis among an Asian population: A cross-sectional study with radiographic and intraoperative analysis / K. Loh [et al.] // *International Orthopaedics*. – 2025. – P. 1861–1867. – DOI: 10.1007/s00264-025-06549-6.
3. Chung K., Ha J., Ra H. Prognostic factors in the midterm results of pullout fixation for posterior root tears of the medial meniscus // *Arthroscopy: The Journal of Arthroscopic & Related Surgery*. – 2016. – Vol. 32, no. 7. – P. 1319–1327. – DOI: 10.1007/s00264-025-06549-6.
4. Meniscal root tears: from basic science to ultimate surgery / R. Papalia [et al.] // *British Medical Bulletin*. – 2013. – Vol. 106, no. 1. – P. 91–115. – DOI: 10.1093/bmb/1dt002.
5. Perioperative complications in osteotomies around the knee: a study in 858 cases / F. Ferner [et al.] // *Archives of Orthopaedic and Trauma Surgery*. – 2022. – Vol. 142, no. 5. – P. 769–775. – DOI: 10.1007/s00402-020-03696-w.
6. Wang X., Wei L., Lv Z. Proximal fibular osteotomy: a new surgery for pain relief and improvement of joint function in patients with knee osteoarthritis // *Journal of International Medical Research*. – 2017. – Vol. 45, no. 1. – P. 282–289. – DOI: 10.1177/0300060516676630.
7. Proximal fibular osteotomy: systematic review on its outcomes / M. Ashraf [et al.] // *World Journal of Orthopedics*. – 2020. – Vol. 11, no. 11. – P. 499. – DOI: 10.5312/wjo.v11.i11.499.

8. *Shanmugasundaram S., Kambhampati S., Saseendar S.* Proximal fibular osteotomy in the treatment of medial osteoarthritis of the knee—A narrative review of literature // *Knee Surgery & Related Research.* – 2019. – Vol. 31, no. 1. – P. 16. – DOI: 10.1186/s43019-019-0016-0.
9. Radiographic measures of settlement phenomenon in patients with medial compartment knee osteoarthritis / T. Dong [et al.] // *Clinical Rheumatology.* – 2016. – Vol. 35, no. 6. – P. 1573–1578. – DOI: 10.1007/s10067-015-3146-0.
10. *Prakash L.* Proximal Fibular Osteotomy for Medial compartment arthritis of the knee joint // *Elsebaiy.* – 2018. – Vol. 22. – P. 96–101.
11. Mechanism and influencing factors of proximal fibular osteotomy for treatment of medial compartment knee osteoarthritis: a prospective study / D. Qin [et al.] // *Journal of International Medical Research.* – 2018. – Vol. 46, no. 8. – P. 3114–3123. – DOI: 10.1177/0300060518772715.
12. *Donnik A., Kossovich L., Olenko E.* Behavior of the thoracic spine segment in a comminuted vertebral fracture before and after surgical treatment: biomechanical experiment // *Russian Journal of Biomechanics.* – 2022. – Vol. 26, no. 1. – P. 25–39. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.1.02.
13. Analysis of cartilage loading and injury correlation in knee varus deformity / H. Zhang [et al.] // *Medicine.* – 2024. – Vol. 103, no. 19. – P. 38065. – DOI: 10.1097/MD.00000000000038065.
14. Biomechanical effects of digitally constructed titanium, modified polyetheretherketone, and polyetherketoneketone subperiosteal implants on atrophied maxilla: a finite element analysis / M. El-Sawy [et al.] // *BMC Oral Health.* – 2025. – Vol. 25, no. 1. – P. 1142. – DOI: 10.1186/s12903-025-06426-z.
15. The role of mechanical wall stress and wall shear stress on coronary artery disease / A. Tziotziou [et al.] // *Computer Methods and Programs in Biomedicine.* – 2025. – P. 108968. – DOI: 10.1016/j.cmpb.2025.108968.
16. Finite element analysis-assisted surgical planning and evaluation of flap design in hand surgery / G. Yang [et al.] // *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology.* – 2025. – Vol. 13. – P. 1611993. – DOI: 10.3389/fbioe.2025.1611993.
17. Numerical Analysis of the Stress-Strain State of Osteotomies of the First Metatarsal Bone / A. Polienko [et al.] // *Saratov University News. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics.* – 2023. – Vol. 23, no. 4. – P. 496–511. – DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-4-496-511.
18. The "Planning - modelling - prediction" methodology for preoperative planning in trauma orthopaedics / L. Bessonov [et al.] // *Saratov University News. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics.* – 2024. – Vol. 24, no. 3. – P. 359–380. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-3-359-380.
19. The effect of proximal fibula osteotomy in the treatment of medial knee joint pathology: experimental mathematical model / A. Rimskiy [et al.] // *Russian Journal of Biomechanics.* – 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 71–82. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2025.2.06.
20. The crural interosseous membrane re-visited: Part II, new biomechanical concepts / J. Morley [et al.] // *Turkish Journal of Kinesiology.* – 2022. – Vol. 8, no. 4. – P. 97–106. – DOI: 10.31459/turkjin.1170716.

21. *Siegler S., Block J., Schneck C.* The mechanical characteristics of the collateral ligaments of the human ankle joint // *Foot & Ankle*. – 1988. – Vol. 8, no. 5. – P. 234–242. – DOI: 10.1177/107110078800800502.
22. Tensile properties of the interosseous membrane of the human forearm / H. Pfaeffle [et al.] // *Journal of Orthopaedic Research*. – 1996. – Vol. 14, no. 5. – P. 842–845. – DOI: 10.1002/jor.1100140525.
23. A finite element model of the human knee joint for the study of tibio-femoral contact / T. Haut Donahue [et al.] // *Journal of Biomechanical Engineering*. – 2002. – Vol. 124, no. 3. – P. 273–280. – DOI: 10.1115/1.1470171.
24. The anterolateral ligament: an anatomic, radiographic, and biomechanical analysis / M. Kennedy [et al.] // *The American Journal of Sports Medicine*. – 2015. – Vol. 43, no. 7. – P. 1606–1615. – DOI: 10.1177/0363546515578253.
25. Comparative analysis of the structural properties of the collateral ligaments of the human knee / W. Wilson [et al.] // *Journal of Orthopaedic & Sports Physical Therapy*. – 2012. – Vol. 42, no. 4. – P. 345–351. – DOI: 10.2519/jospt.2012.3919.
26. Mechanical properties of the posterolateral structures of the knee / R. LaPrade [et al.] // *The American Journal of Sports Medicine*. – 2005. – Vol. 33, no. 9. – P. 1386–1391. – DOI: 10.1177/0363546504274143.
27. The proximal tibiofibular joint: a biomechanical analysis of the anterior and posterior ligamentous complexes / D. Marchetti [et al.] // *The American Journal of Sports Medicine*. – 2017. – Vol. 45, no. 8. – P. 1888–1892. – DOI: 10.1177/0363546517697288.
28. A biomechanical evaluation of the tibiofibular and tibiotalar ligaments of the ankle / A. Beumer [et al.] // *Foot & Ankle International*. – 2003. – Vol. 24, no. 5. – P. 426–429. – DOI: 10.1177/107110070302400509.
29. Finite element analysis of different internal fixation methods for the treatment of Pauwels type III femoral neck fracture / L. Tianye [et al.] // *Biomedicine & Pharmacotherapy*. – 2019. – Vol. 112. – P. 108658. – DOI: 10.1016/j.biopha.2019.108658.
30. Finite element analysis of the effect of cannulated screw placement and drilling frequency on femoral neck fracture fixation / J. Mei [et al.] // *Injury*. – 2014. – Vol. 45. – P. 2045–2050. – DOI: 10.1016/j.injury.2014.07.014.
31. Finite element analysis of unicompartmental knee arthroplasty / A. Hopkins [et al.] // *Medical Engineering & Physics*. – 2010. – Vol. 32. – P. 14–21. – DOI: 10.1016/j.medengphy.2009.10.002.
32. Osteotomy around the knee: the surgical treatment of osteoarthritis / H. Peng [et al.] // *Orthopaedic Surgery*. – 2021. – Vol. 13, no. 5. – P. 1465–1473. – DOI: 10.1111/os.13021.
33. High tibial osteotomy in the treatment of patients with stage II-III of knee osteoarthritis. Immediate results and factors influencing the outcome / V. Byalik [et al.] // *Scientific and Practical Rheumatology*. – 2017. – Vol. 55, no. 6. – P. 668–674. – DOI: 10.14412/1995-4484-2017-668-674.
34. *Vagapova V., Rybalko D., Samohodova O.* Histotopography and strength peculiarities of human knee menisci // *Medical Bulletin of Bashkortostan*. – 2007. – Vol. 2, no. 3/4. – P. 96–100.

35. Evidence and mechanism by which upper partial fibulectomy improves knee biomechanics and decreases knee pain of osteoarthritis / Z. Huang [et al.] // Journal of Orthopaedic Research. – 2018. – Vol. 36, no. 8. – P. 2099–2108. – DOI: 10.1002/jor.23867.
36. Examination of the tensile strength of the peroneus longus muscle / H. Yağar [et al.] // Cureus. – 2024. – Vol. 16, no. 8. – e66683. – DOI: 10.7759/cureus.66683.

И. Н. Захаров<sup>1</sup>, Е. Г. Солодкова<sup>2</sup>, С. В. Балалин<sup>2</sup>, В. Х. Лэ<sup>1</sup>, Е. В. Лобанов<sup>2</sup>

## РАЗРАБОТКА ПЕРСОНАЛИЗИРОВАННОЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ РОГОВИЦЫ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИМПЛАНТАЦИИ ИНТРАСТРОМАЛЬНЫХ СЕГМЕНТОВ ПРИ КЕРАТОКОНУСЕ

<sup>1</sup>Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

<sup>2</sup>Волгоградский филиал ФГАУ «НМИЦ «МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад.  
С. Н. Федорова» Минздрава России, Волгоград, Россия

**Аннотация.** Разрабатывается персонализированная конечно-элементная биомеханическая модель роговицы с кератоконусом для цифрового моделирования операции имплантации интрастромальных сегментов. Модель учитывает индивидуальные геометрические параметры и механические свойства роговичной ткани, включая зоны патологических изменений с пониженной жесткостью. Разработан комплексный подход к моделированию хирургического вмешательства, включающий этапы аппланации роговицы, формирования внутривитреального канала, контактного взаимодействия имплантов с тканью и процессов декогезии. Представлено численное прогнозирование влияния различных параметров сегментов (толщина, длина дуги, положение) на биомеханическое поведение роговицы и коррекцию кератотопографических показателей. Верификация модели на клиническом случае пациента с кератоконусом III стадии подтвердила достаточно высокую точность прогноза (отклонение 15–20%).

**Ключевые слова:** роговица, кератоконус, интрастромальные сегменты, Pentacam, Corvis, метод конечных элементов, цифровое планирование операции

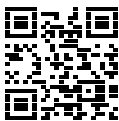
**Захаров Игорь Николаевич**, доктор технических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов; e-mail: [zahar@mail.ru](mailto:zahar@mail.ru); <https://orcid.org/0000-0001-7177-7245>; AuthorID: 142419

**Солодкова Елена Геннадиевна**, кандидат медицинских наук, заместитель директора по научной работе; e-mail: [solo23el@mail.ru](mailto:solo23el@mail.ru); <https://orcid.org/0000-0002-7786-5665>; AuthorID: 652843

**Балалин Сергей Викторович**, доктор медицинских наук, заведующий научным отделом; e-mail: [s.v.balalin@gmail.com](mailto:s.v.balalin@gmail.com); <https://orcid.org/http://orcid.org/0000-0002-5250-3692>; AuthorID: 267867

**Лэ Ван Хоанг**, аспирант; e-mail: [hoangle.vol@gmail.com](mailto:hoangle.vol@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0002-1536-3061>; AuthorID: 1194083

**Лобанов Евгений Викторович**, инженер; e-mail: [omt@isee.ru](mailto:omt@isee.ru); <https://orcid.org/http://orcid.org/0000-0001-9112-3230>; AuthorID: 1163700



**для цитирования:** Захаров И. Н., Солодкова Е. Г., Балалин С. В., Лэ В. Х., Лобанов Е. В. Разработка персонализированной конечно-элементной модели роговицы для прогнозирования результатов имплантации интрастромальных сегментов при кератоконусе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 221–245. DOI: 10.37972/chgru.2025.64.2.005. EDN: VCSQZG

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.



I. N. Zakharov<sup>1</sup>, E. G. Solodkova<sup>2</sup>, S. V. Balalin<sup>2</sup>, V. Kh. Le<sup>1</sup>, E. V. Lobanov<sup>2</sup>

## DEVELOPMENT OF A PERSONALIZED FINITE-ELEMENT MODEL OF THE CORNEA FOR PREDICTING THE OUTCOMES OF INTRASTROMAL SEGMENT IMPLANTATION IN KERATOCONUS

<sup>1</sup> *Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia*

<sup>2</sup> *Volgograd Branch of the S.N. Fyodorov Eye Microsurgery Federal State Institution, Volgograd, Russia*

**Abstract.** A personalized finite-element biomechanical model of the keratoconic cornea has been developed for digital simulation of intrastromal segment implantation surgery. The model incorporates patient-specific geometric parameters and mechanical properties of the corneal tissue, including zones of pathological changes with reduced stiffness. A comprehensive approach to surgical simulation has been established, encompassing the stages of corneal appplanation, formation of the intrastromal channel, implant–tissue contact interactions, and decohesion processes. Numerical predictions of the influence of various segment parameters (thickness, arc length, position) on corneal biomechanical behavior and keratotopographic correction are presented. Model validation on a clinical case of stage III keratoconus demonstrated high predictive accuracy, with deviations within 15–20%.

**Keywords:** cornea, keratoconus, intracorneal segments, Pentacam, Corvis, finite element method, digital surgical planning

**Igor N. Zakharov**, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Strength of Materials; e-mail: zaxap@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7177-7245>; AuthorID: 142419

**Elena G. Solodkova**, Candidate of Medical Sciences, Deputy Director for Research; e-mail: solo23el@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7786-5665>; AuthorID: 652843

**Sergey V. Balalin**, Doctor of Medical Sciences, Head of the Research Department; e-mail: s.v.balalin@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-5250-3692>; AuthorID: 267867

**Van Hoang Le**, Postgraduate Student; e-mail: hoangle.vol@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-1536-3061>; AuthorID: 1194083

**Evgeny V. Lobanov**, Engineer; e-mail: omt@isee.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9112-3230>; AuthorID: 1163700

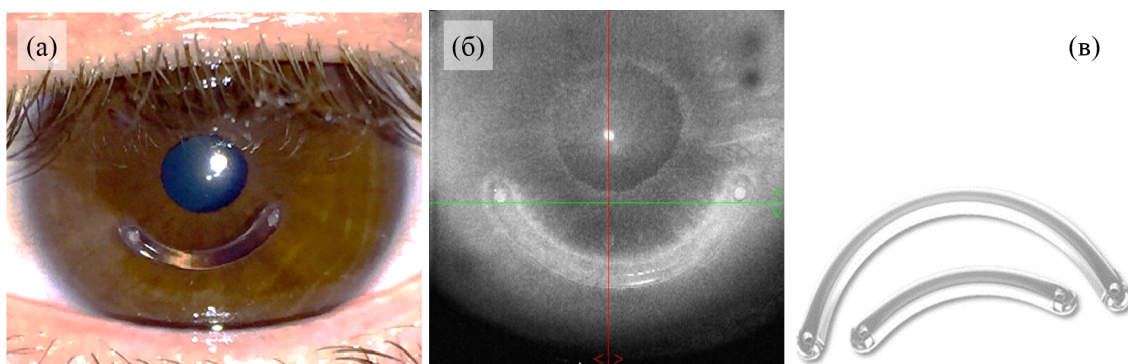


**to cite this article:** Zakharov I. N., Solodkova E. G., Balalin S. V., Le V. H., Lobanov E. V. Development of a personalized finite-element model of the cornea for predicting the outcomes of intrastromal segment implantation in keratoconus // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 221–245. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.005

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**1. Введение.** Метод имплантации интрастромальных колец и сегментов (рис. 1), разработанный в 1980-х годах для коррекции близорукости низкой и средней степени тяжести, сегодня получил широкое распространение при лечении различных видов кератэктазий и патологий роговицы, таких как кератоконус, пеллюцидная краевая дистрофия, ятрогенная эктазия роговицы и др.

Первые результаты применения внутрироговичных сегментов при лечении кератоконуса появляются в начале 2000-х годов в работах J. Colin и его коллег [1]. Предложенная в качестве дополнительной хирургической процедуры при кератоконусе, технология имплантации интрастромальных сегментов (ИСС) показывает эффективные результаты по снижению астигматизма, уменьшению кривизны роговицы, регуляризации ее формы и позволяет отсрочить, если не избежать, трансплантацию роговицы при эктатических заболеваниях. С тех пор было опубликовано множество отчетов и клинических исследований об эффективном применении ИСС при лечении кератоконуса, современную подборку и анализ которых можно найти в обзорных статьях [2].



**Рис. 1.** Имплантация интрастромальных сегментов: а) общий вид роговицы с сегментом; б) оптическая когерентная томография роговицы с ИСС (режим Corneal Sub); в) интрастромальные сегменты производства ООО НЭП «Микрохирургия глаза»

Несмотря на существование практических рекомендаций и номограмм производителей (Keraring, Intacs, Ferrara и др. [3]) для выбора ИСС в зависимости от сочетания оптических, рефракционных, кератотопографических параметров роговицы пациента, в ряде случаев имплантация ИСС не дает рефракционного эффекта и даже может сопровождаться ухудшением зрения пациента после операции [4], а также осложнениями в виде миграции, экструзии и протрузии сегментов, отека ткани, кератита и т.д. [5]. Во многом это связано с принципиальной невозможностью учета индивидуальных особенностей геометрии, строения и свойств живого органа (роговицы) пациента в рамках некоторого универсального подхода.

Вышеизложенное придает особую актуальность пациент-ориентированным методикам лечения заболеваний, основывающимся на совместном использовании клинических приборных данных пациента и персонализированных компьютерных (конечно-элементных) моделей роговицы, построенных на их основе.

Одной из первых публикаций в области численного моделирования внутрироговичных колец, вероятно, можно считать краткое сообщение Р.М. Pinsky (1995) [6]. Систематические исследования, в которых модели роговицы и сегментов выстраиваются, как правило, с использованием метода конечных элементов (МКЭ), появляются в более позднее время (например, в статьях авторов S. Kling (2013) [7], A. Daxer (2015) [8], M.A. Lago (2015) [9], S.N. Khan (2016) [10], И.С. Никитин (2017) [11] и др.) и не теряют своей актуальности в современных работах (M.Á. Ariza-Gracia (2020) [12], С.М. Бауэр (2024) [13], N.M. Bagheri (2022) [14], G.G. de Oteyza (2023) [15] и т.д.).

Указанные модели базируются на некоторой системе допущений относительно геометрии расчетной области, свойств материала роговицы и параметров зон их деградации, формы, механических характеристик имплантов и моделей их контакта

Идеализированная форма роговицы авторами, как правило, задается в виде сферической [7, 8, 10–13], или эллиптической [15] оболочки с переменной толщиной стенки. Для описания материала роговицы используются различные модели гиперупругости, как изотропной — Муни-Ривлина [7], Огдена [9, 10], Йео [12, 15], так и анизотропной — Гассера-Хольцапфеля-Огдена [14], модели линейной упругости с ортотропным [11] или трансверсально-изотропным [13] распределением свойств и другие.

Для описания деградации свойств ткани при кератоконусе может вводиться локальная зона с пониженными коэффициентами упругости в виде центральной круговой [7, 11, 12] или эллиптической [15] области, либо задается общее снижение жесткости в объеме роговицы [9, 14]. При моделировании операций по коррекции зрения имплантацией внутрироговичных колец (типа MyoRing) и сегментов (Intacs, Ferrara) в [10, 13] роговица предполагается интактной — патологические изменения характеристик не рассматриваются.

Используемый в качестве материала имплантов полиметилметакрилат (ПММА), как правило, считается линейно-упругим [10–15], реже — абсолютно жестким [9]. При этом в зависимости от типа и производителя ИСС рассматриваются различные формы сечения: треугольная (типа Keraring, Ferrara, MyoRing и т.д.) [7, 9, 11–15], шестиугольная (Intacs) [7, 12], круглая [12, 14], эллиптическая [14].

Различные подходы применяются авторами при разработке моделей контакта импланта с поверхностями внутрироговичного канала. В ряде случаев контактное взаимодействие задается условно, например, перемещением узлов конечно-элементной сетки [9, 10] или распределенной нагрузкой на стенки канала [11]. В других же — для раскрытия канала задается предварительный зазор между его стенками [13, 14], внутреннее давление [12], которые постепенно уменьшаются до тех пор, пока поверхности войдут в полный контакт, а сегмент (кольцо) установится внутри роговицы.

Отметим, что в рамках универсальных подходов, использующих идеализированную геометрию и усредненные свойства ткани, можно выявить общие закономерности влияния параметров имплантации ИСС на качественные изменения

роговицы. Однако в этих случаях существенно ограничиваются возможности прогнозирования и количественной оценки результатов операции для конкретного пациента с учетом его индивидуальных особенностей.

При этом пациент-ориентированные МКЭ-модели лечения кератоконуса установкой ИСС, основанные на индивидуализированных параметрах геометрии и материала роговицы, полученных при клиническом обследовании пациента, в современных публикациях представлены весьма ограниченно [9, 14].

В данном исследовании разрабатывается персонализированная конечно-элементная (КЭ) модель роговицы с кератоконусом при имплантации интрастромальных сегментов. Модель позволяет варьировать размеры и положение ИСС с целью обеспечения эффективной коррекции кератотопографических картин в соответствии с наилучшим расчетным прогнозом для пациента. На всех этапах исследования соблюдались принципы, изложенные в Хельсинкской декларации, от всех участников было получено информированное письменное согласие. Протокол исследования получил одобрение комитета по медицинской этике Волгоградского филиала ФГАУ «НМИЦ «МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова» Минздрава России.

**2. Постановка задачи.** Этапы построения и базовые соотношения пациент-ориентированной трехмерной КЭ модели биомеханических свойств и поведения роговицы подробно рассмотрены в статьях [16, 17]. Поэтому в этом разделе ограничимся изложением наиболее характерных особенностей данной модели.

*2.1. Основные уравнения.* Считая материал роговицы изотропным гиперупругим, основные уравнения задаются в рамках механики больших деформаций следующим образом.

Уравнения квазистатического равновесия

$$\nabla \cdot (\mathbf{FS})^T + \mathbf{f}_v = 0,$$

где  $\nabla$  — оператор набла;  $T$  — символ транспонирования;  $\mathbf{f}_v$  — вектор объемных сил;  $\mathbf{S}$  — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа;  $\mathbf{F}$  — градиент деформации, определяемый как:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u},$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор второго ранга,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений.

Второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа связан с функцией плотности энергии деформации  $W_s$  соотношением:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{ext}} + \frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon}. \quad (1)$$

где  $\mathbf{S}_{\text{ext}}$  — тензор дополнительных напряжений;  $\varepsilon$  — тензор деформации Грина–Лагранжа

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Функциональная форма соотношения для  $W_s$  в данной работе устанавливается на основе сравнительного расчетно-экспериментального анализа известных гиперупругих моделей роговицы (Муни-Ривлина с 2 и 5 параметрами, Огдена, Сторакерса, Ёео) [17]. По результатам исследования в качестве базовой принята модель Ёео, в рамках которой функция плотности энергии деформации может быть записана в виде

$$W_s = c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_1 - 3)^3 + \frac{\kappa}{2}(J - 1)^2, \quad (2)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — эмпирические параметры;  $J = \det \mathbf{F}$  — третий инвариант градиента деформации  $\mathbf{F}$ , характеризующий изменение объема;  $\kappa$  — модуль объемной упругости;  $\bar{I}_1$  — первый инвариант тензора  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\bar{I}_1 = \text{tr}(\bar{\mathbf{C}})$ ,  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$ ;  $\mathbf{C}$  — правый тензор деформаций Коши-Грина.

Зона кератоконуса, соответствующая патологическим изменениям свойств роговицы, вводится как область с пониженными (по модулю) параметрами жесткости  $c_1, c_2, c_3$  в выражении (2), которое в этом случае записывается в виде [16, 17]:

$$W_s = (1 - \psi_{kc}) \cdot [c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_1 - 3)^3] + \frac{1}{2}\kappa(J_{el} - 1)^2, \quad (3)$$

где  $\psi_{kc}$  — функция снижения жесткости в объеме роговицы с кератоконусом. Вид функции  $\psi_{kc}$  будет установлен далее.

Материал сегментов, изготовленных из полиметилметакрилата (ПММА), принимался изотропным линейно-упругим. При этом  $W_s$  в (1) будет определяться плотностью энергии упругой деформации.

*2.2. Общие граничные условия.* Приведенная система основных уравнений на различных этапах решения дополняется граничными условиями, заданными на соответствующих поверхностях  $\Gamma$  роговицы (рис. 2) и соответствующими конкретным условиям закрепления, нагружения и контакта роговицы, имплантов и хирургического инструмента на каждом из этапов.

При этом общими для всех этапов будут условия:

а) отсутствия перемещений на поверхностях  $\Gamma_s$ , примыкающей к склере (поверхность примыкания на рис. 2)

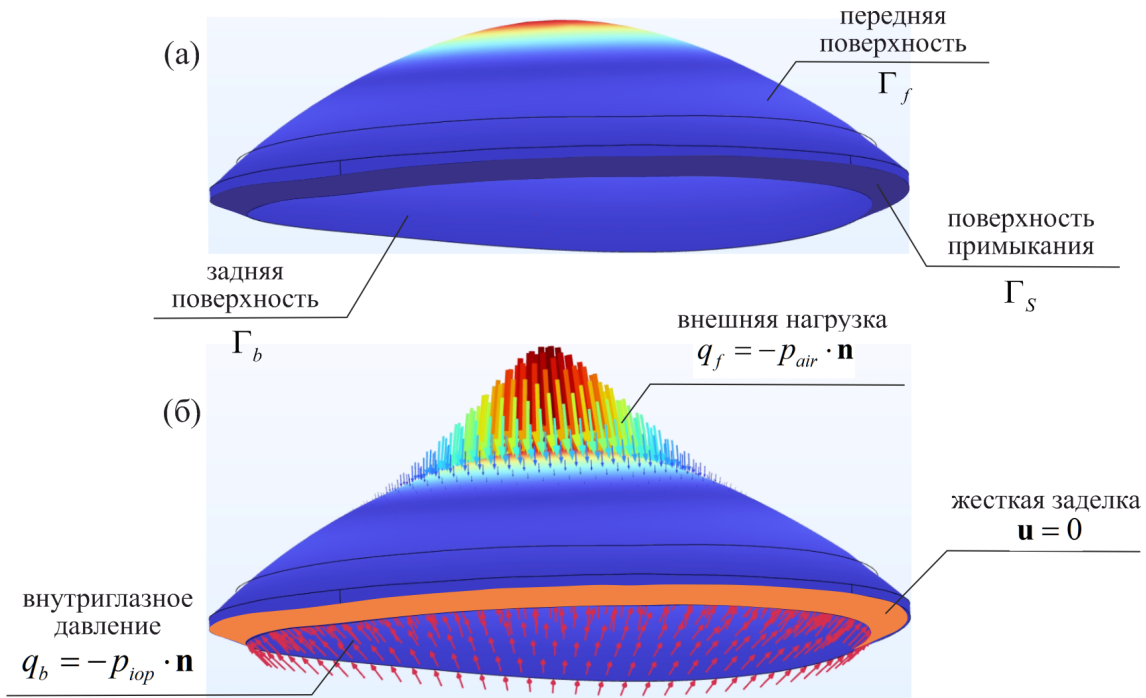
$$\mathbf{u} = 0, \quad \Gamma \in \Gamma_s$$

б) действие на задней поверхности  $\Gamma_b$  роговицы (рис. 2) поверхностно распределенной нагрузки интенсивностью  $q_b$  (вдоль составляющих вектора нормали  $\mathbf{n}$ )

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = q_b, \quad \Gamma \in \Gamma_b$$

В естественном состоянии задняя поверхность  $\Gamma_b$  (рис. 2) загружена внутриглазным давлением (ВГД)  $p_{iop}$ . Поверхностные силы  $q_b$  в таком случае задаются в виде:

$$q_b = -p_{iop} \cdot \mathbf{n}, \quad \Gamma \in \Gamma_b$$



**Рис. 2.** Общий вид геометрической модели роговицы (а) и схема граничных условий (б).

в) на передней поверхности  $\Gamma_f$  роговицы могут задаваться внешние поверхностно распределенные нагрузки интенсивностью  $q_f$ , соответствующие различным этапам диагностики или хирургического лечения

$$S \cdot \mathbf{n} = q_f, \quad \Gamma \in \Gamma_f \quad (4)$$

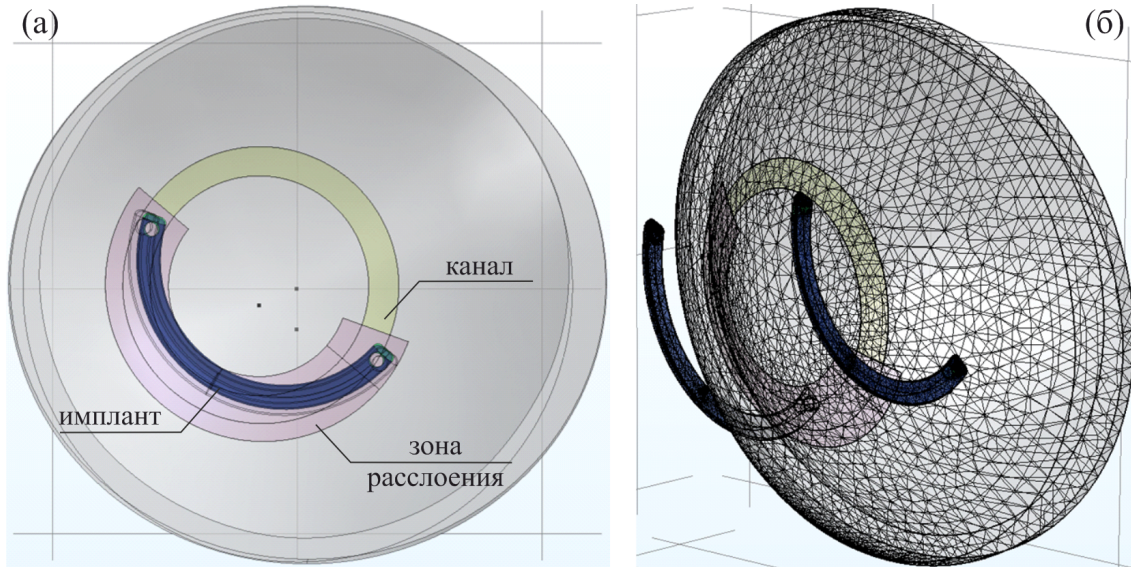
В частности, при диагностике биомеханических параметров роговицы при помощи бесконтактной пневмотонометрии (Corvis ST) на поверхности  $\Gamma_f$ , согласно условию (4), задается нагрузка  $q_f$ , соответствующая давлению воздушного импульса  $p_{air}$  (рис. 2)

$$q_f = -p_{air} \cdot \mathbf{n}, \quad \Gamma \in \Gamma_f$$

При этом величина  $p_{air}$ , пространственный и временной профили давления струи задаются путем интерполяции экспериментальных данных, фиксируемых в ходе тонометрического теста на базе Corvis ST для 140 точек исследуемого интервала времени [16, 17].

*2.3. Область внутрироговичного канала.* В исходной геометрической модели роговицы предусмотрены области для внутрироговичного канала и зоны возможного расслоения роговицы в окрестности канала при его раскрытии (рис. 3).

Размеры кольцевого канала задавались согласно протоколу операции и устанавливались одинаковыми для всех исследованных пациентов: внутренний диаметр 5 мм, внешний — 6,2 мм, ширина канала 600 мкм, толщина реза — около 6,5 мкм (рис. 3). Зона расслоения задается в плоскости канала соосно ему, при этом ее ширина составляет 1,2 мм. Индивидуальными для каждого пациента являются параметры расположения канала в роговице — глубина установки, координаты центра, длина дуги и угол установки.



**Рис. 3.** Модель имплантации ИСС с внутрироговичным каналом, зоной возможного надрыва, имплантом (а) и их конечно-элементная дискретизация (б).

Внутренние поверхности противоположных стенок канала и зоны надрыва составляют контактную пару, для которой на начальном этапе задаются условия адгезионного контакта, обеспечивающие их совместное деформирование на предварительных этапах расчета.

Данные условия включают условия разрыва поля перемещений на противоположных стенках тоннеля на величину эффективного зазора  $g_n$  и вектора тангенциальных смещений  $\mathbf{g}_t$  между ними, записанные в локальной системе координат, связанной со стенкой канала, в виде:

$$\mathbf{u} = \{0, 0, \langle g_n \rangle\} + \mathbf{T}_b^{-T} \cdot \mathbf{g}_t \quad (5)$$

где  $\mathbf{T}_b^{-T}$  — матрица преобразований из глобальной системы координат в локальную; угловые скобки  $\langle \cdot \rangle$  означают выделение положительной части переменной.

$$\langle g_n \rangle = \begin{cases} g_n, & g_n \geq 0 \\ 0, & g_n < 0 \end{cases}$$



На контактирующих поверхностях задается вектор «адгезионных» напряжений  $\mathbf{f}$ , пропорциональных вектору скачка перемещений  $\mathbf{u}$  между стенками тоннеля [18]:

$$\mathbf{f} = k\mathbf{u}, \quad (6)$$

где  $k$  — жесткость адгезионного соединения (слоя).

Для отрицательных значений эффективного зазора  $g_n$  нормальная составляющая вектора  $\mathbf{f}$  обнуляется, а условия контакта приводятся к формулировкам метода штрафных функций.

*2.4. Аппланация роговицы.* На втором этапе воспроизводится процедура аппланации роговицы, находящейся под действием ВГД, при помощи аппланационной линзы. Действие линзы задается как действие на роговицу абсолютно жесткого штампа, перемещающегося на некоторую фиксированную величину, ограниченную при операции системой аспирационных колец. В ходе решения задачи в итерационном режиме уточняется расчетное положение внутрироговичного тоннеля, которое в аппланированном состоянии роговицы должно соответствовать заданному по протоколу операции. В момент полной аппланации моделируется процесс формирования тоннеля путем снижения в (6) коэффициента адгезии  $k$  на противоположных стенках канала до нулевого значения. После этого штамп отводится в исходное положение, а роговица, освобождаясь от внешних перемещений, возвращается в ненагруженное естественное состояние с подготовленным каналом (рис. 4).



**Рис. 4.** Модель аппланации роговицы жестким штампом (аппланационной линзой): а — начальное положение; б — конечное положение штампа

Штамп принимается абсолютно жестким, и для всех точек его объема  $W_{ap}$  задается перемещение в направлении вдоль оси роговицы (ось  $Ox$ ). Рассматривается три этапа процесса: 1) перемещение штампа в течение времени  $t_{st}$  на величину аппланации  $u_{ap}$ , определяемую конечным положением аппланационной



линзы при операции; 2) выдержка в аппланированном состоянии до момента  $t_{ap}$ ; 3) перемещение штампа в исходное состояние к моменту  $t_{in}$ :

$$u_x(t) = \begin{cases} u_{ap} \cdot \frac{t}{t_{st}}, & 0 \leq t \leq t_{st}, \\ u_{ap}, & t_{st} < t \leq t_{ap}, \\ u_{ap} \cdot \frac{t_{in}-t}{t_{in}-t_{ap}}, & t_{ap} < t \leq t_{in}. \end{cases}$$

В зоне контакта  $\Gamma_c$  передней поверхности роговицы с поверхностью аппланационной линзы действует поверхностно распределенная нагрузка интенсивностью  $q_f$ ,

$$S \cdot \mathbf{n} = q_f, \quad \Gamma \in \Gamma_c$$

величина которой соответствует возникающему здесь контактному давлению  $T_c$ :

$$q_f = -T_c \cdot \mathbf{n}, \quad \Gamma \in \Gamma_c \quad (7)$$

В качестве граничных условий контактного взаимодействия двух тел используются условия Герца–Синьорини (условия непроникновения контактирующих поверхностей):

$$g_c \geq 0, \quad T_c \geq 0, \quad T_c \cdot g_c \geq 0 \quad (8)$$

где  $g_c$  — функция расстояния (зазор между главной и подчиненной поверхностями).

Для отыскания контактного давления  $T_c$  и области контакта  $\Gamma_c$  используется метод штрафных функций. В этом случае величина  $T_c$  задается соотношениями вида:

$$T_c = \begin{cases} -p_c \cdot g_c, & g_c < 0 \\ 0, & g_c \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

здесь  $p_c$  — параметр штрафа, интерпретируемый как жесткость условных нелинейно-упругих связей между контактирующими точками, создающих дополнительные контактные усилия в случаях нарушения условия непроникновения.

Условие нормального контакта на подчиненной поверхности записывается в интегральной форме, соответствующей виртуальной работе контактных сил:

$$\int_{\Gamma_c} T_c \cdot \delta g_c d\Gamma = 0 \quad (10)$$

На стадии выдержки роговицы в аппланированном состоянии при  $t_{st} < t \leq t_{ap}$  для моделирования процесса формирования кольцевого канала (рис. 4) на его стенках задаются условия декогезии, позволяющие разорвать ранее созданные адгезионные связи (5), (6).

Согласно [18], условие декогезии изменяет вектор напряжений  $\mathbf{f}$ , заданный на границах с адгезионным контактом (6), при этом не добавляет явных новых

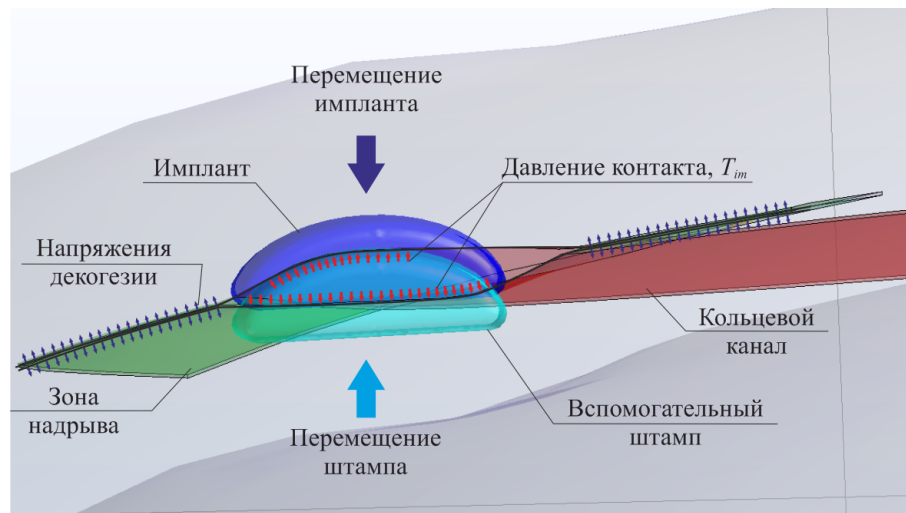
слагаемых в виртуальную работу на сопряженных поверхностях. В таком случае на стенках кольцевого канала вектор напряжений  $\mathbf{f}_c$  при декогезии задается так [18]:

$$\mathbf{f}_c = (1 - d_c)k\mathbf{u}, \quad (11)$$

где  $d_c$  — параметр повреждения, значение которого возрастает от нуля до единицы по мере раскрытия стенок, снижения жесткости их сцепления и полного отрыва при  $d_c = 1$ .

Величина параметра  $d_c$  в (11) задается линейной функцией накопления повреждений, использующей в качестве критерия повреждения максимальные значения взаимных перемещений  $u_{\max}$  сопряженных поверхностей в области декогезии [18].

*2.5. Взаимодействие импланта с роговицей.* Далее моделируется процесс введения сегмента в канал с раскрытием его стенок и расслоением ткани роговицы. Взаимодействие импланта со стенками канала задается двумя контактными парами, в которых два штампа (основной и вспомогательный) в форме имплантируемых сегментов перемещаются навстречу друг другу и вступают в контакт с противоположными стенками канала (рис. 5, 6).



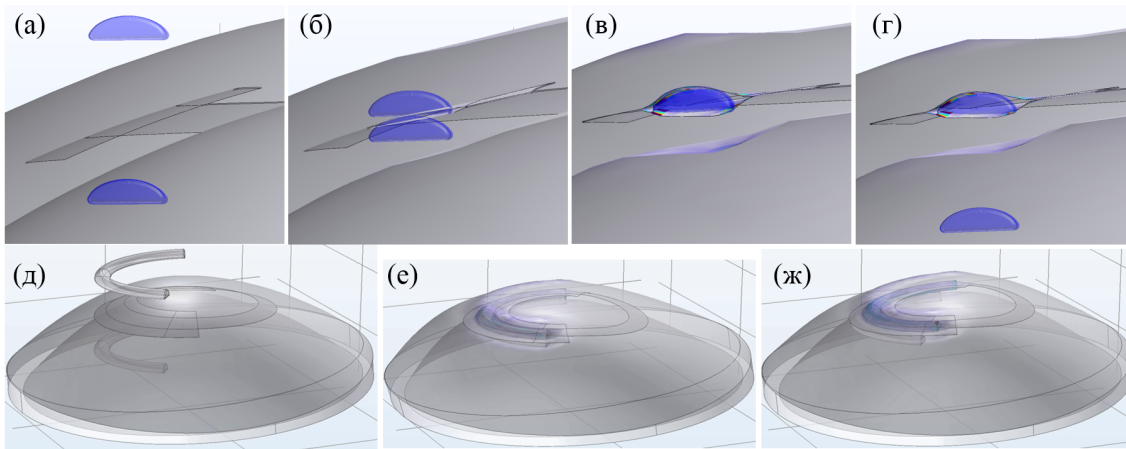
**Рис. 5.** Схема граничных условий в области взаимодействия импланта в виде двух штампов и внутрироговичного канала

На начальном интервале времени  $0 \leq t \leq t_{im}$  задаются перемещения  $u_x$  импланта и вспомогательного штампа вдоль оси роговицы  $0x$ , одинаковые для всех точек объемов импланта  $W_{im}$  и штампа  $W_{st}$  и направленные навстречу друг другу (рис. 6). Величина перемещений  $u_{im}$  задается так, чтобы профиль импланта, раздвигая стенки канала, целиком разместился в образовавшейся полости (рис. 6, с).

После размещения сегментов внутри канала (в интервале  $t_{im} < t \leq t_{st}$ ) вспомогательный штамп выводится из контакта, а основной — вступает в контакт с обеими стенками канала, оставаясь неподвижным (рис. 6, с, f):

$$u_x = \begin{cases} u_x^{im} \cdot t/t_1, & \Omega \in \Omega_{im}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ -u_x^{im} \cdot t/t_1, & \Omega \in \Omega_{st}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ u_x^m, & \Omega \in \Omega_m, \quad t_1 < t \leq t_2 \end{cases}$$

После момента  $t > t_2$  система освобождается от кинематических граничных условий и приходит в равновесное состояние. Этому состоянию соответствует конечное взаимное расположение внутрироговичного тоннеля и импланта в нем после операции, а также состояние ткани в области возможного расслоения (рис. 6, d, g).



**Рис. 6.** Модель имплантации ИСС на различных этапах расчета: а, д — встречное движение штампов; б — раскрытие канала; в — полный контакт импланта со стенками канала; г, е — удаление вспомогательного штампа, выдержка; ж — равновесное состояние

На поверхностях контакта импланта  $\Gamma_{im}$  и вспомогательного штампа  $\Gamma_{st}$  со стенками канала действует поверхностно распределенная нагрузка  $q_{im}$  (рис. 5)

$$S \cdot \mathbf{n} = q_{im}, \quad \Gamma \in \Gamma_{im} \cup \Gamma \in \Gamma_{st}$$

соответствующая контактному давлению  $T_{im}$  (рис. 5)

$$q_{im} = T_{im} \cdot \mathbf{n}$$

Величина  $T_{im}$  определяется, как и в (7)–(10), с использованием метода штрафов через функцию  $g_{im}$  расстояния между контактирующими поверхностями и штрафной параметр  $p_{im}$ :

$$T_{im} = \begin{cases} -p_{im} \cdot g_{im}, & g_{im} < 0 \\ 0, & g_{im} \geq 0 \end{cases}$$

Условия непроникновения контактирующих поверхностей задаются аналогично (8):

$$g_{im} \geq 0, \quad T_{im} \geq 0, \quad T_{im} \cdot g_{im} \geq 0.$$

Для расчетной области расслоения роговицы при внедрении импланта (рис. 3, 5), противоположные стенки которой находятся в адгезионном контакте друг с другом (5), (6), на данном этапе задаются условия декогезии, как на предыдущем этапе это было сделано для кольцевого канала (11):

$$\mathbf{f}_{im} = (1 - d_{im})k\mathbf{u}, \quad (12)$$

При этом для данной зоны могут быть заданы собственные характеристики, определяющие значения параметра повреждаемости  $d_{im}$  и вектора напряжений  $\mathbf{f}_{im}$ , например, прочность роговицы в поперечном направлении на разрыв и сдвиг.

**3. Метод и построение решения.** С использованием клинических данных конкретного пациента выстраивается конечно-элементная 3D-модель его роговицы, персонализированная по геометрии и биомеханическому поведению в соответствии с методиками [16, 17].

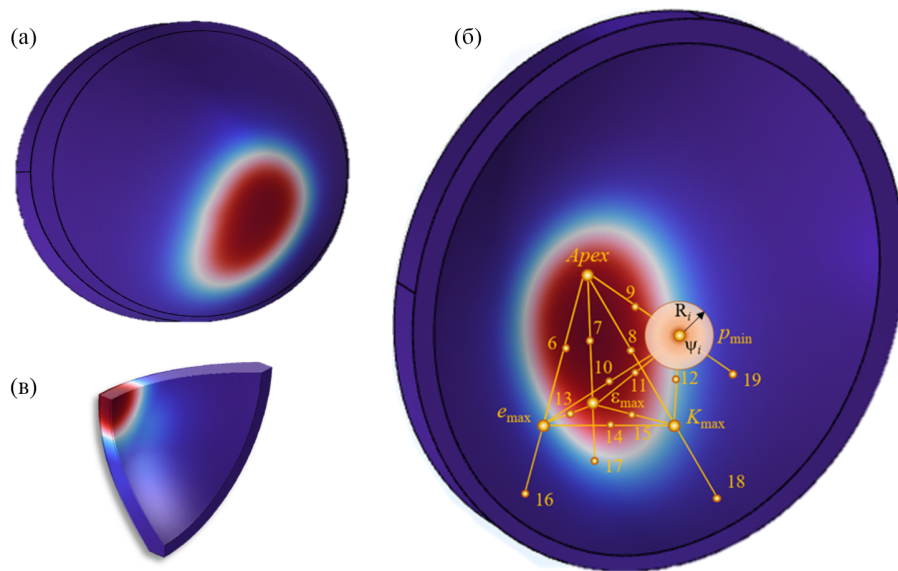
Далее все расчетные примеры приводятся для случая пациента К. с кератоконусом 2 стадии на левом глазу, который прошел лечение на основе биомеханического моделирования в соответствии с представленной методикой.

Построение геометрической модели роговицы осуществляется по данным топо- и томографического обследования пациента на кератотопографе Pentacam AXL. Исходными данными служат полученные на этом приборе координаты 9300 точек передней и 7300 точек задней поверхностей роговицы. Трехмерная модель создается в компьютерной системе КЭ моделирования COMSOL Multiphysics путем линейной интерполяции полученных экспериментальных массивов точек граничными поверхностями — передней и задней, «натянутыми» на указанный массив высот (координат), как на каркас (рис. 2). Сплошное тело формируется заполнением пространства между построенными поверхностями в пределах эллиптической области с длинами осей, соответствующими диаметрам роговицы в горизонтальной  $d_h$  и вертикальной  $d_v$  плоскостях (рис. 2, 3). При этом высота расчетной области соответствует глубине  $H_c$  передней камеры глаза, а расстояние между передней и задней поверхностями в начале координат задается по толщине  $h_a$  роговицы в апексе. Для пациента К.:  $d_h = 12.06$  мм;  $d_v = 11.3$  мм;  $H_c = 3.04$  мм;  $h_a = 0.507$  мм.

После формирования твердотельной модели строится ее КЭ аналог, состоящий из 67000 тетраэдральных элементов. Для оценки точности модели выполняется анализ ее локальной адаптации, с поэтапной детализацией в зонах с максимальными погрешностями. Производится оценка сходимости результатов и определяется минимальная плотность сетки, при которой решение практически не зависит от ее изменения.

*3.1. Персонализация модели.* Персонализация параметров  $(c_1, c_2, c_3)$  модели материала (2), (3) проводится на основе согласования расчетных данных о деформациях роговицы и клинических данных обследования пациента на пневмотонометре типа Corvis ST. Решается задача минимизации методом наименьших квадратов целевой функции, представляющей собой сумму квадратов отклонений расчетных значений от экспериментальных для амплитуды и скорости смещения в апексе. Минимизация выполняется при помощи алгоритма Левенберга-Марквардта для всех временных шагов одновременно путем поиска коэффициентов, обеспечивающих наилучшее соответствие расчетных кривых экспериментальным данным [17].

Зона кератоконуса вводится как система локальных областей с общим внешним контуром сложной формы, соответствующим минимальному снижению жесткости роговицы (рис. 7). Их центры располагаются в 5 опорных точках (рис. 7, б): апексе (Апекс), минимальной пахиметрии ( $p_{min}$ ), наибольшей задней элевации ( $e_{max}$ ), максимальной интенсивности деформаций ( $e_{max}$ ), максимальной кривизны передней поверхности ( $K_{max}$ ), а также в 14 промежуточных — равноудаленных от опорных (всего 19 точек).



**Рис. 7.** Зона пониженной жесткости в области кератоконуса в объеме геометрической модели по передней (а), задней (б) поверхностям и в сечениях по толщине (в) роговицы

Каждой из областей соответствует собственный радиус  $R_i$  и локальный максимум относительного снижения свойств  $\psi_i$ . При этом итоговое распределение жесткости в патологически измененной роговице с кератоконусом задается в выражении (3) функцией  $\psi_{kc}$ , которая имеет вид:

$$\psi_{kc} = \sum_i \psi_i \cdot \exp(-\theta_i \cdot \rho_i^2 / R_i^2)$$

где  $\rho_i$  — расстояние от центра  $i$ -й зоны до исследуемой точки расчетной области;  $\theta_i$  — параметр, устанавливающий градиент изменения свойств вдоль радиуса  $\rho_i$  (принимали  $\theta_i = 0.693$ , что соответствует 50% снижению величины  $\psi_i$  на расстоянии  $R_i$  от центра  $i$ -й зоны).

Значения  $\psi_i$  и  $R_i$  определяются путем минимизации методом Нелдера-Мида целевой функции, характеризующей отклонение расчетного поля тангенциальной кривизны передней поверхности роговицы от клинических данных пациента, полученных на кератотопографе Pentacam AXL. Коэффициенты жесткости  $c_1, c_2, c_3$  для здоровых участков роговицы фиксируются на значениях, полученных на предыдущем этапе персонализации.

Для пациента К. получены следующие значения параметров материала для модели (3):  $c_1 = 0.517$  МПа;  $c_2 = -9.81$  МПа;  $c_3 = 8396.7$  МПа;  $\kappa = 2.0$  МПа; максимальное снижение жесткости в зоне кератоконуса  $\psi_{kc}^{\max} = 0.373$ . Параметр  $k$  адгезионного соединения стенок канала в (6), (11) и (12) принимался равным  $\kappa = 2 \cdot 10^{12}$  Н/(м·м<sup>2</sup>), исходя из данных о пределе прочности роговицы и минимальном перемещении в слое до отрыва.

Кроме этого, по результатам пневмотонометрии для пациента К. задается внутриглазное давление  $p_{iop} = 16.3$  мм.рт.ст. (2.173 кПа).

После геометрической и биомеханической персонализации модель верифицируется на независимом наборе клинических данных того же пациента (параметры и измерения Corvis ST и Pentacam AXL, не использовавшиеся для калибровки) [16, 17].

*3.2. Схема вычислительного эксперимента.* Геометрически и биомеханически персонализированная модель роговицы пациента используется для расчетного анализа различных вариантов расположения и размеров ИСС, при имплантации которых обеспечивается эффективная коррекция кератометрических показателей роговицы после операции. Варьируются следующие параметры ИСС (рис. 8):

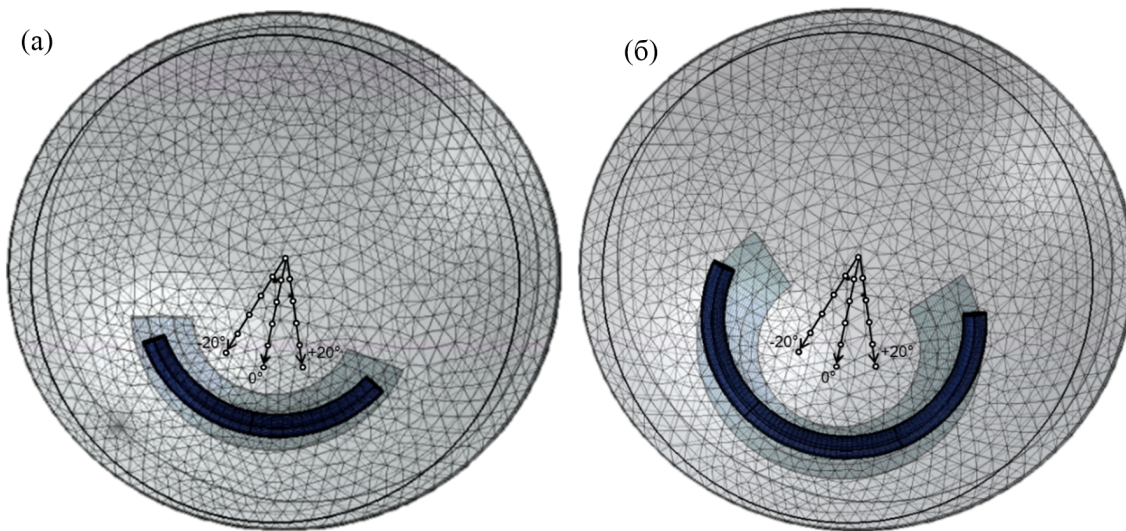
- толщина сегментов варьируется по ряду типовых размеров 150, 200, 250 мкм (для сегментов производства ООО НЭП «Микрохирургия глаза», см. рис. 1, в; рис. 8);

- длина дуги (определяемая соответствующим центральным углом) — по ряду типовых углов 90°, 120°, 160°, 210°;

- положение центра внутрироговичного канала изменяется по 16-ти точкам, 6 из которых лежат на треке, соединяющей центр зрачка и точку максимальной кератометрии  $K_{max}$  (линия 0° на рис. 8), другие 10 — на двух аналогичных треках (по 5 точек на каждом), отклоненных от первого на углы  $\pm 20^\circ$  (см. линии  $+20^\circ$  и  $-20^\circ$  на рис. 8).

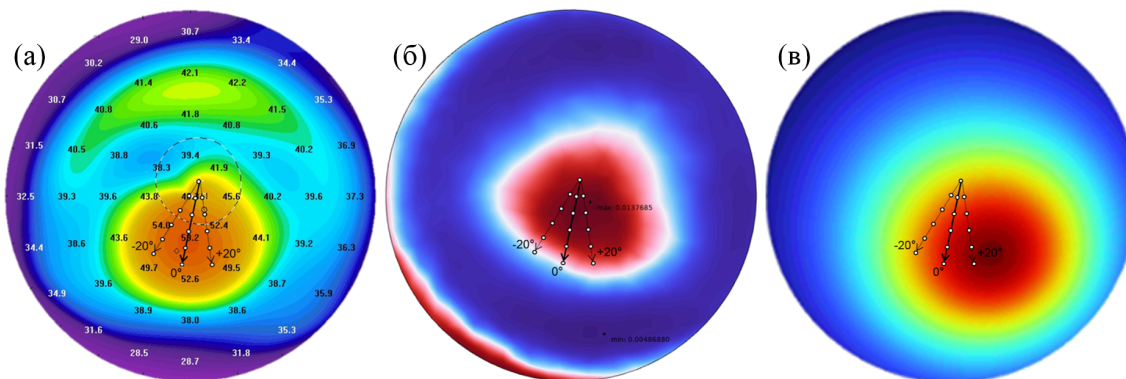
Положения центра канала согласуются с основными кератотопографическими картами пациента (кривизны, пахиметрии и элевации), расчетными картинками интенсивности деформаций роговицы под действием ВГД и снижения жесткости ткани в зоне кератоконуса (рис. 9). Такое позиционирование ИСС





**Рис. 8.** Схема вариации размеров и положения интрастромальных сегментов при моделировании операции (а — сегмент  $120^\circ$ , б —  $210^\circ$ )

соответствует зонам выраженных патологических изменений роговицы и позволяет проанализировать наиболее характерные сценарии имплантации сегмента и возможные варианты и эффекты отклонения от протокола (рис. 9).

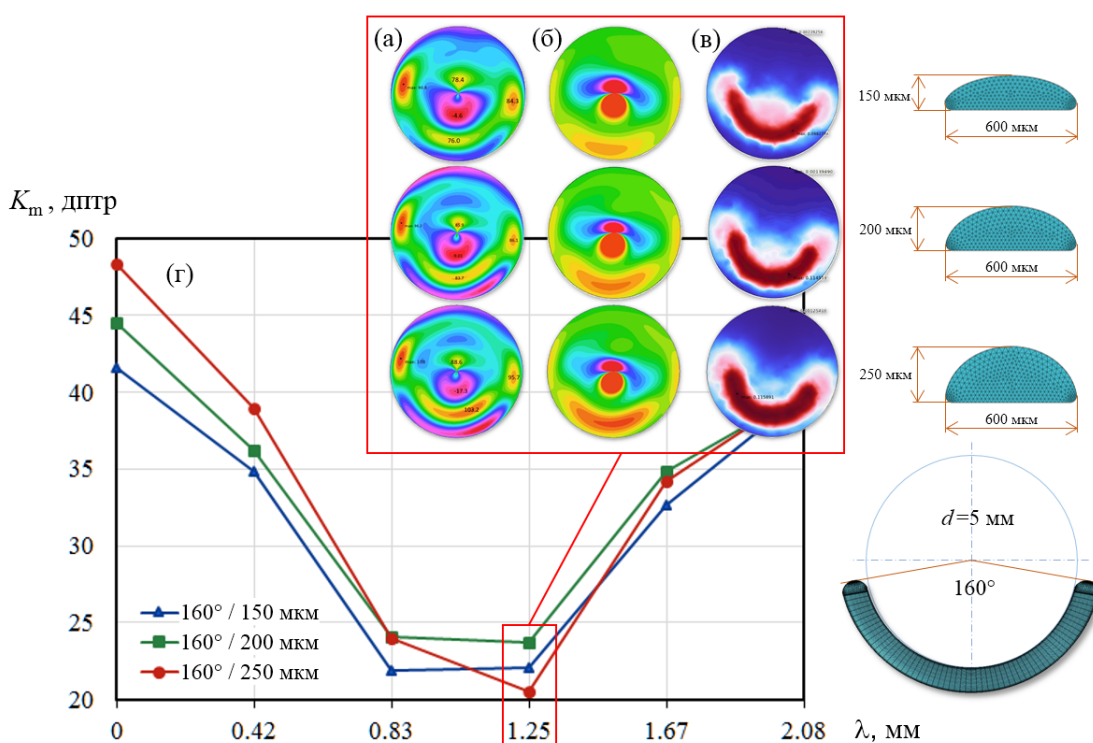


**Рис. 9.** Согласование расчетных положений центра внутрироговичного канала при моделировании операции с картами распределения параметров роговицы пациента: а — тангенциальная кривизна передней поверхности, по данным Pentacam; б — распределение интенсивности деформаций под действием ВГД; в — снижение жесткости роговицы в зоне кератоконуса

**4. Анализ результатов и примеры.** Далее рассматриваются некоторые результаты прогнозирования кератотопографических и биомеханических параметров роговицы для различных вариантов имплантации ИСС, полученные при моделировании операции на цифровом двойнике для пациента К.

4.1. *Прогноз результатов операции.* На рис. 10 приводится пример зависимости средней кривизны  $K_m$  передней поверхности роговицы (рассчитанной для пятимиллиметровой центральной зоны) от координаты  $\lambda$  центра роговичного тоннеля при его парацентральной смещении по схеме рис. 8. Для трех типоразмеров сегментов приводятся расчетные картины изменения тангенциальной и сагиттальной кривизны, а также интенсивности деформаций (рис. 10, а–с) передней поверхности роговицы после имплантации ИСС.

Строятся графики  $K_m$  (по типу рис. 10, d) и атласы карт кератотопографических и биомеханических параметров для всех исследованных вариантов, выявляются варианты, наиболее эффективные по совокупности указанных характеристик.



**Рис. 10.** Прогнозирование кератотопографических параметров для различных вариантов операции (ИСС высотой 150, 200, 250 мкм): а — карты тангенциальной кривизны; б — карты сагиттальной кривизны; в — карты интенсивности деформаций; г — зависимость средней кривизны передней поверхности от положения сегмента

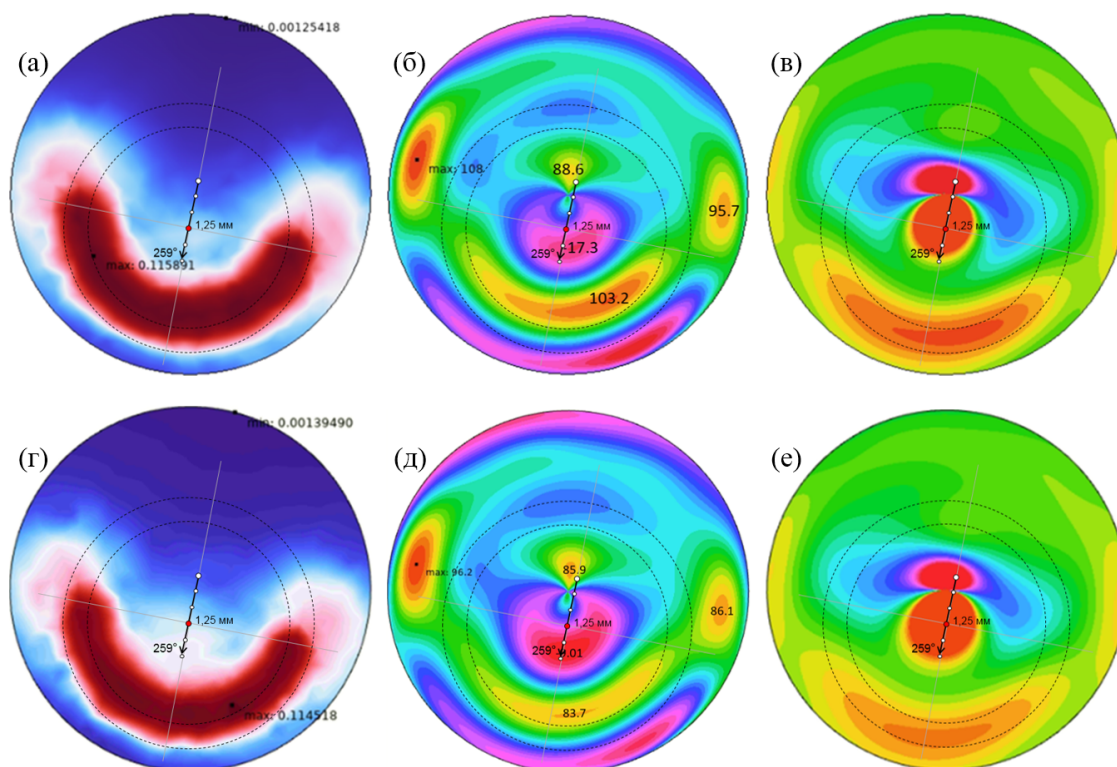
В частности, для пациента К. наибольшее уплощение роговицы в оптической зоне прогнозируется для сегментов с длиной 160°, при толщинах 200–250 мкм. Предпочтительные положения тоннеля соответствуют его смещению относительно центра зрачка на 0,85–1,25 мм вдоль оси сегмента, повернутой на угол в диапазоне 250–270° (рис. 10). По минимальной величине  $K_m$  в качестве рекомендуемого (для указанных диапазонов размеров и положений) может быть



выбран вариант ИСС с длиной дуги  $160^\circ$  и толщиной  $250\ \mu\text{м}$  при положении тоннеля со смещением относительно центра зрачка на  $1,25\ \text{мм}$ , с центральной осью на  $259^\circ$  и положением роговичного разреза  $5^\circ$  (рис. 11, а–с).

Для расширенного прогноза проведено планирование имплантации интрастромальных сегментов с помощью номограммы Kerating. По данным манифестной рефракции с учетом положения «сильной» оси роговичного астигматизма рекомендуется кольцевой сегмент с длиной дуги  $160^\circ$  и толщиной  $150\ \mu\text{м}$  для имплантации в нижнем отделе.

По совокупности результатов окончательно был выбран следующий вариант интрастромального сегмента: длина дуги  $160^\circ$ , толщина  $200\ \mu\text{м}$ , смещение относительно центра зрачка на  $1,25\ \text{мм}$ , положение центральной оси сегмента  $263^\circ$ , положение разреза —  $5^\circ$  (рис. 11, d–f).

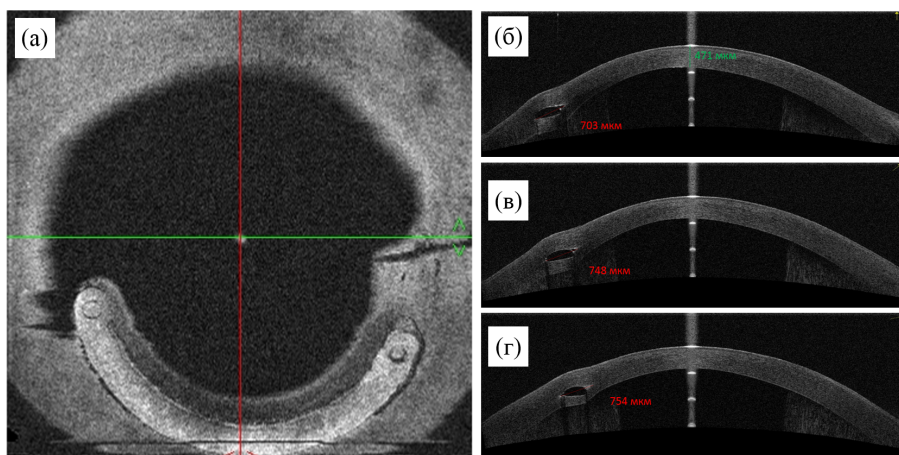


**Рис. 11.** Расчетные варианты результатов операции (пациент К.) при имплантации ИСС толщиной  $250\ \mu\text{м}$  (а–в) и  $200\ \mu\text{м}$  (г–е) при первоначальном и уточненном прогнозе соответственно: а, г — интенсивность деформаций передней поверхности; б, д — тангенциальная кривизна передней поверхности; в, е — сагиттальная кривизна передней поверхности

4.2. *Постоперационный анализ.* С учетом полученных результатов пациенту было проведено хирургическое лечение кератоконуса левого глаза — интраламеллярная кератопластика с фемтосекундным лазерным сопровождением с имплантацией ИСС.

На следующие сутки после операции проведено инструментальное обследование пациента К., включающее кератотопографическое исследование с помощью Шаймпфлюг-анализатора переднего отрезка глазного яблока Pentacam AXL, биомеханические свойства роговицы — с помощью пневмотонометра Corvis ST, оптическую когерентную томографию роговицы с помощью ОКТ Solix (рис. 12).

Полученные клинические данные пациента сопоставляются с результатами цифрового прогноза и планирования операции на базе персонализированной компьютерной модели роговицы.

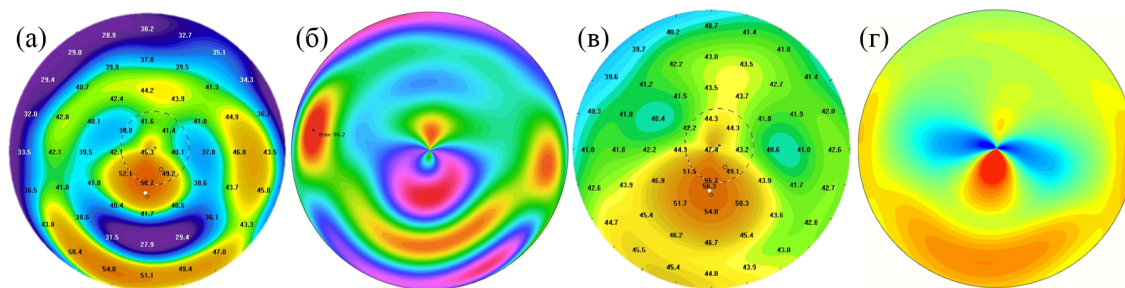


**Рис. 12.** ОКТ роговицы после имплантации интрастромального сегмента: а — режим Corneal Sub; б–г — режим Corneal Map

На рис. 13 приводятся экспериментальные и расчетные карты тангенциальной и сагиттальной кривизны передней поверхности роговицы левого глаза пациента К. на первый день после операции имплантации ИСС.

Расчетные картины на рис. 13 построены для ИСС с длиной дуги  $160^\circ$  и толщиной 200 мкм, установленного на глубине 370 мкм в модельном положении (смещение от центра зрачка на 1,25 мм, положение сегмента  $259^\circ$ ). Как видим, спрогнозированные кератотопографические картины дают достаточно достоверные описания основных трансформаций роговицы после операции, качественно согласующиеся с реальными клиническими данными постоперационного обследования.

Наложение расчетных сечений цифровой модели роговицы на снимки ОКТ, показанные на рис. 14, наглядно иллюстрирует степень количественного отклонения данных предоперационного прогноза от реальных профилей роговицы. Максимальное их рассогласование составляет около 20 % от толщины (рис. 14).



**Рис. 13.** Сопоставление карт тангенциальной (а, б) и сагиттальной (в, г) кривизны по данным Pentacam AXL (а, в) и по результатам математического моделирования (б, г)

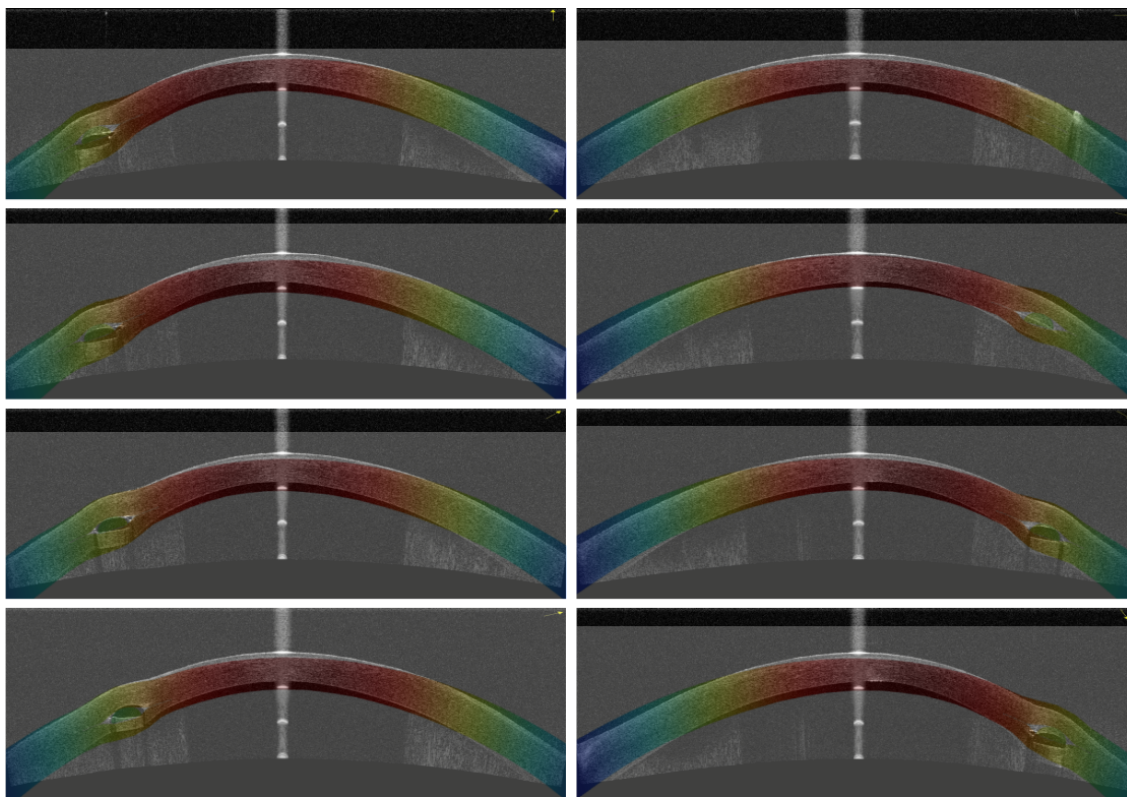
При этом следует отметить, что фактические параметры операции (глубина имплантации, размеры и положение внутрироговичного тоннеля, а также положение сегмента в нем) могут заметно отличаться от соответствующих параметров при цифровом прогнозе. Кроме того, в послеоперационный период в роговице продолжают динамические изменения, связанные с восстановлением тканей после операции, регенерацией и перераспределением эпителия, заживлением и ремоделированием стромы и т.д. Указанные различия могут являться источником погрешности расчетных данных при прогнозе.

Анализ полученных результатов с учетом этих обстоятельств подтверждает эффективность и перспективность практического применения цифрового компьютерного прогнозирования и планирования операций имплантации ИСС.

**5. Заключение.** Разработана и апробирована трехмерная модель роговицы с кератоконусом в ходе имплантации ИСС. При этом в единый комплекс объединены несколько частных подмоделей, позволяющих учесть важные особенности хирургического воздействия на роговицу: модель аппланации роговицы при изготовлении внутрироговичного канала, модель контактного взаимодействия сегмента со стенками внутрироговичного канала, модель декогезии (расслоения) ткани роговицы при внедрении импланта.

Разработана методика цифрового планирования операции интраламеллярной кератопластики с имплантацией ИСС, состоящая в анализе различных вариантов их расположения и размеров, полученных из серии вычислительных экспериментов. Для выбора варианта рассчитываются кератометрические показатели роговицы после операции.

Проведена апробация указанной методики на клиническом примере пациента с кератоконусом III степени. Послеоперационное клиническое обследование пациента подтвердило эффективность выбранного варианта операции. Максимальный уровень отклонения результатов предоперационного прогноза основных топографических параметров роговицы от их экспериментальных значений составляет около 15–20%.



**Рис. 14.** Сопоставление профилей роговицы по данным постоперационного анализа (цветные карты) с результатами ОКТ (черно-белые карты) через 3 минуты после операции

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** И. Н. Захаров: разработка модели, написание текста, согласование финальной версии; Е. Г. Солодкова, С. В. Балалин: клинические исследования, редактирование текста; В. Х. Лэ: обзор литературы, расчеты; Е. В. Лобанов: клиническая диагностика, верификация результатов.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

#### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** I.N.Zakharov: model development, manuscript writing, final version approval; E.G.Solodkova, S.V.Balalin: clinical studies, manuscript editing; V.Kh.Le: literature review, calculations; E.V.Lobanov: clinical diagnostics, result verification.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.



**Funding.** This study was supported by a grant from the Russian Science Foundation (No. 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Correcting keratoconus with intracorneal rings / J. Colin [et al.] // J. Cataract Refract. Surg. – 2000. – Vol. 26. – P. 1117–1122. – DOI: 10.1016/S0886-3350(00)00451-X.
2. Refractive surgical correction and treatment of keratoconus / F. D’Oria, S. A. Bagaglia, J. L. Alio del Barrio, [et al.] // Surv. Ophthalmol. – 2023. – Vol. 69. – P. 122–139. – DOI: 10.1016/j.survophthal.2023.09.005.
3. A novel Q-value-based nomogram for single intracorneal ring segment implantation versus standard manufacturer’s nomogram combined with accelerated cross-linking for treatment of keratoconus: a randomized controlled trial / M. Iqbal, A. Elmassry, A. Mounir, [et al.] // Acta Ophthalmol. – 2021. – Vol. 99. – e501–e511. – DOI: 10.1111/aos.14611.
4. Терещенко В. А., Демьянченко С. К., Вишнякова Е. Н. Применение цифрового разметочного устройства при проведении фемтолазерной интрастромальной кератопластики с имплантацией интрастромальных сегментов // Сибирский научный медицинский журнал. – 2019. – № 3. – С. 60–65. – DOI: 10.15372/SSMJ20190309. – EDN: UEYXLK.
5. Мороз З. И., Гурбанов Р. С. Осложнения интрастромальной кератопластики // Офтальмология. – 2014. – 1 (14). – С. 84–89. – EDN: XYJRJJ.
6. Pinsky P. M., Datye D. V., Silvestrini T. A. Numerical-simulation of topographical alterations in the cornea after ICR (intraströmål corneal ring) placement // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. – 1995. – Vol. 36, no. 4. – S309.
7. Kling S., Marcos S. Finite-element modeling of intraströmål ring segment implantation into a hyperelastic cornea // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. – 2013. – Vol. 54, no. 1. – P. 881–889. – DOI: 10.1167/iovs.12-10852.
8. Daxer A. Biomechanics of corneal ring implants // Cornea. – 2015. – Vol. 34, no. 11. – P. 1493–1498. – DOI: 10.1097/IC0.0000000000000591.
9. Patient-specific simulation of the intraströmål ring segment implantation in corneas with keratoconus / M. A. Lago, M. J. Rupérez, C. Monserrat, [et al.] // J. Mech. Behav. Biomed. Mater. – 2015. – Vol. 51. – P. 260–268. – DOI: 10.1016/j.jmbbm.2015.07.023.
10. Khan S. N., Shiakolas P. S. To study the effects of intraströmål corneal ring geometry and surgical conditions on the postsurgical outcomes through finite element analysis // J. Mech. Med. Biol. – 2016. – Vol. 16, no. 7. – P. 1650101. – DOI: 10.1142/S0219519416501013.
11. Mechanical-mathematical model of intraströmål shape correction of the cornea in keratoconus / I. S. Nikitin, A. B. Zhuravlev, N. G. Iroshnikov, [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2017. – Vol. 21, no. 4. – P. 403–416. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2017.4.07. – EDN: YMCSPJ.
12. Corneal biomechanics after intraströmål ring surgery: Optomechanical *in silico* assessment / M. Á. Ariza-Gracia [et al.] // Transl. Vis. Sci. Technol. – 2020. – Vol. 9, no. 11. – P. 26. – DOI: 10.1167/tvst.9.11.26.

13. Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б. Модели механики твердого тела в приложении к офтальмологии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2023. – Т. 10, № 4. – С. 686–712. – DOI: 10.21638/spbu01.2023.407. – EDN: UJNCGP.
14. Bagheri N. M., Mosaddegh P., Kadkhodaei M. Effects of intracorneal ring segments on the biomechanical response of the ectatic cornea to air-puff: A patient-specific numerical analysis // Math. Mech. Solids. – 2022. – Vol. 27, no. 3. – P. 390–409. – DOI: 10.1177/10812865211025581.
15. Localized refractive changes induced by symmetric and progressive asymmetric intracorneal ring segments assessed with a 3D finite-element model / G. G. de Oteyza [et al.] // Bioengineering. – 2023. – Vol. 10. – P. 1014. – DOI: 10.3390/bioengineering10091014.
16. Разработка комплекса математических моделей биомеханических параметров роговицы с диагностированным кератоконусом до и после лечения с помощью кросс-линкинга коллагена роговицы / Е. Г. Солодкова, Б. Е. Малюгин, И. Н. Захаров [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2022. – Т. 26, № 3. – С. 10–28. – DOI: 10.15593/RZhBiomech/2022.3.01. – EDN: HCQFDP.
17. Идентификация параметров модели роговицы с кератоконусом в терминах численно-экспериментального исследования геометрии и механического поведения роговицы / Е. Г. Солодкова, Б. Е. Малюгин, И. Н. Захаров [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2023. – Т. 27, № 3. – С. 53–64. – DOI: 10.15593/rjbiomech/2023.3.05. – EDN: УМКАТJ.
18. COMSOL AB. Structural Mechanics Module — Large Strain Viscoelasticity. – (Visited on 06/25/2025) ; Online documentation. [https://doc.comsol.com/5.6/docserver/\#!/com.comsol.help.sme/sme\\_ug\\_theory.06.27.html](https://doc.comsol.com/5.6/docserver/\#!/com.comsol.help.sme/sme_ug_theory.06.27.html).

## REFERENCES

1. Correcting keratoconus with intracorneal rings / J. Colin [et al.] // J. Cataract Refract. Surg. – 2000. – Vol. 26. – P. 1117–1122. – DOI: 10.1016/S0886-3350(00)00451-X.
2. Refractive surgical correction and treatment of keratoconus / F. D’Oria, S. A. Bagaglia, J. L. Alio del Barrio, [et al.] // Surv. Ophthalmol. – 2023. – Vol. 69. – P. 122–139. – DOI: 10.1016/j.survophthal.2023.09.005.
3. A novel Q-value-based nomogram for single intracorneal ring segment implantation versus standard manufacturer’s nomogram combined with accelerated cross-linking for treatment of keratoconus: a randomized controlled trial / M. Iqbal, A. Elmassry, A. Mounir, [et al.] // Acta Ophthalmol. – 2021. – Vol. 99. – e501–e511. – DOI: 10.1111/aos.14611.
4. Tereshchenko V. A., Dem’yanchenko S. K., Vishnyakova E. N. Application of a digital marking device in femtosecond laser-assisted intrastromal keratoplasty with implantation of intrastromal segments // Siberian Scientific Medical Journal. – 2019. – No. 3. – P. 60–65. – DOI: 10.15372/SSMJ20190309. – EDN: UEYXLK.
5. Moroz Z. I., Gurbanov R. S. Complications of intrastromal keratoplasty // Ophthalmology. – 2014. – 1 (14). – P. 84–89. – EDN: XYJRJJ.
6. Pinsky P. M., Datye D. V., Silvestrini T. A. Numerical-simulation of topographical alterations in the cornea after ICR (intrastromal corneal ring) placement // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. – 1995. – Vol. 36, no. 4. – S309.

7. *Kling S., Marcos S.* Finite-element modeling of intrastromal ring segment implantation into a hyperelastic cornea // *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.* – 2013. – Vol. 54, no. 1. – P. 881–889. – DOI: 10.1167/iovs.12-10852.
8. *Daxer A.* Biomechanics of corneal ring implants // *Cornea.* – 2015. – Vol. 34, no. 11. – P. 1493–1498. – DOI: 10.1097/ICO.0000000000000591.
9. Patient-specific simulation of the intrastromal ring segment implantation in corneas with keratoconus / M. A. Lago, M. J. Rupérez, C. Monserrat, [et al.] // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* – 2015. – Vol. 51. – P. 260–268. – DOI: 10.1016/j.jmbbm.2015.07.023.
10. *Khan S. N., Shiakolas P. S.* To study the effects of intrastromal corneal ring geometry and surgical conditions on the postsurgical outcomes through finite element analysis // *J. Mech. Med. Biol.* – 2016. – Vol. 16, no. 7. – P. 1650101. – DOI: 10.1142/S0219519416501013.
11. Mechanical-mathematical model of intrastromal shape correction of the cornea in keratoconus / I. S. Nikitin, A. B. Zhuravlev, N. G. Iroshnikov, [et al.] // *Russian Journal of Biomechanics.* – 2017. – Vol. 21, no. 4. – P. 403–416. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2017.4.07. – EDN: YMCSPJ.
12. Corneal biomechanics after intrastromal ring surgery: Optomechanical *in silico* assessment / M. Á. Ariza-Gracia [et al.] // *Trans. Vis. Sci. Tech.* – 2020. – Vol. 9, no. 11. – P. 26. – DOI: 10.1167/tvst.9.11.26.
13. *Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B.* Solid mechanics models in application to ophthalmology // *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy.* – 2023. – Vol. 10, no. 4. – P. 686–712. – DOI: 10.21638/spbu01.2023.407. – EDN: UJNCGP.
14. *Bagheri N. M., Mosaddegh P., Kadkhodaei M.* Effects of intracorneal ring segments on the biomechanical response of the ectatic cornea to air-puff: A patient-specific numerical analysis // *Mathematics and Mechanics of Solids.* – 2022. – Vol. 27, no. 3. – P. 390–409. – DOI: 10.1177/10812865211025581.
15. Localized Refractive Changes Induced by Symmetric and Progressive Asymmetric Intracorneal Ring Segments Assessed with a 3D Finite-Element Model / G. G. de Oteyza [et al.] // *Bioengineering.* – 2023. – Vol. 10. – P. 1014. – DOI: 10.3390/bioengineering10091014.
16. Development of a complex of mathematical models of the cornea biomechanical parameters with diagnosed keratoconus before and after treatment with corneal collagen crosslinking / E. G. Solodkova, B. E. Malyugin, I. N. Zakharov, [et al.] // *Russian Journal of Biomechanics.* – 2022. – Vol. 26, no. 3. – P. 10–28. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.3.01. – EDN: HCQFDP.
17. Identification of the model parameters in cornea with keratoconus in terms of the numerical-experimental study of corneal geometry and mechanical behavior / E. G. Solodkova, B. E. Malyugin, I. N. Zakharov, [et al.] // *Russian Journal of Biomechanics.* – 2023. – Vol. 27, no. 3. – P. 53–64. – DOI: 10.15593/rjbiomech/2023.3.05. – EDN: UMKATJ.
18. *COMSOL AB.* Structural Mechanics Module — Large Strain Viscoelasticity. – (Visited on 06/25/2025) ; Online documentation. [https://doc.comsol.com/5.6/docserver/\#!/com.comsol.help.sme/sme\\_ug\\_theory.06.27.html](https://doc.comsol.com/5.6/docserver/\#!/com.comsol.help.sme/sme_ug_theory.06.27.html).

С. М. Бауэр, Л. А. Венатовская, Д. В. Матченко

## ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ДЕФОРМАЦИЙ ГЛАЗА

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрены две задачи биомеханики глаза: операция по коррекции миопии за счет имплантации кольца MyoRing и изменение внутриглазного давления при интравитреальных инъекциях. Выполнено конечно-элементное моделирование внешней оболочки глаза, находящейся под действием внутриглазного давления, в программном пакете ANSYS. Роговица глаза задается сферическим сегментом меньшего радиуса переменной толщины. Для описания ее нелинейных свойств используются гиперупругие модели материалов (модель Йео, неогукковская и 2-параметрическая модель Муни-Ривлина). Проводится сравнение с моделями в которых роговица описывается трансверсально-изотропной биологической тканью. В первом случае решается нелинейная задача об изменении напряженно-деформированного состояния глаза при наличии упругой вставки в роговице. Процесс имплантации кольца описывается контактными парами методом последовательного приложения нагрузки. Расчеты показали, что при имплантации кольца MyoRing роговица испытывает большие деформации сдвига, и получить результаты, соответствующие клиническим данным удастся только с использованием моделей гиперупругих материалов. При этом достаточно точное решение задачи получается при использовании неогукковского материала, потенциал которого зависит только от одного параметра. Во второй задаче для двух различных моделей материала роговицы (трансверсально-изотропной и гиперупругой) анализируется изменение внутриглазного давления глаза при интравитреальных инъекциях. Проводится сравнение трех моделей: без разделительных перегородок, с одной и с двумя перегородками. На основе расчетов выполнена оценка уровня давления в камерах глазного яблока в зависимости от объема вводимого препарата и конфигурации перегородок. Расчеты показали близкие результаты для трансверсально-изотропной и гиперупругой моделей роговицы. Следовательно, усложнение в моделировании, связанное с описанием свойств роговицы, представляется необоснованным.

**Ключевые слова:** гиперупругие модели материалов, контактные задачи, имплантация MyoRing, интравитреальные инъекции

**Бауэр Светлана Михайловна**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики; e-mail: s.bauer@spbu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>; AuthorID: 6610

**Венатовская Людмила Александровна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики; e-mail: l.venatovskaya@spbu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0813-3727>; AuthorID: 742317

**Матченко Дмитрий Владимирович**, студент математико-механического факультета; e-mail: dmitriy.matchenko@yahoo.com; <https://orcid.org/0009-0006-2638-2977>; AuthorID: 1308371





**для цитирования:** Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Матченко Д. В. Применение гиперупругих моделей для анализа деформаций глаза // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 246–261. DOI: 10.37972/chgru.2025.64.2.014. EDN: MEMRWF

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

S. M. Bauer, L. A. Venatovskaya, D. V. Matchenko

## APPLICATION OF HYPERELASTIC MODELS FOR ANALYZING EYE DEFORMATION

*Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia*

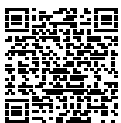
**Abstract.** This study addresses two problems in eye biomechanics: myopia correction surgery through MyoRing implantation and changes in intraocular pressure during intravitreal injections. Finite element modeling of the outer eye shell under intraocular pressure was performed using the ANSYS software package. The cornea is defined as a spherical segment with a smaller radius and variable thickness. To describe its nonlinear properties, hyperelastic material models were used (Yeoh model, Neo-Hookean model, and two-parameter Mooney-Rivlin model). A comparison is made with models where the cornea is modeled as a transversely isotropic biological tissue. In the first case, the nonlinear problem of changes in the eye's stress-strain state with an elastic insert in the cornea is solved. The ring implantation process is simulated using contact pairs and a sequential load application method. The calculations showed that during MyoRing implantation, the cornea experiences significant shear deformations. Results consistent with clinical data were only achieved using hyperelastic material models. Moreover, a sufficiently accurate solution was obtained using the Neo-Hookean material, whose potential depends on just one parameter. In the second task, for two different corneal material models (transversely isotropic and hyperelastic), the change in intraocular pressure during intravitreal injections is analyzed. A comparison of three models is conducted: without septa, with one septum, and with two septa. Based on the calculations, the pressure levels in the eye chambers were evaluated depending on the volume of the injected drug and the septum configuration. The calculations showed close results for the transversely isotropic and hyperelastic corneal models. Consequently, the added complexity in modeling associated with describing the hyperelastic properties of the cornea appears to be unjustified.

**Keywords:** Hyperelastic material models, contact analysis, MyoRing implantation, intravitreal injections

**Svetlana M. Bauer**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics; e-mail: s.bauer@spbu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>; AuthorID: 6610

**Lyudmila A. Venatovskaya** Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; e-mail: l.venatovskaya@spbu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0813-3727>; AuthorID: 742317

**Dmitriy V. Matchenko** Student; e-mail: dmitriy.matchenko@yahoo.com; <https://orcid.org/0009-0006-2638-2977>; AuthorID: 1308371



**to cite this article:** Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Matchenko D. V. Application of Hyperelastic Models for Analyzing Eye Deformation // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 246–261. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.014

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** Роговица (роговая оболочка) и склера представляют собой два сопряженных сферических сегмента с различными радиусами кривизны и образуют единую фиброзную оболочку капсулы глаза. Их механические свойства играют решающую роль в поддержании внутренних структур глаза. Изучению этих свойств в норме и при некоторых патологических состояниях посвящено большое число работ [1]–[2]. Определение механических параметров роговицы дает большой разброс показателей [3, 4]. Это связано и с различными условиями эксперимента, и с тем обстоятельством, что исследования осложняются нелинейностью, анизотропией и пространственной неоднородностью упругих характеристик [3, 5].

Большая часть работ, изучающих механические свойства роговицы, посвящена исследованиям, выполненным *in vitro* (на мертвых тканях) [5, 6]. Но, надо отметить, что результаты механических испытаний образцов изолированной роговицы не могут полностью соответствовать реальным характеристикам этой ткани в естественных условиях. Безусловно, наиболее информативные сведения о биомеханическом статусе роговицы могут быть получены только в условиях живого глаза [7]. Перенос на живой глаз полученных *in vitro* результатов затруднителен, так как механические свойства тканей глаза очень индивидуальны. Невозможно заранее оценить всё множество параметров, характеризующих механические свойства глазных тканей. Как отмечается в [8], часто эффективным оказывается подход, при котором, отказавшись от избыточной детализации, строится математическая модель, параметры которой могут быть оценены в тестах, выполнимых в клинике. Иногда для описания свойств роговицы и склеры, используют трансверсально-изотропный материал, который характеризуется более низким модулем упругости в направлении своей толщины (в радиальном направлении), чем в продольном и поперечном [9]. Данное предположение использовалось во многих работах по моделированию в биомеханике глаза [10], и в ряде случаев (например, в задачах, связанных с тонометрией) получены результаты, соответствующие клиническим данным. Однако в последнее время для более точного описания нелинейных свойств биологических тканей, в том числе роговицы глаза, стали применять гиперупругие модели [11, 12].

В настоящей работе представлены две задачи, в которых роговица задается гиперупругими материалами: изменение напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после операций по коррекции зрения с использованием колец-имплантатов MyoRing, и изменение внутриглазного давления при введении инъекций в стекловидное тело (интравитреальные инъекции). Проводится сравнение полученных результатов с более ранними моделями, в которых роговица полагалась трансверсально-изотропной, и с клиническими данными.

**1. Имплантация кольцевой вставки.** Миопия, или близорукость является наиболее распространенной аномалией рефракции. Лазерная коррекция зрения обеспечивает эффективное лечение миопии путём удаления ткани для

изменения формы роговицы. Однако, в сложных случаях миопии (очень тонкая роговица или высокая степень миопии, неровная поверхность роговицы и т. д.) лазерная рефракционная хирургия не подходит из-за повышенного риска послеоперационных осложнений или регресса миопии со временем [13]. В таких случаях для лечения используют имплантацию колец (Intrastromal Corneal Ring Segments, ICRS), которые позволяют изменить форму роговицы и улучшить ее механические свойства. MyoRing — это замкнутое кольцо, которое размещается на некоторой глубине от исходной толщины роговицы под ее поверхностью. Благодаря своим свойствам, MyoRing способствует приданию роговице нужной, более плоской формы. Кольцо, не препятствует процессам обмена веществ, его задача — усилить механические свойства роговичной ткани, создавая дополнительный биомеханический каркас. Оно устанавливается для постоянного ношения.

Технология имплантации колец MyoRing состоит из двух основных этапов. На первом этапе формируется роговичный карман. Изначально использовался микрокератом PocketMaker, в настоящее время роговичный карман формируется фемтосекундным лазером. Фемтосекундный лазер создает в роговице идеальную круговую полость, состоящую из крошечных кавитационных пузырьков. Таким образом, офтальмологи могут проводить срезы внутри роговицы с высочайшей точностью по глубине воздействия и по диаметру. На втором этапе мягкий кольцевой имплантат вводится в роговичный карман через тоннельный микроразрез. Тоннельный разрез заживает самостоятельно и не требует наложения швов.

В работе [14] была использована двухсегментная модель глазного яблока для оценки влияния различных хирургических и биомеханических параметров на механическое поведение роговицы после имплантации MyoRing. Для описания биологических тканей роговицы и склеры использовался трансверсально-изотропный материал. Работа [14] была выполнена совместно с офтальмологами из Чебоксарского филиала МНТК «Микрохирургия глаза». Результаты расчетов позволили получить качественную оценку влияния параметров кольца и глубины его погружения на изменение радиуса кривизны роговицы, но порядок деформаций был значительно меньше, чем в клинической практике.

Как отмечается в [14], имелись клинические данные, описывающие результаты более 600 операций с использованием кольца MyoRing. Для изучения взаимосвязи между изменением радиуса кривизны вершины до и после операции и хирургическими параметрами (толщиной кольца и глубиной имплантации) использовался статистический анализ (пакет SPSS28.0). Регрессионный анализ показал, что результаты операции можно с высокой точностью прогнозировать на основе статистически значимой зависимости:

$R_{new} = R_1 + 0.005 \times h + 0.001 \times C$ , где  $h$  — высота имплантированного кольца (в  $\mu m$ ),  $C$  — глубина его размещения в роговице (в  $\mu m$ ),  $R_1$  — начальный радиус кривизны роговицы.

Имеющиеся клинические данные использовались для определения констант в гиперупругих моделях.

В настоящем исследовании мы использовали двухпараметрическую модель Муни-Ривлина, модель Йео и неогуковскую модель для оценки влияния нелинейных свойств роговицы на изменение профиля роговицы после операции. В нашем исследовании склера остается трансверсально-изотропной тканью.

Поведение гиперупругих материалов описывается нелинейными законами связи напряжение-деформация. В этом случае взаимосвязь между напряжениями и деформациями задается с помощью потенциала энергии деформаций [15]. Модель Муни-Ривлина с двумя параметрами описывается потенциалом энергии деформации следующего вида:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2,$$

где  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  — первый и второй инвариант девиатора деформации,  $C_{10}, C_{01}$  — материальные константы, характеризующие девиаторную деформацию материала,  $d$  — параметр несжимаемости материала,  $J$  — определитель градиента упругой деформации. Начальный модуль сдвига определяется как  $\mu = 2(C_{10} + C_{01})$ , а начальный модуль объёмного сжатия задаётся выражением:  $K = 2/d$ .

При  $C_{01} = 0$ , модель Муни-Ривлина сводится к неогуковскому гиперупругому материалу. В этом случае  $C_{10} = \mu/2$ .

Потенциал энергии деформации для модели Йео задаётся выражением:

$$W = \sum_{i=1}^N C_{i0}(\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k}(J - 1)^{2k},$$

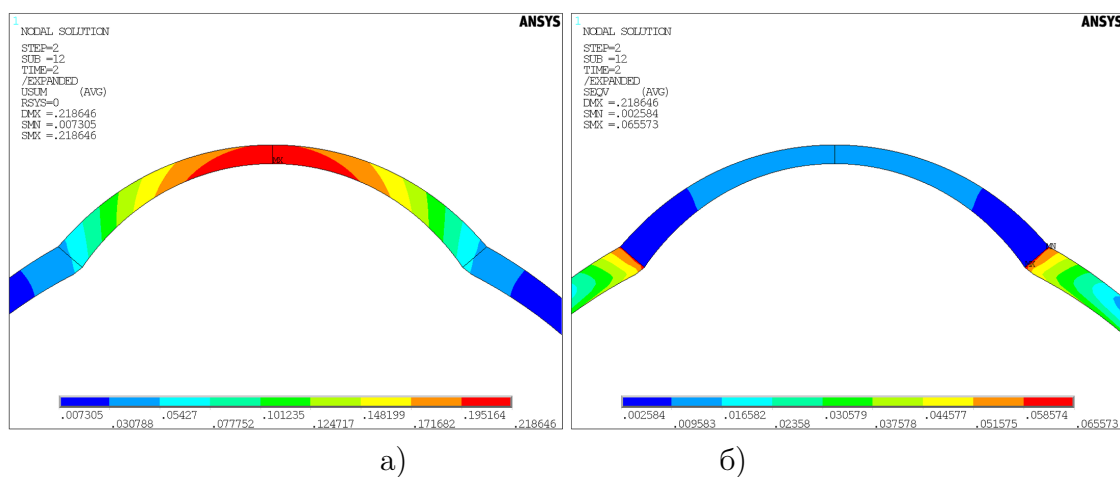
где  $N$  — количество членов в ряду, обычно  $N = 3$ . Начальные значения модуля объёмного сжатия  $K$  и модуля сдвига  $\mu$  определяются как:  $K = 2/d$  и  $\mu = 2C_{10}$ .

В настоящее время константы для гиперупругих моделей определяются экспериментально и сильно варьируются при больших нагрузках (при давлениях более 15 мм рт. ст.). В данной работе коэффициенты  $C_{10}, C_{01}$  и  $d$  были подобраны таким образом, чтобы деформационные характеристики моделей, в которых роговица задается трансверсально-изотропным материалом и гиперупругим материалом Муни-Ривлина с двумя параметрами совпадали при изменении внутриглазного давления от 1 мм рт. ст. до 15 мм рт. ст. Важно было подобрать такие значения констант для гиперупругих материалов, при которых изменение радиуса кривизны роговицы при коррекции кольцом MyoRing соответствовало бы клиническим данным. Исходя из того, что среднее значение для модуля упругости роговицы на поверхности изотропии составляет  $E_c = 0.3$  МПа, а коэффициент Пуассона  $\nu = 0.49$ , мы получаем, что среднее значение модуля сдвига будет  $\mu \approx 0.1$  МПа. Проведена серия расчетов и наиболее близкие результаты были получены для констант, удвоенная сумма которых равна модулю сдвига  $2(C_{10} + C_{01}) = \mu$ , здесь  $\mu$  определяется из трансверсально-изотропной модели

роговицы. Для неогуковского материала и модели Йео основной коэффициент  $C_{10} = \mu/2$ , остальные константы в модели Йео варьировались.

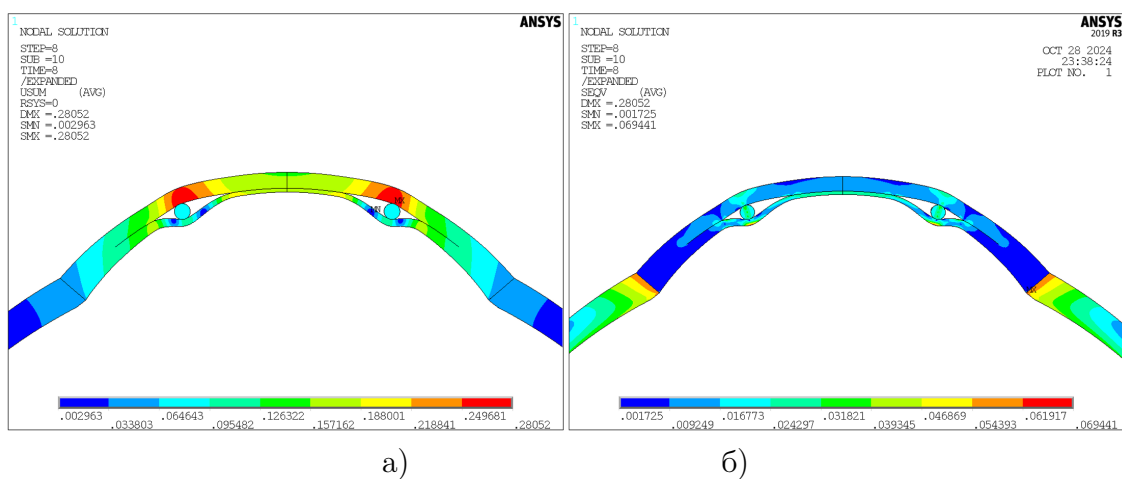
Как и ранее выполняется двумерное осесимметричное моделирование в программном комплексе ANSYS. Роговица и склера задаются двумя сферическими слоями переменной толщины, нагруженными внутриглазным физиологическим давлением  $p = 15$  мм рт. ст. Формирование роговичного кармана проводится путем разделения роговицы на два отдельных слоя. Процесс имплантации кольца моделируется тремя контактными парами типа «поверхность-поверхность». Первая контактная пара задаёт связь между слоями роговицы в результате образования роговичного кармана. Две другие пары имитируют контакт кольца с нижней и верхней поверхностями роговичного кармана. Роговица является контактной поверхностью (target), а жесткое кольцо – целевой (contact). В контактных парах с кольцом устанавливается начальный геометрический зазор (gap). Таким образом, решается нелинейная задача при больших деформациях методом последовательного приложения нагрузки. На каждом шаге постепенно увеличивается внутреннее давление и уменьшается зазор между кольцом и роговицей до полной установки кольца в область кармана. После каждой серии расчетов измеряется радиус кривизны роговицы  $R_c$  в ответ на установку кольца MyoRing.

Для обеспечения сходимости результатов моделирования в области контакта был проведён анализ независимости сетки. Путём её последовательного сгущения контролировались изменения деформаций и напряжений по Мизесу. Размер элементов уменьшался до момента, когда отклонение указанных величин не стало превышать 2%.

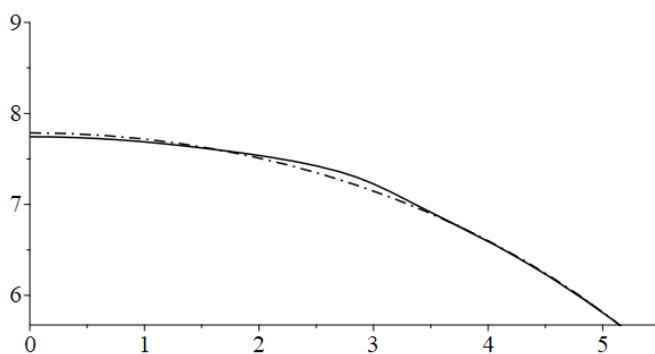


**Рис. 1.** Деформации (а) и напряжения по Мизесу (б) в роговице до установки кольца MyoRing

На рис. 1–3 представлены результаты расчетов для кольца радиуса  $r = 0.2$  мм и жесткостью  $E = 1800$  МПа. Показано распределение напряжений и деформаций до и после имплантации MyoRing для роговицы, материал которой задается двухпараметрической моделью Муни-Ривлина с параметрами  $C_{10} = 0.035$ ,  $C_{01} = 0.015$  и  $d = 1$ . Согласно расчетам наибольшие деформации происходят в зоне установки кольца, а центральная часть роговицы уплощается, что соответствует клиническим данным. Установка кольца большей высоты (радиуса поперечного сечения для круглого кольца) приводит к более выраженному изменению профиля роговицы, что подтверждает возможность коррекции больших рефракционных ошибок.



**Рис. 2.** Деформации (а) и напряжения по Мизесу (б) в роговице после установки кольца радиуса  $r = 0.2$  мм



**Рис. 3.** Профиль внешней поверхности роговицы до (пунктирная линия) и после установки кольца MyoRing радиуса  $r = 0.2$  мм (сплошная линия)

В таблице 1 представлены значения радиусов кривизны роговицы, рассчитанные по смещению вершины роговицы во время деформации в ответ на приложение давления 15 мм рт. ст. до и после операции. Для модели роговицы Муни-Ривлина приводятся значения констант  $C_{10}$  и  $C_{01}$ , удовлетворяющие условиям: их удвоенная сумма равна модулям сдвига  $\mu = 0.1$  МПа и  $\mu = 0.2$  МПа, а изменения радиуса кривизны наибольшие. Для неогукковского материала и модели Йео соответствующие константы  $C_{10}$  равны половине модуля сдвига  $\mu = 0.1$  МПа.

Модель материала роговицы	Константы материала	Радиус кривизны роговицы $R_c$ , мм	
		До коррекции	После коррекции
Модель Муни-Ривлина двухпараметрическая, модуль сдвига $\mu = 0.1$ МПа	$C_{01} = 0.028$ $C_{10} = 0.022$	7.35	8.71
	$C_{01} = 0.044$ $C_{10} = 0.006$	7.35	8.73
Модель Муни-Ривлина двухпараметрическая, модуль сдвига $\mu = 0.2$ МПа	$C_{01} = 0.06$ $C_{10} = 0.04$	7.55	10.09
Неогукковский материал, модуль сдвига $\mu = 0.1$ МПа	$C_{01} = 0.05$	7.35	8.74
Модель Йео, модуль сдвига $\mu = 0.1$ МПа	$C_{10} = 0.05$ $C_{20} = 1.0$ $C_{30} = 10.0$	6.31	10.14
	$C_{10} = 0.05$ $C_{20} = 0.5$ $C_{30} = 5.0$	7.38	9.64

**Таблица 1.** Изменение радиуса кривизны роговицы до и после коррекции кольцом MyoRing с радиусом поперечного сечения  $r = 0.2$  мм для различных гиперупругих моделей роговицы

Результаты численного моделирования показали, что использование гиперупругих моделей позволяет получить изменения радиуса кривизны роговицы, близкие к данным, наблюдаемым в клинической практике [26, 27]. Наибольшее изменение радиуса кривизны ( $\Delta R_c = 3.83$  мм) в ответ на установку кольцевой вставки получено при использовании модели Йео, за счет большего количества констант которые можно варьировать. Имплантация MyoRing приводит к значительному увеличению напряжений в самом кольце, что свидетельствует о его роли как дополнительного биомеханического каркаса для роговицы. Наибольшие напряжения наблюдаются в области контакта кольца с роговицей, что подтверждает эффективность метода для укрепления тонкой роговицы. Таким образом, в данной задаче, в которой роговица подвергается большим деформациям, хорошее соответствие аналитических результатов и клинических данных получается при использовании моделей гиперупругих материалов.



**2. Задача об интравитреальных инъекциях.** В настоящее время интравитреальные инъекции (ИВИ) являются широко используемым офтальмологами методом для лечения заболеваний глаз. В данном случае лекарственное средство (объем жидкости) вводится прямо в стекловидное тело глаза, что позволяет достичь высокой концентрации препарата в нужном месте, минимизируя побочные эффекты воздействия на организм. Введение жидкости в глаз может привести к кратковременному повышению внутриглазного давления (ВГД) и вызвать нежелательные побочные эффекты и осложнения, такие как внутриглазное кровотечение и отслоение сетчатки. Повышение ВГД является основным фактором риска развития глаукомы и истончения слоя нервных волокон сетчатки. Влияние вызванного ИВИ повышения ВГД на глаз до сих пор остается актуальной темой для исследования.

Роговица составляет только 10% фиброзной оболочки, и стекловидное тело не соприкасается с роговицей. В связи с этим в первых моделях, оценивающих изменение внутриглазного давления после введения дополнительного объема несжимаемой жидкости, исследовалась деформация склеры, что позволяло получить простые аналитические зависимости. Для трансверсально-изотропного слоя, моделирующего склеру, аналитическое решение задачи представлено в работе [10].

Однако, учитывая, что роговица является существенно более мягкой составляющей, чем склера и измерение внутриглазного давления происходит через роговицу, представляется важным провести более детальное исследование этого вопроса.

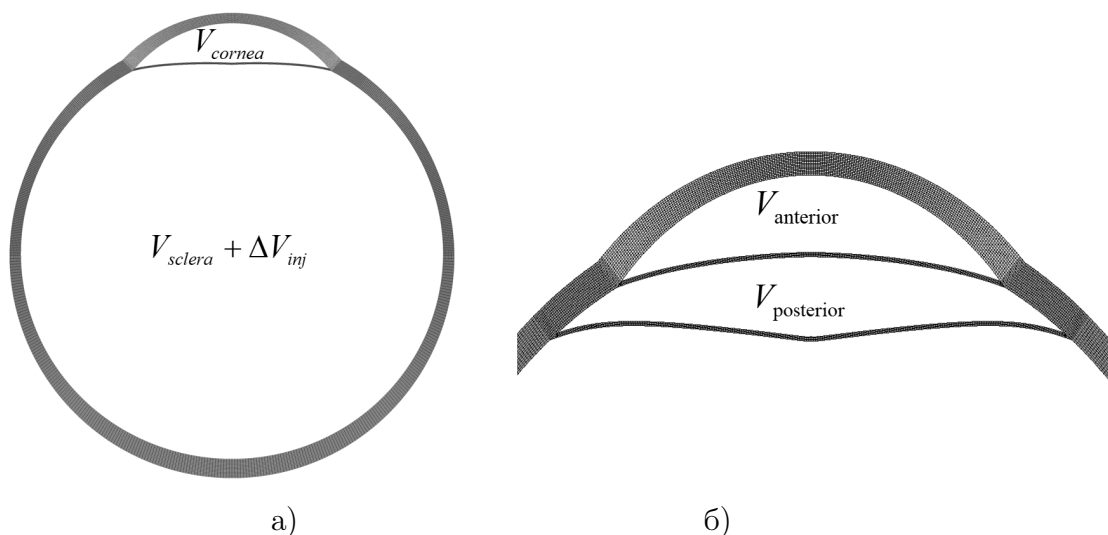
Известно, что глаз представляет собой гидростатическую систему, состоящую из нескольких камер: закрытых и полуоткрытых полостей, отделенных друг от друга эластичными мембранами. Каждая полость имеет свой уровень давления, который может несколько отличаться от давления в других частях глаза.

В работах офтальмологов [16] отмечается, что разница в давлении в разных частях глаза (за исключением кровеносных сосудов) невелика, и на практике ею можно пренебречь. Как отмечалось, при введении дополнительного объема жидкости в стекловидное тело в результате инъекции в первый момент времени происходит резкое увеличение давления. Важно понять, как наличие внутренних перегородок между камерами глаза и нелинейные свойства роговицы влияют на изменение давления внутри камер сразу после инъекций и можно ли пренебрегать внутренними элементами глаза при математическом моделировании. Данные результаты важны также для задач измерения внутриглазного давления разными тонометрами.

Численное решение задачи о напращенно-деформированном состоянии глаза, разделенного на два внутренних объема, при введении дополнительного объема жидкости представлено в работе [17]. Было получено, что для трансверсально-изотропной модели материала разница давлений в камерах составляет

1–2 мм рт. ст. Сравнение с аналитическим решением [10] показало, что упрощенные модели глаза, основанные на теории оболочек, могут давать удовлетворительные оценки, даже несмотря на то, что они не учитывают сложную внутреннюю структуру глазного яблока.

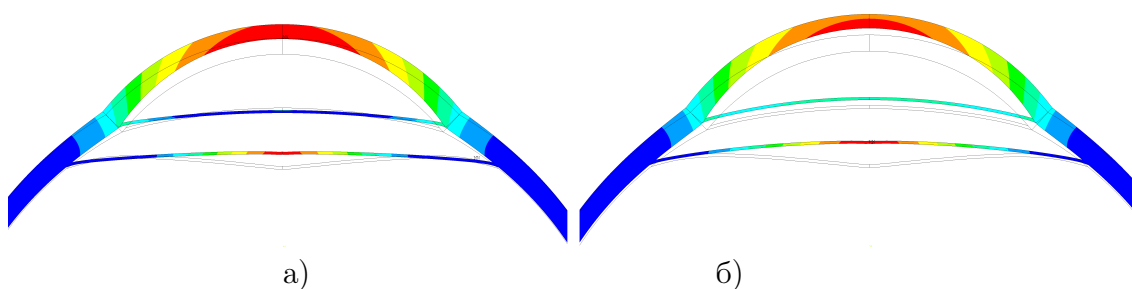
В настоящей работе выполняется конечно-элементное моделирование глазного яблока без, с одной и двумя разделительными перегородками (см. рис. 4). Анализируется влияние разных моделей роговицы на изменение объема в камерах глаза при итравитреальных инъекциях. Как в предыдущей задаче внешняя оболочка глаза представляется сопряженными сферическими сегментами. В первой, базовой, модели игнорируются все дополнительные компоненты внутри глаза и рассматривается композитная оболочка как полость, заполненная несжимаемой жидкостью с некоторым давлением  $p$ . Затем давление менялось таким образом, чтобы внутренний объем моделируемого глазного яблока увеличился на объем вводимого лекарственного средства.



**Рис. 4.** Модель глаза с одной (а) и двумя (б) разделительными перегородками

Во второй модели добавляется разделительная перегородка, разбивающая глаз на два объема: подроговичный  $V_{cornea}$  и склеральный  $V_{sclera}$ . Полагаем, что каждая камера находится под действием внутреннего физиологического давления  $p$ . Согласно протоколу ИВИ введение лекарственного средства происходит в стекловидное тело. Давления в камерах увеличивается последовательно таким образом, чтобы объем в склеральной камере увеличился на объем инъекции  $V_{sclera} + \Delta V_{inj}$ , а в роговичной камере остался без изменений  $V_{cornea} = const$ . Аналогично решается задача и для глаза с тремя камерами: склеральный объем увеличивается на объем инъекции, а в других двух камерах: передней  $V_{anterior}$  и задней  $V_{posterior}$  объемы остаются постоянными. Проводится оценка изменения давления в камерах в ответ на инъекции объемом 0.05 мл и 0.1 мл в стекловидное тело.

Был проведен ряд расчётов для определения давлений, устанавливающихся сразу после введения инъекции. Изначально оценивалось давление для моделей с однородным внутренним объемом и с двумя камерами. Модуль упругости роговицы полагался  $E_{cornea}=0.3$  МПа, для склеры модуль упругости варьировался от  $E_s=7$  МПа (более мягкая) до  $E_s=15$  МПа (наиболее жесткая). Модули упругости склеры в направлении нормали  $E'_s$  полагались в  $10\div 40$  раз меньше чем на поверхности изотропии. Коэффициенты Пуассона на поверхности изотропии  $\nu = 0.49$ , в перпендикулярном направлении  $\nu' = 0.01$ . Модуль сдвига на поверхности изотропии  $G = E/(2(1+\nu))$  и в нормальном направлении  $G' = G/2$ .



**Рис. 5.** Деформации в роговице после инъекции 0.05 мл (а) и 0.1 мл (б). Модуль упругости склеры  $E_s = 7$  МПа

Результаты, полученные для мягкой склеры, лучше соответствуют аналитическим результатам, полученным ранее в работе [10]. Все расчёты производились дважды: для трансверсально-изотропной и неогуковской моделей роговицы. В случае неогуковского материала константа  $C_{01}$  вычислялась как  $C_{01} = G/2$ , где  $G$  — модуль сдвига для трансверсально-изотропного материала с которым проводится сравнение. Аналогичные расчеты были проведены и для модели с тремя внутренними камерами. На рис. 5 показано деформированное состояние роговицы после инъекции объемом 0.05 мл и 0.01 мл для неогуковского материала роговицы. В табл. 2–4 представлены результаты для различных моделей материала роговицы.

Модель материала роговицы	Объем инъекции $\Delta V_{inj}$ , мл	Давление в камерах, мм рт. ст.	
		Передняя камера	Стекловидное тело
Трансверсально-изотропный	0.05	37.29	39.17
	0.1	57.3	63.97
Неогуковский	0.05	38.55	40.3
	0.1	58.85	65.0

**Таблица 2.** Модель с двумя камерами,  $E_s = 15$  МПа

Модель материала роговицы	Объем инъекции $\Delta V_{inj}$ , мл	Давление в камерах, мм рт. ст.	
		Передняя камера	Стекловидное тело
Трансверсально-изотропный	0.05	28.8	29.8
	0.1	41.72	44.74
Неогуковский	0.05	29.28	30.2
	0.1	42.26	45.08

**Таблица 3.** Модель с двумя камерами,  $E_s = 7$  МПа

Модель материала роговицы	Объем инъекции $\Delta V_{inj}$ , мл	Давление в камерах, мм рт. ст.		
		Передняя камера	Стекловидное тело	Задняя камера
Трансверсально-изотропная	0.05	28.68	29.9	29.72
	0.1	41.36	45.14	44.58
Неогуковская	0.05	29.18	30.3	30.125
	0.1	41.86	45.435	44.885

**Таблица 4.** Модель с тремя камерами,  $E_s = 7$  МПа

Из полученных данных видно, что давление в камерах слабо меняется при переходе от трансверсально-изотропной роговицы к неогуковской. В этом случае изменения давлений не превышают 0.5 мм рт. ст. Проведенные расчеты показали близкие результаты для трансверсально-изотропного и гиперупругой модели роговицы. В моделях с одной или двумя камерами разница в объемах составляет 1-2 мм рт. ст. для инъекций 0.05 мл и порядка 3-4 мм рт. ст. для инъекций 0.1 мл. Если рассматривать единый внутренний объем, то внутреннее давление возрастает до среднего значения, получаемого для моделей с несколькими камерами. Показано, что деформации глазного яблока, вызванные увеличением давления (при глаукоме или после внутриглазных инъекций), зависят в основном от растяжимости склеры.

**3. Выводы** Рассмотрены две задачи биомеханики глаза. В первой при имплантации кольца MyoRing роговица испытывает большие деформации сдвига, и получить результаты, соответствующие клиническим данным удастся только с использованием моделей гиперупругих материалов. Причем достаточно точное решение задачи получается при использовании неогуковского материала, потенциал которого зависит только от одного параметра. Во второй задаче усложнения в моделировании, связанное с описанием свойств роговицы, представляется необоснованным.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** С. М. Бауэр постановка задачи, редактирование текста рукописи, обзор литературы по тексту статьи, согласование финальной версии рукописи, Л. А. Венатовская написание текста рукописи, обзор литературы по тексту статьи, моделирование, Д. В. Матченко написание программы оптимизации расчетов, проведение расчетов

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект 116636233).

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** S. M. Bauer problem statement, manuscript editing, literature review, final manuscript approval, L. A. Venatovskaya manuscript writing, literature review, modeling, D. V. Matchenko optimization algorithm development for calculations, computational analysis

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was financially supported by Saint Petersburg State University (Project No. 116636233).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисов С., Воронин Г. Экспериментальное исследование механических характеристик роговицы после эксимерлазерной фотоабляции // Клиническая офтальмология. – 2001. – № 3. – С. 83–86.
2. *Elsheikh A., Alhasso D., Rama P.* Assessment of the epithelium's contribution to corneal biomechanics // *Exp. Eye Res.* – 2008. – Vol. 86, no. 2. – P. 445–451. – DOI: 10.1016/j.exer.2007.12.002.
3. *Buzard K. A.* Introduction to biomechanics of the cornea // *Refract. Corneal Surg.* – 1992. – Vol. 8, no. 2. – P. 127–138.
4. *Elsheikh A., Wang D., Pye D.* Determination of the modulus of elasticity of the human cornea // *J. Refract. Surg.* – 2007. – Vol. 23, no. 8. – P. 808–818. – DOI: 10.3928/1081-597X-20071001-11.
5. *Cogan D. G., Kinsey V. E.* The cornea: V. Physiologic aspects // *Arch. Ophthalmol.* – 1942. – Vol. 28. – P. 661–669.
6. Collagen structure and mechanical properties of the human sclera: analysis for the effects of age / В. Coudrillier [et al.] // *J. Biomech. Eng.* – 2015. – Vol. 137, no. 4. – P. 041006-1–041006-14. – DOI: 10.1115/1.4029430.
7. *Piñero D. P., Alcón N.* In vivo characterization of corneal biomechanics // *J. Cataract Refract. Surg.* – 2014. – Vol. 40, no. 6. – P. 870–887. – DOI: 10.1016/j.jcrs.2014.03.021.
8. *Моисеева И., Штейн А., Любимов Г.* Оценка упругих характеристик глазного яблока по отклику энуклированного глаза на введение заданных объемов жидкости // *Российский журнал биомеханики.* – 2020. – Т. 24, № 4. – С. 412–429.
9. *Иомдина Е., Бауэр С., Котляр К.* Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. – Москва : Реал Тайм, 2015. – 208 с.
10. *Бауэр С., Венатовская Л., Воронкова Е.* Модели механики деформируемого тела в задачах офтальмологии // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* – 2023. – Т. 10, № 4. – С. 686–712.

11. Идентификация параметров модели роговицы с кератоконусом при численно-экспериментальном исследовании ее геометрии и механического поведения / Е. Солодкова [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2023. – № 3. – С. 67–80. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.3.01.
12. *Salamatova V. Y., Liogky A. A.* Hyperelastic membrane modelling based on data-driven constitutive relations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. – 2020. – Vol. 35, no. 3. – P. 163–173. – DOI: 10.1515/rnam-2020-0013.
13. *Daxer A.* Corneal intrastromal implantation surgery for the treatment of moderate and high myopia // J. Cataract Refract. Surg. – 2008. – Vol. 34, no. 2. – P. 194–198. – DOI: 10.1016/j.jcrs.2007.10.011.
14. Mathematical Model for Myopia Correction with MyoRing Implants / S. M. Bauer [et al.] // Advanced Structured Materials. Vol. 196. – Springer, 2023. – P. 81–90. – DOI: 10.1007/978-3-031-43736-6\_6.
15. *Лурье А.* Нелинейная теория упругости. – Москва : Наука, 1980. – 512 с.
16. *Нестеров А.* Глаукома. – Москва : Мед. информ. агентство, 2008. – 360 с.
17. Modeling Approaches for an Eyeball Deformation After Intravitreal Injection / S. M. Bauer [et al.] // Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications. Vol. 155. – Springer, 2021. – P. 77–85. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-030-81705-3\_6.

## REFERENCES

1. *Avetisov S. Y., Voronin T. V.* Experimental study of mechanical corneal characteristics after excimerlaser photoablation // Russian Journal of Clinical Ophthalmology. – 2001. – No. 3. – P. 83–86.
2. *Elsheikh A., Alhasso D., Rama P.* Assessment of the epithelium's contribution to corneal biomechanics // Exp. Eye Res. – 2008. – Vol. 86, no. 2. – P. 445–451. – DOI: 10.1016/j.exer.2007.12.002.
3. *Buzard K. A.* Introduction to biomechanics of the cornea // Refract. Corneal Surg. – 1992. – Vol. 8, no. 2. – P. 127–138.
4. *Elsheikh A., Wang D., Pye D.* Determination of the modulus of elasticity of the human cornea // J. Refract. Surg. – 2007. – Vol. 23, no. 8. – P. 808–818. – DOI: 10.3928/1081-597X-20071001-11.
5. *Cogan D. G., Kinsey V. E.* The cornea: V. Physiologic aspects // Arch. Ophth. – 1942. – Vol. 28. – P. 661–669.
6. Collagen structure and mechanical properties of the human sclera: analysis for the effects of age / B. Coudrillier [et al.] // J. Biomech. Eng. – 2015. – Vol. 137, no. 4. – P. 041006-1–041006-14. – DOI: 10.1115/1.4029430.
7. *Piñero D. P., Alcón N.* In vivo characterization of corneal biomechanics // J. Cataract. Refract. Surg. – 2014. – Vol. 40, no. 6. – P. 870–887. – DOI: 10.1016/j.jcrs.2014.03.021.
8. *Moiseeva I. N., Stein A. A., Lyubimov G. A.* Estimation of the elastic characteristics of the eyeball from the response of the enucleated eye to the introduction of given volumes of liquid // Russian Journal of Biomechanics. – 2020. – Vol. 24, no. 4. – P. 412–429.
9. *Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotliar K. E.* Eye Biomechanics: Theoretical Aspects and Clinical Applications. – Moscow : Real Time, 2015. – 208 p.

10. *Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B.* Solid mechanics models in application to ophthalmology // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. – 2023. – Vol. 10, no. 4. – P. 686–712.
11. Identification of the model parameters in cornea with keratoconus in terms of the numerical-experimental study of corneal geometry and mechanical behavior / E. G. Solodkova [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2023. – Vol. 27, no. 3. – P. 67–80. – DOI: 10.15593/RZhBiomech/2023.3.05.
12. *Salamatova V. Y., Liogky A. A.* Hyperelastic membrane modelling based on data-driven constitutive relations // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2020. – Vol. 35, no. 3. – P. 163–173. – DOI: 10.1515/rnam-2020-0013.
13. *Daxer A.* Corneal intrastromal implantation surgery for the treatment of moderate and high myopia // J. Cataract Refract. Surg. – 2008. – Vol. 34, no. 2. – P. 194–198. – DOI: 10.1016/j.jcrs.2007.10.011.
14. Mathematical Model for Myopia Correction with MyoRing Implants / S. M. Bauer [et al.] // Advanced Structured Materials. Vol. 196. – Springer, 2023. – P. 81–90. – DOI: 10.1007/978-3-031-43736-6\_6.
15. *Lurie A. I.* Nonlinear Theory of Elasticity. – Moscow : Nauka, 1980. – 512 с. – in Russian.
16. *Nesterov A. P.* Glaucoma. – Moscow : Meditsinskoe Informatsionnoe Agentstvo, 2008. – 360 с. – (in Russian).
17. Modeling Approaches for an Eyeball Deformation After Intravitreal Injection / S. M. Bauer [et al.] // Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications. Vol. 155. – Springer, 2021. – P. 77–85. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-030-81705-3\_6.

Д. С. Петухов, И. Э. Келлер

## ОПИСАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ОТ ЧАСТОТЫ НАГРУЖЕНИЯ И ВЫДЕРЖЕК В РАМКАХ ЭВОЛЮЦИОННОЙ МОДЕЛИ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ

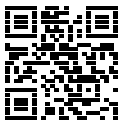
*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

**Аннотация.** Разрабатывается эволюционная модель накопления усталостной поврежденности, являющаяся функционалом изменения напряжения во времени в локальном объеме, не связанном с пластическими деформациями. Представлено обобщение модели для учёта реономных эффектов зависимости циклической долговечности от частоты нагружения и выдержек при максимальном напряжении в цикле. Определены материальные константы для двухфазного титанового сплава ВТ6 (аналог Ti-6Al-4V), проявляющего холодную ползучесть и чувствительность усталостных свойств к временным характеристикам циклического нагружения при комнатной температуре. Используются новые данные усталостных испытаний с различными частотами и выдержками в циклах. Показано, что модель корректно описывает эти данные и позволяет прогнозировать усталостную долговечность в более широком диапазоне условий. Выполнен расчёт долговечности детали газотурбинного двигателя на полётных циклах с выдержками при максимальных и промежуточных значениях напряжения, показавший существенную неконсервативность расчёта методом схематизации программы нагружения в рамках гипотезы линейного суммирования поврежденности.

**Ключевые слова:** усталостное разрушение, эволюция поврежденности, модель, многоцикловая усталость, полётные циклы, зависимость от частоты, зависимость от времени выдержки, идентификация.

**Петухов Дмитрий Сергеевич**, ведущий инженер, лаборатория нелинейной механики деформируемого твёрдого тела; e-mail: petuhovds@mail.ru;

**Келлер Илья Эрнстович**, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: kie@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 11695



**для цитирования:** Петухов Д. С., Келлер И. Э. Описание зависимости усталостной долговечности от частоты нагружения и выдержек в рамках эволюционной модели повреждаемости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 262–281. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.007. EDN: NILHMC

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.



*D. S. Petukhov, I. E. Keller*

## **SIMULATING THE FREQUENCY AND DWELL EFFECTS ON FATIGUE LIFE USING AN EVOLUTIONARY DAMAGE MODEL**

*Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia*

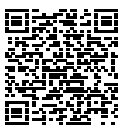
**Abstract.** An evolutionary model for the accumulation of fatigue damage is developed as a functional of the time history of stress in a local volume not associated with plastic deformation. The model is generalized to account for rheonomic effects: the dependence of cyclic lifetime on loading frequency and dwell times at the maximum stress within a cycle. Material constants are identified for the two-phase titanium alloy VT6 (Ti-6Al-4V analogue), which exhibits cold creep and sensitivity of fatigue properties to temporal features of cyclic loading at room temperature. New fatigue test data with various frequencies and dwell times are used. The model accurately describes these data and predicts fatigue life over a wider range of loading conditions. A fatigue life assessment is performed for a gas turbine engine component under flight cycles with dwells at maximum and intermediate stress levels, revealing significant nonconservatism of life estimates obtained via program block simplification under the linear damage summation hypothesis.

**Keywords:** fatigue failure; damage evolution; model; high/cycle fatigue; flight cycles; frequency dependence; dwell time dependence; identification.

**Dmitry S. Petukhov**, Leading Engineer; e-mail: petuhovds@mail.ru;

**Ilya E. Keller**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids; e-mail: kie@icmm.ru;

<https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 11695



**to cite this article:** *Petukhov D. S., Keller I. E.* Simulating the frequency and dwell effects on fatigue life using an evolutionary damage model // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 262–281. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.007

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**1. Введение.** В процессе эксплуатации детали самолетов, вертолетов, экскаваторов, ветрогенераторов, наземного транспорта испытывают нерегулярное циклическое нагружение. Важными параметрами цикла нагружения являются кратковременные пиковые нагрузки, выдержки в нагруженном состоянии и их доли в цикле. Если первые можно учесть в рамках обычного при описании усталости склерономного описания, то выдержки в нагруженном состоянии могут вызывать в металлических сплавах при высоких (а иногда и комнатных) температурах деформации ползучести и повреждаемость, и потому вовлекают в описание процесса время. Подобные реономные эффекты лежат и в основе зависимости усталостных свойств от частоты регулярного нагружения там, где эта зависимость наблюдается.

Эффект зависимости усталостной долговечности от частоты нагрузки встречается и исследован для большого числа различных сплавов при комнатной и повышенной температуре [1, 2]. Экспериментальные кривые усталости, полученные при испытаниях на различных частотах, отличаются друг от друга; также отличаются и пределы выносливости. Зачастую эта зависимость немонотонна: при повышении частоты усталостная долговечность (в циклах) сначала увеличивается, а потом падает [1, 3]. Величина эффекта варьируется для разных сплавов и температур и может достигать двух порядков, наиболее он выражен для области низких амплитуд нагрузки [4]. Эффект зависит и от коэффициента асимметрии цикла  $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ . Так, в [5] для  $\alpha - \beta$  титанового сплава Ti-6Al-4V изучалось повышение предела выносливости с увеличением частоты испытаний при различных  $R$ , и определено что эффект снижается с повышением  $R$ . В последние годы интерес к эффекту возрос в контексте сверхмногоциклового усталости [6, 7]. Испытания на базе порядка  $10^9$  и более циклов проводятся при высоких частотах (около 20 кГц), и возникает вопрос о сопоставимости результатов ускоренных испытаний и стандартных испытаний на усталость (с частотой 10-100 Гц), а также применимости результатов для оценки времени жизни в случаях, когда база  $10^9 - 10^{11}$  циклов достигается за годы эксплуатации. В частности, прояснение данных вопросов позволило бы определить, в каких случаях и с какими поправками можно использовать данные ускоренных высокочастотных (значительно более быстрых и дешёвых) испытаний для оценки усталостной долговечности. В [8] проведены испытания на многоцикловую усталость  $\alpha - \beta$  титанового сплава Ti-6Al-7Nb и ряда коммерчески чистых металлов при 100 Гц и 20 кГц. Для некоторых материалов эффект частоты почти отсутствовал, тогда как для других он был значителен. Таким образом, эффект влияния частоты нагружения на усталостную долговечность зависит от материала, температуры, коэффициента асимметрии и базы испытаний.

Чтобы объяснить влияние частоты испытаний на усталостную долговечность, некоторые авторы обращаются к чувствительности металлов к скорости деформации [2], что выражается в зависимости циклической  $\sigma - \varepsilon$  диаграммы от скорости нагружения. Физический механизм эффекта зависит от стадии

разрушения. В [9] на примере низкоуглеродистой стали определено, что зона пластической деформации в вершине распространяющейся трещины намного меньше при высокой частоте испытаний (20 кГц), чем при низкой (10 кГц). Это снижает зону повреждённого материала и затормаживает рост трещины. В [4] изучалось развитие дислокационных структур в ходе усталостного разрушения низкоуглеродистой стали. При низких частотах 0,2-140 Гц, формировались более крупные и упорядоченные структуры чем при высокой частоте 20 кГц. Крупные дислокационные структуры, в свою очередь, упрощают формирование трещин. Это можно объяснить тем, что, при высокой частоте, дислокации смещаются на меньшие расстояния за цикл нагрузки по сравнению с низкой. К такому же выводу пришли авторы [10] изучая влияние частоты на усталостную долговечность подшипниковой стали.

Наличие выдержек в нагруженном состоянии (особенно при максимальной нагрузке) в цикле приводит к снижению усталостной долговечности, достигающему трёх порядков [11–13]. Этот феномен, называемый в англоязычной литературе *dwelt fatigue*, далее будем называть “усталостью с выдержками”. Отличие данного феномена от накопления повреждений в ходе циклической ползучести, состоит, во-первых, в том, что он наблюдается при комнатной, или близкой к ней, температуре, а во-вторых, отсутствует значительная макроскопическая необратимая деформация. На сегодняшний момент, когда в литературе говорят об усталости с выдержками, речь идёт исключительно о титановых сплавах. На феномен усталости с выдержками впервые обратили внимание ещё во второй половине 1970-х годов, так как он приводил к непредвиденному разрушению элементов газотурбинных двигателей [14, 15]. Однако и на сегодняшний день он до сих пор приводит к авариям, так, в 2017 году произошло крушение самолёта в результате разрушения детали авиадвигателя из титанового сплава Ti-6Al-4V [16].

Эффект усталости с выдержками особенно выражен для титановых сплавов  $\alpha$  фазы или наличия небольшой доли  $\beta$  фазы, например, Ti-6242, IMI685, IMI829, IMI834, но он замечен и для сплавов смешанной  $\alpha - \beta$  фазы, таких как Ti-6Al-4V или Ti-17 [16] (доля фаз в сплавах может меняться в зависимости от термической и механической обработки). Эффект наблюдается в режиме малоциклового усталости, т.е. при высоких уровнях напряжений и практически исчезает при понижении амплитуды нагрузки [12, 17]. С увеличением времени выдержки, количество циклов до разрушения сначала падает, а затем становится постоянным на рубеже десятков секунд [17–19].

Интересна связь эффекта усталости с выдержками с температурой. Снижение усталостной долговечности максимально при температуре 80-120°C [20, 21] и исчезает при температуре около 200°C [16, 20, 22]. Это связывают со снижением пластической анизотропии  $\alpha$ -фазы титана вблизи этой температуры [23]. Дополнительная выдержка при повышенной температуре и пониженном, по сравнению с пиком, напряжении может благоприятно влиять на усталостные свойства [12, 24], этот эффект называют *thermal alleviation*.

Физический механизм эффекта усталости с выдержками связан с высокой анизотропией кристаллической решётки  $\alpha$ -фазы титана: модуль Юнга варьируется в пределах 100-145 ГПа [25], а усилия начала деформации вдоль различных систем скольжения различаются до трёх раз [23]. Многие авторы принимают следующий механизм dwell fatigue [11, 12, 21]. Рассматривается граница между зонами с большой разницей ориентации кристаллической решётки. Причём в одной из этих зон системы скольжения благоприятно расположены по отношению к напряжённому состоянию (“мягкая” зона), а в другой – неблагоприятно (“твёрдая” зона). В ходе выдержки дислокации зарождаются в “мягкой” зоне и выходят на границу “твёрдой” зоны, релаксируя напряжения в “мягкой” зоне и перенося их на “твёрдую”, кроме того, создавая в “твёрдой” зоне концентраторы напряжений. На практике наблюдается что наличие вытянутых областей  $\alpha$  фазы титана увеличивает эффект. Так, в [17] были проведены эксперименты с двумя типами образцов из Timetal 834, подвергнутыми различной термической обработке. В случае первого типа, крупные зоны одинаковой ориентации имеют примерно одинаковый размер вдоль различных направлений и эффект небольшой. А в случае второго — крупные зоны одинаковой ориентации вытянуты вдоль направления приложения нагрузки, а снижение усталостной долговечности составляет 1-2 порядка вплоть до времени жизни  $\approx 4 \cdot 10^4$  циклов, где исчезает. Таким образом, экспериментально выяснено, что наличие вытянутых кластеров  $\alpha$ -фазы негативно сказывается на времени жизни, а укрупнение зёрен и создание “переплетённой” структуры длинных зёрен  $\alpha$  фазы в  $\beta$ -фазе (basket weave structure) — положительно.

Накопление повреждений в ходе циклической ползучести тоже может приводить к зависимости усталостной долговечности от частоты нагружения и наличия выдержек [26, 27]. Циклическая ползучесть сопровождается макроскопическими деформациями и обычно наблюдается при повышенных температурах. Физические механизмы ползучести меняются в зависимости от материала и температуры [28]. Низкие напряжения, высокая температура и длинные выдержки (или низкая скорость деформации) благоприятствуют механизму диффузионной ползучести Набарро – Херринга [29, 30], при которой диффузия вакансий и атомов происходит внутри зёрен, а также механизму диффузионной ползучести Кобла [31], при которой вакансии и атомы движутся вдоль границ зёрен. Высокие напряжения и высокая скорость деформации способствуют дислокационному механизму ползучести, при которой дислокации движутся консервативно в плоскости скольжения и в ортогональном к ней направлении диссипативным переползанием за счёт диффузии атомов [32].

В расчётах на усталостную долговечность влияние частоты и выдержек присутствует почти исключительно в контексте ползучести при повышенных температурах. Так, авторы работ [33, 34] линейно складывают склерономную повреждённость и повреждённость за счет ползучести. Однако в расчётах на усталость при комнатной температуре практически не встречается явный учёт частоты и выдержек. В отдельных исследованиях влияния частоты на усталостную долговечность предлагается способы его учета в расчетах. В [2] авторы связывают эффект частоты с чувствительностью деформационной диаграммы к скорости деформации. Они рассматривают соотношение Джонсона – Кука для предела текучести и предлагают считать, что количество циклов до разрушения зависит только от размаха пластической деформации. Тогда множитель, содержащий скорость деформации, увеличивает напряжение при постоянном размахе пластической деформации, что приводит к вертикальному смещению модельной кривой усталости вверх при увеличении частоты испытаний. Похожего подхода придерживаются и авторы [9] при учете эффекта частоты для низкоуглеродистой стали. Кривые усталости для частот 0.2-140 Гц почти совпадают если нормировать ординату к пределу текучести, зависящему от скорости деформации. Однако, кривая усталости для 20 кГц не приводится к остальным такой нормировкой, что может свидетельствовать о смене механизма накопления повреждений. Модели усталости, учитывающие выдержки, нам не известны.

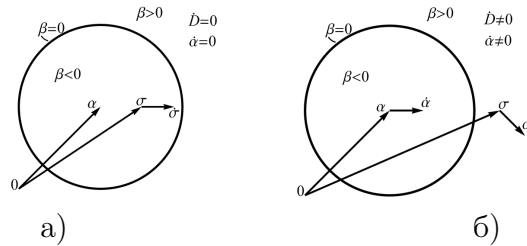
В работе [35] нами была предложена эволюционная модель усталостного разрушения, в которой рост повреждённости не зависит от скорости приложения нагрузки и наличия выдержек, а в [36] эта модель применена для расчёта усталостной долговечности диска компрессора высокого давления. В настоящей работе данная модель модифицируется для учета эффекта частоты и выдержек. Модель определяет накопление повреждённости по истории изменения тензора напряжений  $\sigma(t)$ ,  $t \geq 0$  в опасной точке, при этом не учитываются неупругие деформации. Также не предполагается зависимости механических свойств от накопленной повреждённости. Данная относительно простая несвязанная модель используется в расчетах в режиме постпроцессинга, когда после расчёта напряжений от рабочих нагрузок определяется опасная точка детали, для которой по истории изменения тензора напряжений определяется накопленная повреждённость и усталостная долговечность. Вследствие несвязанности и использования только истории напряжений в расчётах, модель применима при отсутствии значительных неупругих деформаций в течение цикла; малоцикловая усталость и накопление повреждений в ходе циклической ползучести лежат за рамками данной работы.

**2. Эволюционная модель усталостного разрушения** Предлагается модификация модели [35] для учёта скоростных эффектов

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{1}{\sigma_{-1}} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\| + g(I_1) - r(\|\boldsymbol{\alpha}\|) + w(\Delta\sigma_{\max}) + r_{dw} \right), \\
 \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \|\dot{\mathbf{s}}\| q(\beta) H(\beta) f(\vartheta) \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|}, \\
 \dot{D} &= \dot{D}_{sc} + \dot{D}_{dw}, \\
 \dot{D}_{sc} &= \frac{\|\dot{\mathbf{s}}\|}{\sigma_{-1}} p(\beta) H(\beta) f(\vartheta) \frac{1}{(1-F(\boldsymbol{\sigma}))^\omega}, \\
 \dot{D}_{dw} &= k_{dw} p(\beta) H(\beta) \frac{1}{(1-F(\boldsymbol{\sigma}))^\omega} \left( 1 - \frac{D_{dw}}{k_{dw}^{\max} D_{sc}} \right), \\
 \dot{r}_{dw} &= \left( \frac{r_0 - r_{dw}}{t_r} \right) - k_r \langle -(\sigma_{-1}\beta + r_0 - r_{dw}) \rangle,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\beta$  — внутренняя переменная, измеряющая опасность текущего уровня напряжений,  $\boldsymbol{\sigma}$  — симметричный тензор напряжений,  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}I_1\mathbf{I}$  — его девиатор,  $I_1 = \text{sp } \boldsymbol{\sigma}$  — его первый инвариант,  $\boldsymbol{\alpha}$  — симметричный тензор внутренних напряжений, определяющий центр поверхности выносливости,  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$  — евклидова норма симметричного тензора второго ранга  $\mathbf{A}$ ,  $\vartheta = \arccos(\dot{\mathbf{s}} : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) / (\|\dot{\mathbf{s}}\| \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|))$  — угол между тензорами  $\dot{\mathbf{s}}$  и  $\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}$  как векторами,  $D, D_{sc}, D_{dw}$  — параметр повреждённости, склерономная и реономная его части,  $r_{dw}$  — внутренний параметр,  $\Delta\sigma_{\max}(t) = \max_{t_1 < t_2 \leq t} (\|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)\|)$  — максимальный размах напряжений за предысторию,  $F(\boldsymbol{\sigma})$  — функция статической прочности:  $F(\boldsymbol{\sigma}) = 1, g, r, w, q, p$  — материальные функции,  $\omega, \hat{\omega}, k_{dw}, k_{dw}^{\max}, r_0, k_r, t_r$  — материальные константы,  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости при регулярном симметричном нагружении,  $H(x) = \{0, x < 0; 1, x \geq 0\}$  — функция Хевисайда,  $\langle x \rangle = \{0, x < 0; x, x \geq 0\}$  — скобки Маколея, точка обозначает производную по времени. Структура и математический смысл выражений (1) и входящих в него величин подробнее изложены ниже.

В основе данной модели лежит понятие поверхности выносливости в пространстве напряжений, задаваемой уравнением  $\beta = 0$  и имеющей центр симметрии. Пока напряжённое состояние лежит внутри поверхности ( $\beta \leq 0$ , рис. 1, а), параметр повреждённости  $D$  имеет постоянное значение, а когда напряжённое состояние выходит за её пределы ( $\beta > 0$ , рис. 1, б),  $D$  начинает расти. Поверхность выносливости может менять свой радиус и перемещаться как жесткое целое, приспособляясь к нагружению.



**Рис. 1.** Поверхность выносливости в пространстве напряжений

Скалярный параметр  $\beta$  является мерой опасности текущего уровня напряжений, от которой зависит текущая скорость накопления поврежденности и движение поверхности выносливости. Выражение для  $\beta$  в системе (1) имеет следующую структуру. Первое слагаемое определяет расстояние между центром поверхности выносливости  $\alpha$  и девиатором напряжений  $\mathbf{s}$  и описывает зависимость от девиаторной части напряженного состояния. Второе слагаемое учитывает вклад шаровой части напряженного состояния. Третье слагаемое задаёт радиус поверхности выносливости, который зависит от положения её центра  $\alpha$  в пространстве напряжений. Четвёртое слагаемое описывает сокращение радиуса поверхности выносливости при наличии циклов максимальной амплитуды. Последнее слагаемое  $r_{dw}$  моделирует эффект зависимости предела выносливости от частоты нагружения и наличия выдержек.

Движение поверхности выносливости как жесткого целого описывается эволюционным уравнением для  $\alpha$  в системе (1). В этом уравнении  $q(\beta) \geq 0$  есть материальная функция, задающая скорость движения поверхности выносливости в зависимости от  $\beta$ . Функция Хевисайда  $H(\beta)$  выполняет роль переключателя: пока напряженное состояние находится внутри поверхности выносливости, она неподвижна. Материальная функция  $0 \leq f(\vartheta) \leq 1$  определяет зависимость от угла  $\vartheta$  между векторами направления движения точки напряженного состояния в пространстве и ее положения относительно центра поверхности. Если эти направления совпадают, то  $f(0) = 1$ , а если они противоположно направлены, то  $f(\pi) = -1$ . Поверхность выносливости движется в направлении от ее центра к точке напряженного состояния, поскольку  $\dot{\alpha}$  пропорционально  $\mathbf{s} - \alpha$ . Наличие выдержек и частота не влияют на движение центра поверхности выносливости.

Поврежденность  $D$  состоит из склерономной  $D_{sc}$  и реономной  $D_{dw}$  частей. Склерономность обеспечивается дифференциальной линейностью эволюционного уравнения для  $D_{sc}$  в (1). По структуре оно отличается от уравнения для  $\dot{\alpha}$  только скалярностью и присутствием множителя с функцией  $F(\sigma)$ , с помощью которой записывается критерий статической прочности  $F(\sigma) = 1$ . Скорость роста склерономной части поврежденности зависит от расстояния от напряженного состояния до поверхности выносливости (регулируется материальной функцией  $p(\beta) \geq 0$ ) и направления изменения напряженного состояния (регулируется материальной функцией  $f(\vartheta)$ ). При приближении напряженного состояния к поверхности прочности, скорость роста поврежденности становится неограниченной.

Эволюционное уравнение реономной части поврежденности  $D_{dw}$  вдохновлена моделью КельвинаФойгта. В случае выдержки при постоянном напряжении  $D_{dw}$  будет (с постепенно понижающейся скоростью) увеличиваться до значения  $k_{dw}^{\max} D_{sc}$  (знаменатель внутри скобок в 5-й строке (1)). Это максимальное значение пропорционально  $D_{sc}$ , таким образом, накопленная на текущий момент склерономная поврежденность определяет возможность накопления реономной поврежденности. Константа  $k_{dw}$  задаёт скорость роста  $D_{dw}$  при выдержках,  $k_{dw}^{\max}$

определяет максимальный прирост  $D_{dw}$  за один цикл,  $\hat{\omega}$  регулирует увеличение эффекта выдержек при повышении уровня нагрузки.

Для моделирования эффекта зависимости предела выносливости от частоты нагрузки в выражении для  $\beta$  введён параметр  $r_{dw}$ . Предел выносливости постепенно снижается, пока напряжённое состояние находится вне поверхности выносливости. Константы  $r_0$  и  $t_{dw}$  отвечают за максимальное снижение предела выносливости и скорость его снижения соответственно, а параметр  $k_r$  — за скорость восстановления предела выносливости до его исходного значения, пока напряжённое состояние лежит внутри поверхности выносливости.

**3. Определение констант склерономной части модели** Материальные функции  $g(I_1)$  и  $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$  в выражении для  $\beta$  (1) можно идентифицировать по двум диаграммам Хейга зависимостей пределов выносливости при одноосном и сдвиговом нагружении от среднего напряжения в цикле. На первом этапе рассматривается регулярное сдвиговое нагружение со средним значением  $\tau_m$  и амплитудой  $\tau_a$ . Ненулевыми компонентами тензора напряжений являются  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ; вследствие (1) те же ненулевые компоненты  $\alpha_{12} = \alpha_{21}$  имеет и тензор  $\boldsymbol{\alpha}$ . Такое нагружение лежит на сдвиговой диаграмме Хейга, если максимальное  $\tau_{\max} = \tau_m + \tau_a$  и минимальное  $\tau_{\min} = \tau_m - \tau_a$  напряжения цикла лежат на поверхности выносливости  $\beta = 0$ . Подставив эти значения в уравнение  $\beta = 0$ , получим

$$\sqrt{3}(\tau_m + \tau_a - \alpha_0) - r(\sqrt{2}\alpha_0) = 0, \quad \sqrt{3}(-\tau_m + \tau_a + \alpha_0) - r(\sqrt{2}\alpha_0) = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha_0$  есть компонента  $\alpha_{12}$ , постоянная при таком нагружении, поскольку цикл целиком лежит внутри поверхности выносливости. Исключая  $\alpha_0$  из (2), получим выражение

$$\tau_a(\tau_m) = \frac{1}{\sqrt{3}}r(\sqrt{2}\tau_m) \quad \text{или} \quad r(x) = \sqrt{3}\tau_a(x/\sqrt{2}),$$

позволяющее определить функцию  $r(x)$  по сдвиговой диаграмме Хейга.

На втором этапе рассматривается регулярное одноосное нагружение со средним значением  $\sigma_m$  и амплитудой  $\sigma_a$ . Тензор напряжений имеет единственную ненулевую компоненту  $\sigma_{11}$ , откуда в силу (1) тензор  $\boldsymbol{\alpha}$  имеет ненулевые диагональные элементы  $\alpha_{11}$  и  $\alpha_{22} = \alpha_{33} = -\frac{1}{2}\alpha_{11}$ . Нагружение лежит на диаграмме Хейга, если максимальное  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$  и минимальное  $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$  напряжения цикла лежат на поверхности выносливости  $\beta = 0$ , подставляя которые в выражение для  $\beta$  и обозначая  $\alpha_{11}$  как  $\alpha_0$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_m + \sigma_a - \frac{3}{2}\alpha_0 - r\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_0\right) + g(\sigma_m + \sigma_a) &= 0, \\ -\sigma_m + \sigma_a + \frac{3}{2}\alpha_0 - r\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_0\right) + g(\sigma_m - \sigma_a) &= 0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда  $\alpha_0$ , будем иметь

$$\sigma_a + \frac{1}{2} \left( g(\sigma_m + \sigma_a) + g(\sigma_m - \sigma_a) - r \left( \frac{g(\sigma_m + \sigma_a) - g(\sigma_m - \sigma_a)}{\sqrt{6}} + 2\sigma_m \right) \right) = 0. \quad (3)$$



Если известна функция  $\sigma_a(\sigma_m)$ , задающая диаграмму Хейга для одноосного нагружения, то выражение (3) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно  $g(x)$ . Если заданной считать функцию  $g(x)$ , то выражение (3) будет определять неявную зависимость между  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$ . Если экспериментальная диаграмма Хейга задана в виде набора из  $n$  пар  $\{\sigma_m^i, \sigma_a^i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то функция  $g(x)$  параметризуется набором констант, задающих её форму. Она должна быть монотонно возрастающей, так как повышение  $I_1$  снижает усталостную прочность. При некотором конкретном наборе констант выражение (3) сопоставляет значениям  $\sigma_m^i$  значения  $\hat{\sigma}_a^i$ , отличающиеся от экспериментальных  $\sigma_a^i$ . Константы подбираются так, чтобы невязка между прогнозируемыми  $\hat{\sigma}_a^i$  и экспериментальными  $\sigma_a^i$  значениями становилась минимальной.

Функции в (3) ищутся в виде

$$g_1(x) = \text{sign}(x) \int_0^{|x|} \exp(-|\xi|^\kappa) d\xi,$$

$$g(I_1) = k_g I_1 - k_g c_g \left( g_1 \left( \frac{I_1 - I_0}{c_g} \right) - g_1 \left( \frac{-I_0}{c_g} \right) \right),$$

$$r_1(x) = \begin{cases} \tau_u - x - k_r (\tau_u - x)^\gamma & x \geq \tau_u - c_r \\ \tau_{-1} & x < \tau_u - c_r \end{cases}, \quad (4)$$

$$r(\|\boldsymbol{\alpha}\|) = \sqrt{3} r_1(\|\boldsymbol{\alpha}\|/\sqrt{2}),$$

$$k_r = \frac{1}{\gamma c_r^{\gamma-1}}, \quad \gamma = \frac{c_r}{c_r - \tau_{-1}},$$

где  $\kappa$ ,  $k_g$ ,  $c_g$ ,  $I_0$  — константы функции  $g(I_1)$ ,  $c_r$  — константа функции  $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$ ,  $\tau_u$  — предел прочности на сдвиг,  $\tau_{-1}$  — предел выносливости при симметричном сдвиговом циклическом нагружении. Функции вида (4) хорошо описывают диаграммы Хейга для разнообразных материалов [37].

Модель идентифицирована для  $\alpha - \beta$  титанового сплава Ti-6Al-4V в условиях комнатной температуры по экспериментальным данным [38]. Ввиду отсутствия сдвиговой диаграммы Хейга для данного материала была использована кривая типичной для металлов формы: с постоянным  $\tau_a$  при небольших  $\tau_m$  и спадом к статическому пределу прочности, для данного материала равному  $\tau_u = 680$  МПа. Предел выносливости на сдвиг при симметричном циклическом нагружении был принят  $\tau_{-1} = 0.5\sigma_{-1}$  [37]. Модельная диаграмма Хейга в сравнении с экспериментальными данными приведена на рис. 2. Графики материальных функций  $g(I_1)$ ,  $r(\|\boldsymbol{\alpha}\|)$  изображены на рис. 3, а входящие в них их константы приведены в табл. 1.

$\kappa$	$k_g$	$c_g$ , МПа	$I_0$ , МПа	$c_r$ , МПа
0.867	0.527	516	752	401

**Таблица 1.** Материальные константы функций  $g$  и  $r$

Используется критерий прочности Шлейхера

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} - a_1 I_1 - a_2 I_1^2}{a_0} = 1.$$

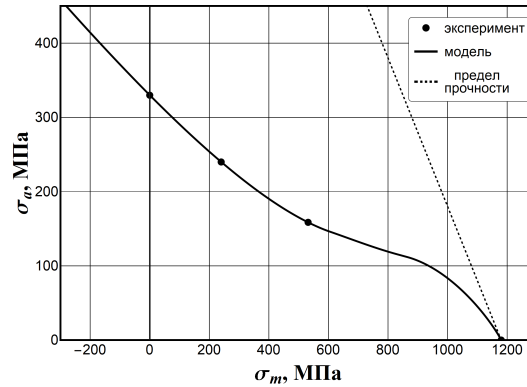


Рис. 2. Диаграмма Хейга для сплава Ti-6Al-4V

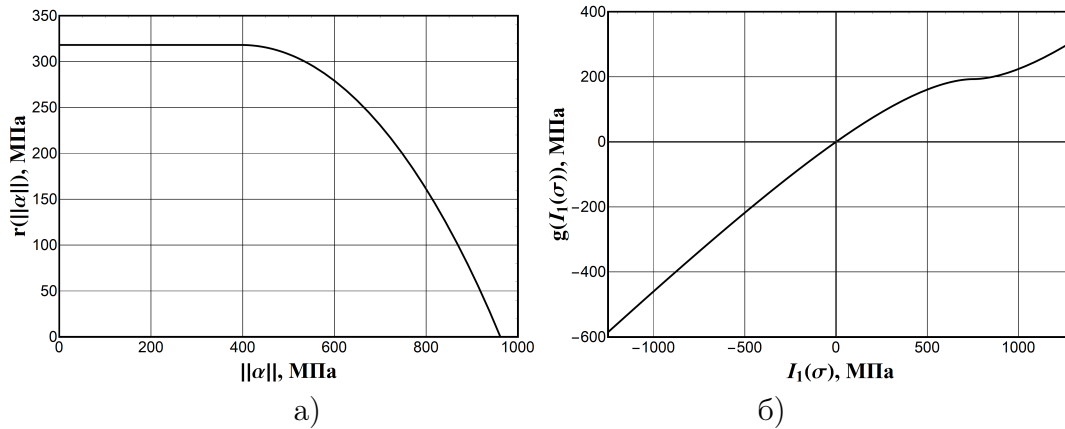


Рис. 3. Материальные функции  $r(\|\alpha\|)$  (а) и  $g(I_1)$  (б) для сплава Ti-6Al-4V

Входящие в него константы  $a_i$  выражаются через пределы прочности на растяжение  $\sigma_{tu}$ , сжатие  $\sigma_{cu} > 0$  и сдвиг  $\tau_u$ :

$$a_0 = 3\tau_u, \quad a_1 = -3\tau_u \frac{\sigma_{cu} - \sigma_{tu}}{\sigma_{cu}\sigma_{tu}}, \quad a_2 = \frac{3\tau_u}{\sigma_{cu}\sigma_{tu}} - 1.$$

Для сплава Ti-6Al-4V  $\sigma_{tu} = 1180$  МПа,  $\sigma_{cu} = 1240$  МПа,  $\tau_u = 680$  МПа. Оставшиеся в (1) материальные функции взяты в виде:

$$\begin{aligned} w(x) &= k_1 \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}b_1 \ln \left( \frac{\cosh(5(1-x/b_1))}{\cosh(5)} \right) \right), \\ q(\beta) &= k_2\beta^{l_1} + b_2, \\ p(\beta) &= k_3 (\exp(l_2\beta) - (1 - b_3)), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $k_1, k_2, k_3, b_1, b_2, b_3, l_1, l_2$  — материальные константы.

Функция  $w(x)$  представляет собой сглаженную кусочно-линейную функцию, принимающую значение 0 при  $x \leq b_1$  и имеющую наклон  $k_1$  при  $x > b_1$ .

Материальная функция  $f(\vartheta)$  отвечает за накопление  $D_{sc}$  в зависимости от сложности траектории движения точки напряжённого состояния в пространстве напряжений. Она имеет вид

$$f_0(x) = 1 - \operatorname{erf}\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}l_4\right)\right), \quad f(\vartheta) = \frac{f_0(\pi) - f_0(\vartheta)}{f_0(\pi) - f_0(0)}$$

и содержит одну материальную константу  $l_4$ , определяемую из экспериментов на несинфазное многоосное нагружение. В рамках данной статьи рассматривается только пропорциональные нагружения одноосным растяжением и сдвигом, поэтому значение  $l_4$  не влияет на результат.

**4. Определение констант реономной части модели.** Далее определяются константы  $k_1, k_2, k_3, b_1, b_2, b_3, l_1, l_2$ , входящие в функции (5), а также констант  $k_{dwell}, t_{dwell}, \hat{\omega}, r_0, t_r, k_r$  (1) и  $\omega$ , отвечающие за эффект частоты и выдержек. Для этого использованы экспериментальные данные а) испытаний плоских образцов из сплава Тi-6Al-4V на одноосное растяжение по синусоидальной программе с частотой 30 Гц с  $R = -1; 0; 0.54$  (рис. 4, а, [38]), б) испытаний цилиндрических образцов из сплава ВТ6 на одноосное растяжение с  $R = 0$  по программе с треугольными циклами и частотой 1 Гц и в) аналогичных испытаний по программе с трапецеидальными циклами с выдержкой 120 с при максимальном напряжении (рис. 4, б, выполнено в ПНИПУ). Невязка записывалась как

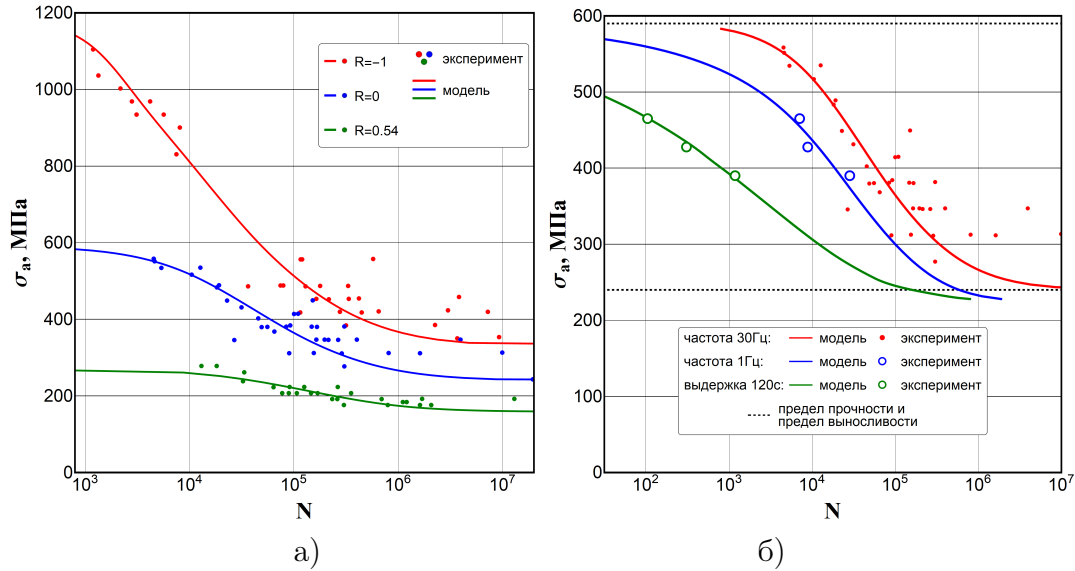
$$X = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\ln(N_i)}{\ln(N_i^{\text{exp}})}\right)^2, \quad (6)$$

где  $N_i^{\text{exp}}$  есть экспериментальное значение числа циклов до разрушения в  $i$ -й точке диаграммы Вёлера,  $N_i$  — прогноз по эволюционной модели при том же нагружении,  $n$  — общее число экспериментальных точек, использованных в невязке. Набор констант, минимизирующих невязку (6) приведён в табл. 2. Экспериментальные данные и их аппроксимации кривыми Вёлера приведены на рис. 4.

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$b_1$ , МПа	$b_2$	$b_3$	$l_1$	$l_2$	$\omega$
0.176	0.077	$10^{-5.04}$	3033	0.0376	0.331	6.99	1.28	1.74
$k_{dw}, c^{-1}$	$k_{dw}^{\max}$	$\hat{\omega}$	$r_0$ , МПа	$t_r$	$k_r$			
1.01	274	3.48	33	0.24	1			

**Таблица 2.** Материальные константы, входящие в уравнения (1), (5)

**5. Расчёт усталостной долговечности на полётном цикле** Модель (1) использована для расчёта усталостной прочности детали газотурбинного двигателя на полётном цикле. Истории изменения напряжений в течение полётного цикла в опасной точке форсунки приведено на рис. 5, а. На рис. 5, б приведена схематизация этой истории методом дождя по ГОСТ 25.101-83,



**Рис. 4.** Кривые усталости сплава Ti-6Al-4V и их аппроксимации для испытаний: а) при различных  $R$  и частоте 30 Гц, б) при различных частотах и с выдержками при  $R = 0$

согласно которому в расчётах на усталость принимается во внимание лишь выборка минимумов и максимумов нагрузки без учета из последовательности, а выдержки не учитываются.

Материальные константы модели для  $\alpha - \beta$  титанового сплава Ti-6Al-4V (ВТ6) в условиях комнатной температуры приведены в табл. 1, 2. Оценка числа полётных циклов до разрушения для истории рис. 4, а составила  $N = 22$ , тогда как при отсутствии учета накопления реономной составляющей повреждённости  $N = 4445$ , что соответствует расчету по схематизированной диаграмме методом суммирования поврежденности с использованием кривой усталости для частоты 30 Гц. Накопление склерономной и реономной частей поврежденности во время полётного цикла приведено на рис. 6. Подавляющую часть общей поврежденности составляет реономная часть, которая накапливается во время выдержек при максимальном напряжении в цикле.

**6. Заключение.** В эволюционной модели накопления усталостной поврежденности, последняя является функционалом изменения напряжения от времени в локальном объеме, не связанным с пластическими деформациями. Представлено обобщение этой модели для учета реономных эффектов зависимости циклической долговечности от частоты нагружения и выдержек при постоянном напряжении в цикле. Определены материальные константы модели для двухфазного титанового сплава ВТ6 (аналога Ti-6Al-4V), проявляющего холодную ползучесть — чувствительность усталостных свойств к временным

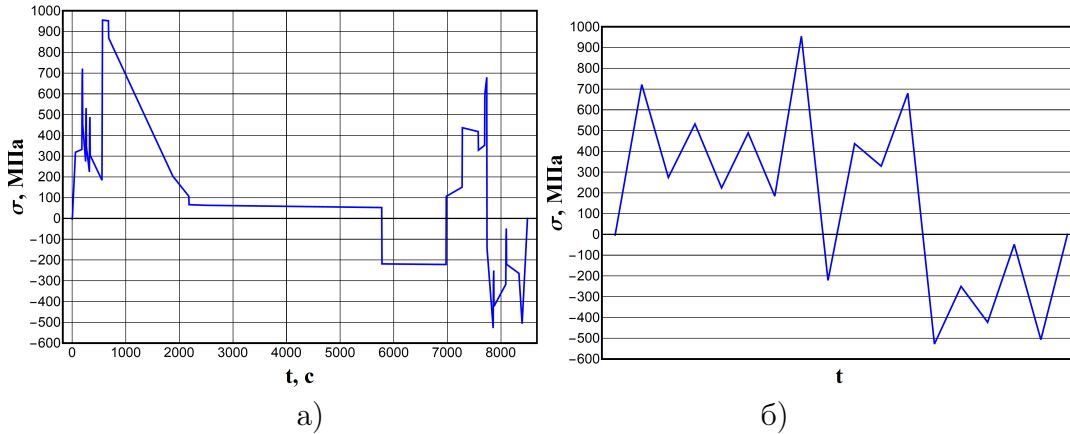


Рис. 5. История изменения напряжений в течение полётного цикла (а) и схематизация этой истории по методу дождя (б)

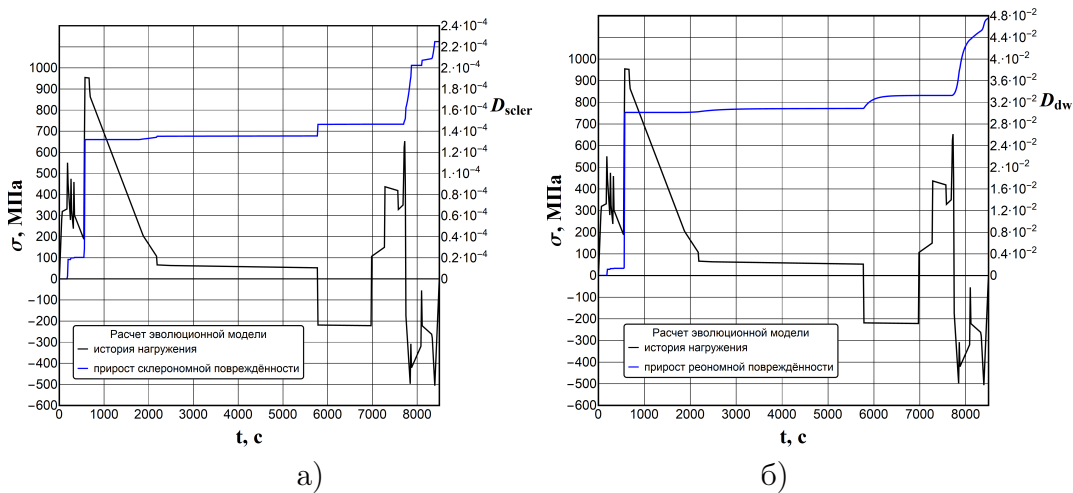


Рис. 6. Накопление повреждённости в течение полётного цикла: склерономная (а) и резонанная (б) части повреждённости

характеристикам циклического нагружения в условиях комнатной температуры. Используются новые данные усталостных испытаний с различными частотами и с выдержками в циклах. Показано, что модель может корректно описывать эти данные, а также прогнозировать усталостную долговечность для более широкого диапазона условий нагружения. Выполнен расчет усталостной долговечности детали газотурбинного двигателя на полетных циклах, содержащих выдержки при максимальном и промежуточных значениях напряжения в цикле, показавший существенную неконсервативность расчета усталостной долговечности методом схематизации программы нагружения в рамках гипотезы линейного суммирования поврежденности.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Авторы внесли равный вклад в проведение исследований и написание рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Пермского края № 24-29-20148.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** The authors made an equal contribution to the research and writing of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This research was funded by a grant from the Russian Science Foundation and the Perm Krai, No. 24-29-20148.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Fatigue testing with high frequency cycling / V. A. Kuzmenko [et al.] ; ed. by V. A. Kuzmenko. – Kiev : Naukova Dumka, 1979. – 336 p. – In Russian.
2. Dynamic frequency-dependent fatigue damage in metals: A state-of-the-art review / K. Tahmasbi [et al.] // *Forces in Mechanics*. – 2023. – Vol. 10. – DOI: 10.1016/j.finmec.2023.100167.
3. *Organ F. E., Gell M.* The effect of frequency on the elevated temperature fatigue of a nickel-base superalloy // *Metall. Trans.* – 1971. – Vol. 2. – P. 943–952. – DOI: 10.1007/BF02664223.
4. Effect of the loading frequency on fatigue properties of JIS S15C low carbon steel and some discussions based on micro-plasticity behavior / B. Guennec [et al.] // *Int. J. Fatigue*. – 2014. – Vol. 66. – P. 29–38. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2014.03.005.
5. *Morrissey R. J., McDowell D. L., Nicholas T.* Frequency and stress ratio effects in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V // *Int. J. Fatigue*. – 1999. – Vol. 21, no. 7. – P. 679–685. – DOI: 10.1016/S0142-1123(99)00030-4.
6. *Sharma A., Oh M. C., Ahn B.* Recent Advances in Very High Cycle Fatigue Behavior of Metals and Alloys — A Review // *Metals*. – 2020. – Vol. 10, no. 9. – DOI: 10.3390/met10091200.
7. A Brief Review of the Application and Problems in Ultrasonic Fatigue Testing / W. Peng [et al.] // *AASRI Procedia*. – 2012. – Vol. 2. – P. 127–133. – DOI: 10.1016/j.aasri.2012.09.024.
8. Influence of loading frequency on high cycle fatigue properties of B.C.C. and H.C.P. Metals / M. Papakyriacou [et al.] // *Mater. Sci. Eng., A*. – 2001. – Vol. 308, no. 1/2. – P. 143–152. – DOI: 10.1016/S0921-5093(00)01978-X.
9. *Tsutsumi N., Murakami Y., Doquet V.* Effect of test frequency on fatigue strength of low carbon steel // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2009. – Vol. 32, no. 6. – P. 473–483. – DOI: 10.1111/j.1460-2695.2009.01350.x.
10. Effects of strength level and loading frequency on very-high-cycle fatigue behavior for a bearing steel / A. Zhao [et al.] // *Int. J. Fatigue*. – 2012. – Vol. 38. – P. 46–56. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2011.11.014.

11. *Bache M. R.* A review of dwell sensitive fatigue in titanium alloys: the role of microstructure, texture and operating conditions // *Int. J. Fatigue.* – 2003. – Vol. 25. – P. 1079–1087. – DOI: 10.1016/S0142-1123(03)00145-2.
12. Predicting dwell fatigue life in titanium alloys using modelling and experiment / *Y. Xu [et al.]* // *Nat. Commun.* – 2020. – Vol. 11. – P. 58–68. – DOI: 10.1038/s41467-020-19470-w.
13. Recent developments in cold dwell fatigue of titanium alloys for aero-engine applications: A review / *Z. Wu [et al.]* // *J. Mater. Res. Technol.* – 2022. – Vol. 20. – P. 469–484. – DOI: 10.1016/j.jmrt.2022.07.094.
14. *Eylon D., Hall J. A.* Fatigue behavior of beta processed titanium alloy IMI 685 // *Metall. Trans. A.* – 1977. – Vol. 8. – P. 981–990. – DOI: 10.1007/BF02661583.
15. *Evans W. J., Gostelow C. R.* The effect of hold time on the fatigue properties of a  $\beta$ -processed titanium alloy // *Metall. Trans. A.* – 1979. – Vol. 10. – P. 1837–1846. – DOI: 10.1007/BF02811727.
16. *Bureau d'Enquêtes et d'Analyses (BEA).* Investigation report: Accident to the AIRBUS A380-861 30.09.2017 : tech. rep. – 09/2020. – P. 85. – BEA2017-0568.en.
17. Dwell sensitive fatigue in a near alpha titanium alloy at ambient temperature / *M. R. Bache [et al.]* // *Int. J. Fatigue.* – 1997. – Vol. 19, no. 93. – P. 83–88. – DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00020-0.
18. *Wang F., Cui W.* Experimental investigation on dwell-fatigue property of Ti-6Al-4V ELI used in deep-sea manned cabin // *Mater. Sci. Eng., A.* – 2015. – Vol. 642. – P. 136–141. – DOI: 10.1016/j.msea.2015.06.089.
19. Dwell fatigue and cycle deformation of CP-Ti at ambient temperature / *J. Peng [et al.]* // *Mater. Des.* – 2015. – Vol. 71. – P. 1–16. – DOI: 10.1016/j.matdes.2015.01.007.
20. *Dutton R.* A review of the low-temperature creep behaviour of titanium : tech. rep. / AECL Whiteshell Laboratories. – Pinawa, MB, Canada, 1996. – P. 59.
21. *Zhang Z., Cuddihy M. A., Dunne F. P. E.* On rate-dependent polycrystal deformation: the temperature sensitivity of cold dwell fatigue // *Proc. R. Soc. A.* – 2015. – Vol. 471. – DOI: 10.1098/rspa.2015.0214.
22. *Luetjering G., Williams J. C.* Titanium. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. – DOI: 10.1007/978-3-540-73036-1.
23. *Ozturk D., Shahba A., Ghosh S.* Crystal plasticity FE study of the effect of thermo-mechanical loading on fatigue crack nucleation in titanium alloys // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2016. – Vol. 9, no. 6. – P. 752–769. – DOI: 10.1111/ffe.12410.
24. Cyclic plasticity and thermomechanical alleviation in titanium alloys / *Y. Xu [et al.]* // *Int. J. Plasticity.* – 2020. – Vol. 134. – P. 102753. – DOI: 10.1016/j.ijplas.2020.102753.
25. *Zarkardes A., Larson F. R.* Elasticity of Titanium Alloys // *The Science Technology and Application of Titanium Alloys. Proc. Int. Conf., London, 21–24 May 1968* / ed. by R. I. Jaffee, N. E. Promisel. – 1970. – P. 933–944.
26. Crack growth micro-mechanisms in the IN718 alloy under the combined influence of fatigue, creep and oxidation / *D. G. Leo Prakash [et al.]* // *Int. J. Fatigue.* – 2009. – Vol. 31, no. 11/12. – P. 1966–1977. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2009.01.023.

27. Hold-time effects on elevated-temperature low-cycle-fatigue and crack-propagation behaviors of HAYNES 188 superalloy / S. Lee [et al.] // *J. Mater. Sci.* – 2009. – Vol. 44. – P. 2945–2956. – DOI: 10.1007/s10853-009-3391-1.
28. Assessment of creep-fatigue behavior, deformation mechanisms, and microstructural evolution of alloy 709 under accelerated conditions / T. D. Porter [et al.] // *Int. J. Fatigue.* – 2019. – Vol. 124. – P. 205–216. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2019.02.037.
29. *Nabarro F. R. N.* Deformation of Crystals by the Motion of Single Lonsin // Report of a Conference on the Strength of Solids (Bristol, U.K.) – Physical Society, London, 1948. – P. 75–90.
30. *Herring C.* Diffusional Viscosity of a Polycrystalline Solid // *J. Appl. Phys.* – 1950. – Vol. 21, no. 5. – P. 437–445. – DOI: 10.1063/1.1699681.
31. *Coble R. L.* A Model for Boundary Diffusion Controlled Creep in Polycrystalline Materials // *J. Appl. Phys.* – 1962. – Vol. 34, no. 6. – P. 1679–1682. – DOI: 10.1063/1.1702656.
32. *Weertman J. R.* Theory of Steady-State Creep Based on Dislocation Climb // *J. Appl. Phys.* – 1955. – Vol. 26. – P. 1213–217. – DOI: 10.1063/1.1721875.
33. *Byrne J., Hall R., Grabowski L.* Elevated temperature fatigue crack growth under dwell conditions in Waspaloy // *Int. J. Fatigue.* – 1997. – Vol. 19, no. 5. – P. 359–367. – DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00056-X.
34. A new creep-fatigue crack growth model and a correlation of the creep-fatigue crack growth rate with unified constraint parameter / R.-S. Lu [et al.] // *Int. J. Fatigue.* – 2023. – Vol. 166. – P. 107248. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107248.
35. *Petukhov D. S., Keller I. E.* Evolutionary Model of Fatigue Fracture under Irregular Loading // *Mechanics of Solids.* – 2022. – Vol. 57, no. 2. – P. 263–270. – DOI: 10.3103/S0025654422020194.
36. *Petukhov D. S., Dudin D. S., Keller I. E.* Method of calculating the fatigue life of parts under the non-regular loading in the presence of surface residual stresses // *Izvestiya VUZov. Mashinostroenie [Universities Proceedings. Mechanical Engineering]*. – 2025. – 1 (778). – C. 3–20. – In Russian.
37. *Forrest P. G.* *Fatigue of Metals.* – Oxford : Pergamon Press, 1962. – 425 p.
38. *Metallic Materials Properties Development and Standardization* : tech. rep. / R. Rice [et al.] ; U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration. – Washington, D.C., 01/2003. – P. 1728. – DOT/FAA/AR-MMPDS-01.

## REFERENCES

1. Fatigue testing with high frequency cycling / V. A. Kuzmenko [и др.] ; под ред. V. A. Kuzmenko. – Kiev : Naukova Dumka, 1979. – 336 с. – In Russian.
2. Dynamic frequency-dependent fatigue damage in metals: A state-of-the-art review / K. Tahmasbi [et al.] // *Forces in Mechanics.* – 2023. – Vol. 10. – DOI: 10.1016/j.finmec.2023.100167.
3. *Organ F. E., Gell M.* The effect of frequency on the elevated temperature fatigue of a nickel-base superalloy // *Metall. Trans.* – 1971. – Vol. 2. – P. 943–952. – DOI: 10.1007/BF02664223.
4. Effect of the loading frequency on fatigue properties of JIS S15C low carbon steel and some discussions based on micro-plasticity behavior / B. Guennec [et al.] //



- Int. J. Fatigue. – 2014. – Vol. 66. – P. 29–38. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2014.03.005.
5. *Morrissey R. J., McDowell D. L., Nicholas T.* Frequency and stress ratio effects in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V // Int. J. Fatigue. – 1999. – Vol. 21, no. 7. – P. 679–685. – DOI: 10.1016/S0142-1123(99)00030-4.
  6. *Sharma A., Oh M. C., Ahn B.* Recent Advances in Very High Cycle Fatigue Behavior of Metals and Alloys — A Review // Metals. – 2020. – Vol. 10, no. 9. – DOI: 10.3390/met10091200.
  7. A Brief Review of the Application and Problems in Ultrasonic Fatigue Testing / W. Peng [et al.] // AASRI Procedia. – 2012. – Vol. 2. – P. 127–133. – DOI: 10.1016/j.aasri.2012.09.024.
  8. Influence of loading frequency on high cycle fatigue properties of B.C.C. and H.C.P. Metals / M. Papakyriacou [et al.] // Mater. Sci. Eng., A. – 2001. – Vol. 308, no. 1/2. – P. 143–152. – DOI: 10.1016/S0921-5093(00)01978-X.
  9. *Tsutsumi N., Murakami Y., Doquet V.* Effect of test frequency on fatigue strength of low carbon steel // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2009. – Vol. 32, no. 6. – P. 473–483. – DOI: 10.1111/j.1460-2695.2009.01350.x.
  10. Effects of strength level and loading frequency on very-high-cycle fatigue behavior for a bearing steel / A. Zhao [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2012. – Vol. 38. – P. 46–56. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2011.11.014.
  11. *Bache M. R.* A review of dwell sensitive fatigue in titanium alloys: the role of microstructure, texture and operating conditions // Int. J. Fatigue. – 2003. – Vol. 25. – P. 1079–1087. – DOI: 10.1016/S0142-1123(03)00145-2.
  12. Predicting dwell fatigue life in titanium alloys using modelling and experiment / Y. Xu [et al.] // Nat. Commun. – 2020. – Vol. 11. – P. 58–68. – DOI: 10.1038/s41467-020-19470-w.
  13. Recent developments in cold dwell fatigue of titanium alloys for aero-engine applications: A review / Z. Wu [et al.] // J. Mater. Res. Technol. – 2022. – Vol. 20. – P. 469–484. – DOI: 10.1016/j.jmrt.2022.07.094.
  14. *Eylon D., Hall J. A.* Fatigue behavior of beta processed titanium alloy IMI 685 // Metall. Trans. A. – 1977. – Vol. 8. – P. 981–990. – DOI: 10.1007/BF02661583.
  15. *Evans W. J., Gostelow C. R.* The effect of hold time on the fatigue properties of a  $\beta$ -processed titanium alloy // Metall. Trans. A. – 1979. – Vol. 10. – P. 1837–1846. – DOI: 10.1007/BF02811727.
  16. *Bureau d'Enquêtes et d'Analyses (BEA).* Investigation report: Accident to the AIRBUS A380-861 30.09.2017 : tech. rep. – 09/2020. – P. 85. – BEA2017-0568.en.
  17. Dwell sensitive fatigue in a near alpha titanium alloy at ambient temperature / M. R. Bache [et al.] // Int. J. Fatigue. – 1997. – Vol. 19, no. 93. – P. 83–88. – DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00020-0.
  18. *Wang F., Cui W.* Experimental investigation on dwell-fatigue property of Ti-6Al-4V ELI used in deep-sea manned cabin // Mater. Sci. Eng., A. – 2015. – Vol. 642. – P. 136–141. – DOI: 10.1016/j.msea.2015.06.089.
  19. Dwell fatigue and cycle deformation of CP-Ti at ambient temperature / J. Peng [et al.] // Mater. Des. – 2015. – Vol. 71. – P. 1–16. – DOI: 10.1016/j.matdes.2015.01.007.
  20. *Dutton R.* A review of the low-temperature creep behaviour of titanium : tech. rep. / AECL Whiteshell Laboratories. – Pinawa, MB, Canada, 1996. – P. 59.

21. Zhang Z., Cuddihy M. A., Dunne F. P. E. On rate-dependent polycrystal deformation: the temperature sensitivity of cold dwell fatigue // Proc. R. Soc. A. – 2015. – Vol. 471. – DOI: 10.1098/rspa.2015.0214.
22. Luetjering G., Williams J. C. Titanium. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. – DOI: 10.1007/978-3-540-73036-1.
23. Ozturk D., Shahba A., Ghosh S. Crystal plasticity FE study of the effect of thermo-mechanical loading on fatigue crack nucleation in titanium alloys // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2016. – Vol. 9, no. 6. – P. 752–769. – DOI: 10.1111/ffe.12410.
24. Cyclic plasticity and thermomechanical alleviation in titanium alloys / Y. Xu [et al.] // Int. J. Plasticity. – 2020. – Vol. 134. – P. 102753. – DOI: 10.1016/j.ijplas.2020.102753.
25. Zarkardes A., Larson F. R. Elasticity of Titanium Alloys // The Science Technology and Application of Titanium Alloys. Proc. Int. Conf., London, 21–24 May 1968 / ed. by R. I. Jaffee, N. E. Promisel. – 1970. – P. 933–944.
26. Crack growth micro-mechanisms in the IN718 alloy under the combined influence of fatigue, creep and oxidation / D. G. Leo Prakash [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2009. – Vol. 31, no. 11/12. – P. 1966–1977. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2009.01.023.
27. Hold-time effects on elevated-temperature low-cycle-fatigue and crack-propagation behaviors of HAYNES 188 superalloy / S. Lee [et al.] // J. Mater. Sci. – 2009. – Vol. 44. – P. 2945–2956. – DOI: 10.1007/s10853-009-3391-1.
28. Assessment of creep-fatigue behavior, deformation mechanisms, and microstructural evolution of alloy 709 under accelerated conditions / T. D. Porter [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2019. – Vol. 124. – P. 205–216. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2019.02.037.
29. Nabarro F. R. N. Deformation of Crystals by the Motion of Single Lonsin // Report of a Conference on the Strength of Solids (Bristol, U.K.) – Physical Society, London, 1948. – P. 75–90.
30. Herring C. Diffusional Viscosity of a Polycrystalline Solid // J. Appl. Phys. – 1950. – Vol. 21, no. 5. – P. 437–445. – DOI: 10.1063/1.1699681.
31. Coble R. L. A Model for Boundary Diffusion Controlled Creep in Polycrystalline Materials // J. Appl. Phys. – 1962. – Vol. 34, no. 6. – P. 1679–1682. – DOI: 10.1063/1.1702656.
32. Weertman J. R. Theory of Steady-State Creep Based on Dislocation Climb // J. Appl. Phys. – 1955. – Vol. 26. – P. 1213–1217. – DOI: 10.1063/1.1721875.
33. Byrne J., Hall R., Grabowski L. Elevated temperature fatigue crack growth under dwell conditions in Waspaloy // Int. J. Fatigue. – 1997. – Vol. 19, no. 5. – P. 359–367. – DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00056-X.
34. A new creep-fatigue crack growth model and a correlation of the creep-fatigue crack growth rate with unified constraint parameter / R.-S. Lu [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2023. – Vol. 166. – P. 107248. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107248.
35. Petukhov D. S., Keller I. E. Evolutionary Model of Fatigue Fracture under Irregular Loading // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 57, no. 2. – P. 263–270. – DOI: 10.3103/S0025654422020194.
36. Petukhov D. S., Dudin D. S., Keller I. E. Method of calculating the fatigue life of parts under the non-regular loading in the presence of surface residual

- stresses // Izvestiya VUZov. Mashinostroenie [Universities Proceedings. Mechanical Engineering]. – 2025. – 1 (778). – С. 3–20. – In Russian.
37. *Forrest P. G.* Fatigue of Metals. – Oxford : Pergamon Press, 1962. – 425 p.
  38. Metallic Materials Properties Development and Standardization : tech. rep. / R. Rice [et al.] ; U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration. – Washington, D.C., 01/2003. – P. 1728. – DOT/FAA/AR-MMPDS-01.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ГЕМИТРОПНОГО МИКРОПОЛЯРНОГО ТЕЛА

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва, Россия*

**Аннотация.** В настоящем исследовании предлагается алгоритм получения аппроксимации пятого порядка потенциала силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, учитывающего (кроме базовой квадратичной аппроксимации) поправки вплоть до пятого алгебраического порядка, при систематическом использовании теории алгебраических инвариантов. С этой целью обсуждается полный перечень неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. В результате предложен исходный набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных троек и 17 инвариантных четверок. Здесь классификация проведена по количеству тензорных литер (максимальное число литер равно 4). Максимальная степень исходных инвариантов равна 6. Из 86 элементов затем отфильтрованы 63 следа по правилу возрастания алгебраических степеней инвариантов: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических, 19 четвертой степени, 24 инварианта пятой степени. Предложена схема построения инвариантов пятой степени, разбитых для удобства по семи группам, на основе правил: произведения линейных инвариантов между собой, попарные произведения квадратичных и кубических инвариантов между собой, попарные произведения инвариантов первой и четвертой степени, произведения линейных и кубических инвариантов, произведения линейных, возведенных в куб, и квадратичных инвариантов, произведения линейных и квадратов квадратичных инвариантов, исходные инварианты пятой степени. Таким образом, гемитропный микрополярный потенциал определяется с помощью 366 механических модулей. Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие поправки второй, третьей и четвертой алгебраической степени, справедливые в произвольной криволинейной системе координат.

**Ключевые слова:** наномасштаб, микромасштаб, энергетическая форма, целочисленный рациональный алгебраический инвариант, неприводимая система инвариантов, кубическая аппроксимация, гемитропное микрополярное упругое тело

**Мурашкин Евгений Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Радаев Юрий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



**для цитирования:** Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном алгоритме аппроксимации энергетической формы гемитропного микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 282–300. DOI: 10.37972/chgru.2025.64.2.015. EDN: SJOURE

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

## ON AN ALGORITHM FOR APPROXIMATING ENERGY FORM OF A HEMITROPIC MICROPOLAR SOLID

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** This study deals with an algorithm for deriving a quintic-order approximation of the potential for force and moment stresses in a hemitropic micropolar elastic solid. The formulation accounts for corrections up to the fifth algebraic order—extending beyond the fundamental quadratic approximation through the systematic application of algebraic invariant theory.

To this end, the complete set of irreducible invariants for a system of two asymmetric second-rank tensors is discussed and represented in the form of invariant traces. Consequently, an initial set of 86 invariant traces is proposed, comprising 8 single invariants, 17 dual combinations, 44 invariant triples, and 17 invariant quadruples. This classification is based on the number of tensor literals involved, with a maximum of four literals. The maximum degree of the initial invariants is six.

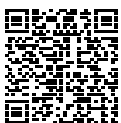
From these 86 elements, 63 traces are subsequently selected according to the rule of increasing algebraic degree: 2 linear invariants, 6 quadratic, 12 cubic, 19 of the fourth degree, and 24 invariants of the fifth degree. A scheme for obtaining the fifth-degree invariants is introduced, partitioned for convenience into seven groups based on the following rules: products of linear invariants with each other, pairwise products of quadratic and cubic invariants, pairwise products of first- and fourth-degree invariants, products of linear and cubic invariants, products of linear invariants raised to the third power with quadratic invariants, products of linear invariants with squares of quadratic invariants, and the original fifth-degree invariants.

Thus, the hemitropic micropolar potential is characterized by 366 mechanical moduli. Constitutive equations for force and couple stresses are derived, incorporating second-, third-, and fourth-order algebraic corrections, and are formulated to be valid in an arbitrary curvilinear coordinate system.

**Keywords:** algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, energy form, integer rational algebraic invariant, irreducible system of invariants, cubic approximation, hemitropic micropolar elastic solid

**Evgenii V. Murashkin**, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** [evmurashkin@gmail.ru](mailto:evmurashkin@gmail.ru); <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Yuri N. Radayev**, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru); <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



**to cite this article:** *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On an algorithm for approximating energy form of a hemitropic micropolar solid // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 282–300. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.015

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.**

**Вводные замечания.** При построении определяющих уравнений в механике континуума исключительное значение имеет теория рациональных алгебраических инвариантов [1–6]. Инварианты и псевдоинварианты позволяют без труда сформулировать аппроксимации заданной степени для энергетических потенциалов силовых и моментных напряжений в микрополярной механике упругих тел [7–18]. В особенности это справедливо при построении математических моделей гемитропных микрополярных упругих сред. В этом случае, наиболее подходящим является А-представление [17, 18] энергетических форм, являющееся линейной комбинацией индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов асимметричного тензора деформаций и градиента поля микроповоротов относительно гемитропной группы преобразований.

Основным понятием теории алгебраических инвариантов является индивидуальный инвариант (псевдоинвариант) тензора (псевдотензора) [1, с. С. 136]. При этом, если алгебраический вес  $g$  инварианта равен нулю, то инвариант носит название абсолютного инварианта, а при  $g \neq 0$  — относительного или псевдоинварианта. Инварианты тензора можно задавать несколькими способами [1, с. С. 327]. Например, для аффинора  $A_{\cdot s}^{\cdot k}$ , следы его степеней будут образовывать бесконечную систему целых рациональных инвариантов:

$$S_1 = A_{\cdot s}^{\cdot s}, \quad S_2 = A_{\cdot s}^{\cdot k} A_{\cdot k}^{\cdot s}, \quad S_3 = A_{\cdot s}^{\cdot k} A_{\cdot k}^{\cdot l} A_{\cdot l}^{\cdot s}, \quad \dots \quad (1)$$

С другой стороны, важную роль играют также следующие инварианты:

$$I_1 = A_{\cdot s}^{\cdot s}, \quad I_2 = A_{[s \cdot}^{\cdot k} A_{\cdot k]}^{\cdot s}, \quad I_3 = A_{[s \cdot}^{\cdot k} A_{\cdot k}^{\cdot l} A_{\cdot l]}^{\cdot s}, \quad \dots \quad (2)$$

Квадратные скобки в (2) обозначают операцию альтернирования по заключенным в них индексам. Например,

$$I_3 = A_{[l \cdot}^{\cdot h} A_{\cdot h}^{\cdot k} A_{\cdot k]}^{\cdot l} = \frac{1}{6} \delta_{hkl}^{pqr} A_{\cdot p}^{\cdot h} A_{\cdot q}^{\cdot k} A_{\cdot r}^{\cdot l}. \quad (3)$$

Выполняя операцию альтернирования в (2), можно получить формулы Варинга связывающие между собой инварианты системы (2) и системы (1).

Совместные инварианты некоторого набора, состоящего из нескольких тензоров/псевдотензоров, определяются следами степеней внутренних совместных произведений тензоров, составляющих набор.

Системы инвариантов (1) и (2) являются бесконечными множествами. Кроме того, целая рациональная функция (с числовыми коэффициентами) от нескольких инвариантов системы также будет (при известных условиях) инвариантом того же набора.

В связи с этим, возникает понятие неприводимого инварианта системы, т.е. такого инварианта, который не является целой рациональной функцией от некоторых других инвариантов той же системы. Множество всех неприводимых инвариантов системы называется её полной системой инвариантов, т.е. множество

инвариантов, представляющих собой целые рациональные функции инвариантов и если, кроме того, никакой из инвариантов не является целой рациональной функцией остальных (или некоторых из них).

Следует отметить, что с монография [2] посвящена построению систем инвариантов для различных наборов тензоров. Однако, в ней и ее английском оригинале присутствуют досадные опечатки [2, С. 65, Табл. 2]. Среди индивидуальных инвариантов матрицы  $\mathbf{a}$  присутствует инвариант  $\mathbf{b}^3$ . В строке для набора совместных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных матриц второго ранга  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  отсутствуют инварианты  $\mathbf{u}^2\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{b}^{2*\dagger}$ , вместо инвариантов  $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^{*\dagger}$  присутствуют инварианты  $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^*$  и  $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{b}\mathbf{a}^{2*}$ . Однако, руководствуясь статьями [5, 6] можно составить верный полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга (см. [6, P. 80, Table 1]). Вместе с тем, первую часть статьи [5] следует читать с осторожностью, т.к. по утверждению самого автора в ней также присутствуют неточности.

Настоящая работа продолжает цикл работ [19–21], посвященных формулировкам энергетических форм нелинейных микрополярных континуумов. Здесь предлагается алгоритм получения аппроксимации пятого порядка потенциала силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, учитывающего (кроме базовой квадратичной аппроксимации) поправки вплоть до пятого алгебраического порядка, при систематическом использовании теории алгебраических инвариантов. С этой целью обсуждается полный перечень неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. В результате предложен исходный набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных троек и 17 инвариантных четверок. Здесь классификация проведена по количеству тензорных литер (максимальное число литер равно 4). Максимальная степень исходных инвариантов равна 6.

Из 86 элементов затем отфильтрованы 63 следа по правилу возрастания алгебраических степеней инвариантов: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических, 19 четвертой степени, 24 инварианта пятой степени. Предложена схема построения инвариантов пятой степени, разбитых для удобства по семи группам, на основе правил: произведения линейных инвариантов между собой, попарные произведения квадратичных и кубических инвариантов между собой, попарные произведения инвариантов первой и четвертой степени, произведения линейных и кубических инвариантов, произведения линейных, возведенных в куб, и квадратичных инвариантов, произведения линейных и квадратов квадратичных инвариантов, исходные инварианты пятой степени.



Таким образом, гемитропный микрополярный потенциал определяется с помощью 366 механических модулей. Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие поправки второй, третьей и четвертой алгебраической степени, справедливые в произвольной криволинейной системе координат.

Изложение в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, развитые в предыдущих статьях [17–32].

**1. Инвариантные следы не выше пятой степени и образующие целый рациональный базис относительно гемитропной группы.** Рассмотрим систему, состоящую из двух асимметричных тензоров второго ранга. Каждый из этих тензоров можно представить в виде алгебраической суммы симметричной и антисимметричной частей, т.е.

$$\mathbf{A} + \mathbf{V}; \quad \mathbf{B} + \mathbf{W}. \quad (4)$$

При этом, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^T; & \mathbf{V} &= -\mathbf{V}^T; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}^T; & \mathbf{W} &= -\mathbf{W}^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя результаты, полученные в работах [2, 5, 6], для системы, состоящей из двух симметричных  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и двух антисимметричных  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  тензоров второго ранга, можно построить систему исходных инвариантов. Следует отметить, что рассуждения о совместных и индивидуальных инвариантах такой системы существенно зависят от размерности пространства. Положим далее, что она равна 3. Полный набор исходных индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов указанной системы тензоров состоит из 86 неприводимых элементов [2,

5, 6], упорядоченных согласно [2, С. 65, Табл. 2], с исправлениями:

$$\begin{array}{llll}
1.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}] & 2.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2] & 3.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^3] & 4.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}] \\
5.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^2] & 6.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^3] & 7.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2] & 8.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2] \\
9.) \operatorname{tr} [\mathbf{AB}] & 10.) \operatorname{tr} [\mathbf{AB}^2] & 11.) \operatorname{tr} [\mathbf{BA}^2] & 12.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2] \\
13.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}] & 14.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2] & 15.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVA}^2] & 16.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}] \\
17.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2] & 18.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BVB}^2] & 19.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}] & 20.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2] \\
21.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWA}^2] & 22.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}] & 23.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2] & 24.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BWB}^2] \\
25.) \operatorname{tr} [\mathbf{VW}] & 26.) \operatorname{tr} [\mathbf{VAB}] & 27.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}] & 28.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{A}] \\
29.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2] & 30.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{BA}] & 31.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{AB}] & 32.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] \\
33.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 34.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AB}] & 35.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 36.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] \\
37.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}] & 38.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}^2] & 39.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BVA}^2] & 40.) \operatorname{tr} [\mathbf{WAB}] \\
41.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}] & 42.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{A}] & 43.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2] & 44.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{BA}] \\
45.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{AB}] & 46.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] & 47.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 48.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AB}] \\
49.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 50.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] & 51.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}] & 52.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}^2] \\
53.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BWA}^2] & 54.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}] & 55.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2] & 56.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}] \\
57.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}] & 58.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}^2] & 59.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}^2] & 60.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWA}^2] \\
61.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVA}^2] & 62.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}] & 63.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2] & 64.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}] \\
65.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}] & 66.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}^2] & 67.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}^2] & 68.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BWB}^2] \\
69.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BVB}^2] & 70.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWAB}] & 71.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWBA}] & 72.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}] \\
73.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2\mathbf{A}] & 74.) \operatorname{tr} [\mathbf{WVA}^2\mathbf{B}] & 75.) \operatorname{tr} [\mathbf{WVB}^2\mathbf{A}] & 76.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}^2] \\
77.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{BA}] & 78.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2\mathbf{AB}] & 79.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WAB}] & 80.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VAB}] \\
81.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}] & 82.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}] & 83.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BWA}^2] & 84.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}^2] \\
85.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BVA}^2] & 86.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}^2]. & & 
\end{array} \tag{6}$$

Здесь и далее будем опускать операцию внутреннего произведения тензоров, т.е. запись  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  сокращается до  $\mathbf{AB}$ . В дальнейших рассуждениях ограничимся гемитропными инвариантами не выше пятой степени из набора (6). Таких инвариантов оказывается всего 63. Для удобства перенумеруем их согласно следующим правилам: 1.) инварианты нумеруются в порядке возрастания их алгебраической степени; 2.) — в порядке увеличения количества различных сомножителей во внутреннем произведении; 3.) — в алфавитном порядке литер. При этом главным является правило 1.), а правила 2.) и 3.) — подчиненными. Кроме того, правило 3.) подчинено также правилу 2.). В таком случае получим

следующий упорядоченный набор инвариантов не выше пятой степени:

$$\begin{array}{llll}
 1.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}] & 2.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}] & 3.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2] & 4.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^2] \\
 5.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2] & 6.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2] & 7.) \operatorname{tr} [\mathbf{AB}] & 8.) \operatorname{tr} [\mathbf{VW}] \\
 9.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^3] & 10.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^3] & 11.) \operatorname{tr} [\mathbf{AB}^2] & 12.) \operatorname{tr} [\mathbf{BA}^2] \\
 13.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}] & 14.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}] & 15.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}] & 16.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}] \\
 17.) \operatorname{tr} [\mathbf{VAB}] & 18.) \operatorname{tr} [\mathbf{WAB}] & 19.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}] & 20.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}] \\
 21.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2] & 22.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2] & 23.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2] & 24.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2] \\
 25.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2] & 26.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}] & 27.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}] & 28.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{A}] \\
 29.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{A}] & 30.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2] & 31.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2] & 32.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AB}] \\
 33.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AB}] & 34.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}] & 35.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}] & 36.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}] \\
 37.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}] & 38.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWAB}] & 39.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWBA}] & 40.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2] \\
 41.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{BA}] & 42.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{AB}] & 43.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 44.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] \\
 45.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}] & 46.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2] & 47.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{BA}] & 48.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{AB}] \\
 49.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 50.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] & 51.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}] & 52.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}^2] \\
 53.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}^2] & 54.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}^2] & 55.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}^2] & 56.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}] \\
 57.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2\mathbf{A}] & 58.) \operatorname{tr} [\mathbf{WVA}^2\mathbf{B}] & 59.) \operatorname{tr} [\mathbf{WVB}^2\mathbf{A}] & 60.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WAB}] \\
 61.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VAB}] & 62.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}] & 63.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}] & 
 \end{array} \tag{7}$$

Каждый из инвариантных следов снабжается индивидуальным идентификационным номером. Отметим, что в наборе (7) присутствует: два инварианта первой степени — 1.), 2.); шесть инвариантов второй степени — 3.)–8.); двенадцать инвариантов третьей степени — 9.)–20.); девятнадцать инвариантов четвертой степени — 21.)–39.); двадцать четыре инварианта пятой степени — 40.)–63.).

Сначала выберем линейные инварианты из списка (7). Их всегда два:

$$1, 2. \tag{8}$$

Сформируем затем набор квадратичных инвариантов из приведенного списка. Ясно, что указанные инварианты суть (номера указывают на сами инварианты):

$$\begin{array}{l}
 1^2, 1 \cdot 2; \\
 2^2; \\
 3, 4, 5, 6, 7, 8.
 \end{array} \tag{9}$$

Набор (9) состоит из 9 квадратичных гемитропных инвариантов, которые были использованы ранее для построения квадратичной энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела [17, 18, 28–30].

Для определения аппроксимаций более высокой степени (третьей, четвертой, пятой, шестой ...) энергетических форм в конечном итоге необходимо расширить систему рациональных инвариантов до инвариантов более высоких целых степеней (3, 4, 5, ...).

Выпишем далее неприводимую систему кубических инвариантов, представляющих собой совместные произведения инвариантов из списка (7) общей степени 3. Полный перечень из 28 кубических гемитропных инвариантов принимает вид:

$$\begin{aligned} &1^3, 1^2 \cdot 2, 1 \cdot 2^2; \\ &2^3; \\ &1 \cdot 3, 1 \cdot 4, 1 \cdot 5, 1 \cdot 6, 1 \cdot 7, 1 \cdot 8; \\ &2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6, 2 \cdot 7, 2 \cdot 8; \\ &9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. \end{aligned} \tag{10}$$

Найдем полный набор инвариантов четвертой степени, представляющих собой произведения инвариантов из списка (7) общей итоговой алгебраической степени 4 по следующей схеме. Сначала найдем произведения линейных инвариантов друг с другом:

$$\begin{aligned} &1^4, 1^3 \cdot 2, 1^2 \cdot 2^2, 1 \cdot 2^3; \\ &2^4. \end{aligned} \tag{11}$$

Затем отберем произведения квадратичных инвариантов друг с другом:

$$\begin{aligned} &3^2, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot 7, 3 \cdot 8; \\ &4^2, 4 \cdot 5, 4 \cdot 6, 4 \cdot 7, 4 \cdot 8; \\ &5^2, 5 \cdot 6, 5 \cdot 7, 5 \cdot 8; \\ &6^2, 6 \cdot 7, 6 \cdot 8; \\ &7^2, 7 \cdot 8; \\ &8^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Произведения общей четвертой алгебраической степени, включающие линейные и квадратичные инварианты, вычисляются согласно:

$$\begin{aligned} &1^2 \cdot 3, 1^2 \cdot 4, 1^2 \cdot 5, 1^2 \cdot 6, 1^2 \cdot 7, 1^2 \cdot 8; \\ &2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 4, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 6, 2^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 8; \\ &1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 5, 1 \cdot 2 \cdot 6, 1 \cdot 2 \cdot 7, 1 \cdot 2 \cdot 8. \end{aligned} \tag{13}$$

Произведения четвертой степени, состоящие из линейных и кубических инвариантов, перечисляются ниже:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 9, 1 \cdot 10, 1 \cdot 11, 1 \cdot 12, 1 \cdot 13, 1 \cdot 14, 1 \cdot 15, 1 \cdot 16, 1 \cdot 17, 1 \cdot 18, 1 \cdot 19, 1 \cdot 20; \\ &2 \cdot 9, 2 \cdot 10, 2 \cdot 11, 2 \cdot 12, 2 \cdot 13, 2 \cdot 14, 2 \cdot 15, 2 \cdot 16, 2 \cdot 17, 2 \cdot 18, 2 \cdot 19, 2 \cdot 20. \end{aligned} \tag{14}$$

Наконец отделим исходные инварианты четвертой степени:

$$21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39. \quad (15)$$

Объединив полученные группы произведений (11), (12), (13), (14), (15) получим искомый полный набор из  $5 + 21 + 18 + 24 + 19 = 87$  инвариантов четвертой степени.

Найдем теперь полный набор инвариантов пятой алгебраической степени, представляющих собой совместные произведения инвариантов из списка (7) общей алгебраической степени 5 по схеме, которая была использована для получения полного набора гемитропных инвариантов общей алгебраической степени 4.

Сначала найдем произведения линейных инвариантов друг с другом:

$$\begin{aligned} &1^5, 1^4 \cdot 2, 1^3 \cdot 2^2, 1^2 \cdot 2^3, 1 \cdot 2^4; \\ &2^5. \end{aligned} \quad (16)$$

Произведения квадратичных и кубических инвариантов друг с другом примут вид:

$$\begin{aligned} &3 \cdot 9, 3 \cdot 10, 3 \cdot 11, 3 \cdot 12, 3 \cdot 13, 3 \cdot 14, 3 \cdot 15, 3 \cdot 16, 3 \cdot 17, 3 \cdot 18, 3 \cdot 19, 3 \cdot 20; \\ &4 \cdot 9, 4 \cdot 10, 4 \cdot 11, 4 \cdot 12, 4 \cdot 13, 4 \cdot 14, 4 \cdot 15, 4 \cdot 16, 4 \cdot 17, 4 \cdot 18, 4 \cdot 19, 4 \cdot 20; \\ &5 \cdot 9, 5 \cdot 10, 5 \cdot 11, 5 \cdot 12, 5 \cdot 13, 5 \cdot 14, 5 \cdot 15, 5 \cdot 16, 5 \cdot 17, 5 \cdot 18, 5 \cdot 19, 5 \cdot 20; \\ &6 \cdot 9, 6 \cdot 10, 6 \cdot 11, 6 \cdot 12, 6 \cdot 13, 6 \cdot 14, 6 \cdot 15, 6 \cdot 16, 6 \cdot 17, 6 \cdot 18, 6 \cdot 19, 6 \cdot 20; \\ &7 \cdot 9, 7 \cdot 10, 7 \cdot 11, 7 \cdot 12, 7 \cdot 13, 7 \cdot 14, 7 \cdot 15, 7 \cdot 16, 7 \cdot 17, 7 \cdot 18, 7 \cdot 19, 7 \cdot 20; \\ &8 \cdot 9, 8 \cdot 10, 8 \cdot 11, 8 \cdot 12, 8 \cdot 13, 8 \cdot 14, 8 \cdot 15, 8 \cdot 16, 8 \cdot 17, 8 \cdot 18, 8 \cdot 19, 8 \cdot 20. \end{aligned} \quad (17)$$

Произведения инвариантов первой и четвертой степеней примут вид:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 21, 1 \cdot 22, 1 \cdot 23, 1 \cdot 24, 1 \cdot 25, 1 \cdot 26, 1 \cdot 27, 1 \cdot 28, 1 \cdot 29, 1 \cdot 30, \\ &1 \cdot 31, 1 \cdot 32, 1 \cdot 33, 1 \cdot 34, 1 \cdot 35, 1 \cdot 36, 1 \cdot 37, 1 \cdot 38, 1 \cdot 39; \\ &2 \cdot 21, 2 \cdot 22, 2 \cdot 23, 2 \cdot 24, 2 \cdot 25, 2 \cdot 26, 2 \cdot 27, 2 \cdot 28, 2 \cdot 29, 2 \cdot 30, \\ &2 \cdot 31, 2 \cdot 32, 2 \cdot 33, 2 \cdot 34, 2 \cdot 35, 2 \cdot 36, 2 \cdot 37, 2 \cdot 38, 2 \cdot 39. \end{aligned} \quad (18)$$

Произведения инвариантов первой и третьей степеней примут вид:

$$\begin{aligned} &1^2 \cdot 9, 1^2 \cdot 10, 1^2 \cdot 11, 1^2 \cdot 12, 1^2 \cdot 13, 1^2 \cdot 14, \\ &1^2 \cdot 15, 1^2 \cdot 16, 1^2 \cdot 17, 1^2 \cdot 18, 1^2 \cdot 19, 1^2 \cdot 20; \\ &2^2 \cdot 9, 2^2 \cdot 10, 2^2 \cdot 11, 2^2 \cdot 12, 2^2 \cdot 13, 2^2 \cdot 14, \\ &2^2 \cdot 15, 2^2 \cdot 16, 2^2 \cdot 17, 2^2 \cdot 18, 2^2 \cdot 19, 2^2 \cdot 20; \\ &1 \cdot 2 \cdot 9, 1 \cdot 2 \cdot 10, 1 \cdot 2 \cdot 11, 1 \cdot 2 \cdot 12, 1 \cdot 2 \cdot 13, 1 \cdot 2 \cdot 14, \\ &1 \cdot 2 \cdot 15, 1 \cdot 2 \cdot 16, 1 \cdot 2 \cdot 17, 1 \cdot 2 \cdot 18, 1 \cdot 2 \cdot 19, 1 \cdot 2 \cdot 20. \end{aligned} \quad (19)$$

Произведения кубов инвариантов первой и второй степеней друг с другом примут вид:

$$\begin{aligned}
 &1^3 \cdot 3, 1^3 \cdot 4, 1^3 \cdot 5, 1^3 \cdot 6, 1^3 \cdot 7, 1^3 \cdot 8; \\
 &2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 4, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 6, 2^3 \cdot 7, 2^3 \cdot 8; \\
 &1^2 \cdot 2 \cdot 3, 1^2 \cdot 2 \cdot 4, 1^2 \cdot 2 \cdot 5, 1^2 \cdot 2 \cdot 6, 1^2 \cdot 2 \cdot 7, 1^2 \cdot 2 \cdot 8; \\
 &1 \cdot 2^2 \cdot 3, 1 \cdot 2^2 \cdot 4, 1 \cdot 2^2 \cdot 5, 1 \cdot 2^2 \cdot 6, 1 \cdot 2^2 \cdot 7, 1 \cdot 2^2 \cdot 8.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Произведения инвариантов первой степени и квадратов квадратичных инвариантов примут вид:

$$\begin{aligned}
 &1 \cdot 3^2, 1 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 3 \cdot 5, 1 \cdot 3 \cdot 6, 1 \cdot 3 \cdot 7, 1 \cdot 3 \cdot 8; \\
 &1 \cdot 4^2, 1 \cdot 4 \cdot 5, 1 \cdot 4 \cdot 6, 1 \cdot 4 \cdot 7, 1 \cdot 4 \cdot 8; \\
 &1 \cdot 5^2, 1 \cdot 5 \cdot 6, 1 \cdot 5 \cdot 7, 1 \cdot 5 \cdot 8; \\
 &1 \cdot 6^2, 1 \cdot 6 \cdot 7, 1 \cdot 6 \cdot 8; \\
 &1 \cdot 7^2, 1 \cdot 7 \cdot 8; \\
 &1 \cdot 8^2; \\
 &2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3 \cdot 4, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 6, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 8; \\
 &2 \cdot 4^2, 2 \cdot 4 \cdot 5, 2 \cdot 4 \cdot 6, 2 \cdot 4 \cdot 7, 2 \cdot 4 \cdot 8; \\
 &2 \cdot 5^2, 2 \cdot 5 \cdot 6, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 8; \\
 &2 \cdot 6^2, 2 \cdot 6 \cdot 7, 2 \cdot 6 \cdot 8; \\
 &2 \cdot 7^2, 2 \cdot 7 \cdot 8; \\
 &2 \cdot 8^2.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Наконец отберем исходные инварианты пятой алгебраически степени:

$$\begin{aligned}
 &40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, \\
 &52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Объединив группы произведений исходных вариантов друг с другом (16)–(22) получим искомый полный набор из  $6 + 72 + 38 + 36 + 24 + 42 + 24 = 242$  гемитропных инварианта пятой степени.

**2. Аппроксимация пятого порядка энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела.** Опираясь на результаты предыдущего раздела, построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных частей асимметричных тензоров деформаций и тензора изгиба–кручения. Для этого следует положить:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \text{sym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{B} &= \text{sym } \boldsymbol{\kappa}, \\
 \mathbf{V} &= \text{asym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{W} &= \text{asym } \boldsymbol{\kappa}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

В смешанных компонентах соотношения (23) примут вид

$$\begin{aligned} A_{s\cdot}^{k\cdot} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}], & B_{s\cdot}^{k\cdot} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{k\cdot} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}], \\ V_{s\cdot}^{k\cdot} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}], & W_{s\cdot}^{k\cdot} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{k\cdot} - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Воспользовавшись заменой (23) и принимая схему нумерации из работ [17, 18], систему квадратичных гемитропных инвариантов (9) можно выписать согласно [33], а систему гемитропных кубических инвариантов (10) согласно [20]. Аналогичным способом можно получить систему гемитропных инвариантов четвертой степени.

А-представление аппроксимации четвертого порядка энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела, соответствующее системе инвариантов второй, третьей, четвертой и пятой степеней запишем в сокращенной форме:

$$\mathcal{U} = \sum_{\mathbf{a}=1}^9 {}^2C_{\mathbf{a}} {}^2I_{\mathbf{a}} + \sum_{\mathbf{c}=1}^{28} {}^3C_{\mathbf{c}} {}^3\mathfrak{J}_{\mathbf{c}} + \sum_{\mathbf{m}=1}^{87} {}^4C_{\mathbf{m}} {}^4\mathfrak{K}_{\mathbf{m}} + \sum_{\mathbf{s}=1}^{242} {}^5C_{\mathbf{s}} {}^5\mathfrak{L}_{\mathbf{s}}, \quad (25)$$

где введены новые обозначения для определяющих модулей:  ${}^2C_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} = 1, \dots, 9$ ) — определяющие модули квадратичного приближения;  ${}^3C_{\mathbf{c}}$  ( $\mathbf{c} = 1, \dots, 28$ ) — определяющие модули, связанные с кубическими поправками;  ${}^4C_{\mathbf{m}}$  ( $\mathbf{m} = 1, \dots, 87$ ) — определяющие модули, связанные с поправками четвертой степени;  ${}^5C_{\mathbf{s}}$  ( $\mathbf{s} = 1, \dots, 242$ ) — определяющие модули, связанные с поправками четвертой степени;  ${}^2I_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} = 1, \dots, 9$ ) — квадратичные инварианты;  ${}^3\mathfrak{J}_{\mathbf{c}}$  ( $\mathbf{c} = 1, \dots, 28$ ) — кубические инварианты;  ${}^4\mathfrak{K}_{\mathbf{m}}$  ( $\mathbf{m} = 1, \dots, 87$ ) — инварианты четвертой степени;  ${}^5\mathfrak{L}_{\mathbf{s}}$  ( $\mathbf{s} = 1, \dots, 242$ ) — инварианты пятой степени. Стоит отметить чувствительность некоторых определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, что связано с возможностью присвоения нечетного алгебраического веса тензору изгиба-кручения.

Определяющие модули ( $9 + 28 + 87 + 242 = 366$ ):  ${}^2C_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} = 1, \dots, 9$ );  ${}^3C_{\mathbf{c}}$  ( $\mathbf{c} = 1, \dots, 28$ );  ${}^4C_{\mathbf{m}}$  ( $\mathbf{m} = 1, \dots, 87$ ) и  ${}^5C_{\mathbf{s}}$  ( $\mathbf{s} = 1, \dots, 242$ ), присутствующие в потенциале силовых и моментных напряжений (25), являются неопределенными коэффициентами в линейной комбинации неприводимой системы инвариантов второй, третьей, четвертой и пятой алгебраических степеней системы двух асимметричных тензоров второго ранга.

Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, соответствующие энергетической форме (25), получены как в виде

$$t_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot})}, \quad \mu_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{k\cdot})}. \quad (26)$$

Для симметричных и антисимметричных частей силовых и моментных напряжений справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}[t_{s\cdot}^k + t_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot})} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{\cdot s}^{k\cdot})}\right], \\
 \frac{1}{2}[\mu_{s\cdot}^k + \mu_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{k\cdot})} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{\cdot s}^{k\cdot})}\right], \\
 \frac{1}{2}[t_{s\cdot}^k - t_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot})} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{\cdot s}^{k\cdot})}\right], \\
 \frac{1}{2}[\mu_{s\cdot}^k - \mu_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{k\cdot})} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{\cdot s}^{k\cdot})}\right].
 \end{aligned} \tag{27}$$

Подставив выражение для потенциала (25) в уравнения (26), получим:

$$\begin{aligned}
 t_{s\cdot}^k &= \sum_{c=1}^9 {}^2C_c \frac{\partial^2 \mathcal{I}_c}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot})} + \sum_{a=1}^{28} {}^3C_a \frac{\partial^3 \mathcal{J}_a}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot})} + \sum_{m=1}^{87} {}^4C_m \frac{\partial^4 \mathcal{K}_m}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot})} + \sum_{s=1}^{242} {}^5C_s \frac{\partial^5 \mathcal{L}_s}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot})}, \\
 \mu_{s\cdot}^k &= \sum_{c=1}^9 {}^2C_c \frac{\partial^2 \mathcal{I}_c}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{k\cdot})} + \sum_{a=1}^{28} {}^3C_a \frac{\partial^3 \mathcal{J}_a}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{k\cdot})} + \sum_{m=1}^{87} {}^4C_m \frac{\partial^4 \mathcal{K}_m}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{k\cdot})} + \sum_{s=1}^{242} {}^5C_s \frac{\partial^5 \mathcal{L}_s}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{k\cdot})}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Остается вычислить частные производные в выражениях (28) для получения точной формулировки определяющих уравнений нелинейного гемитропного микрополярного тела, учитывающие поправка второй, третьей, четвертой и пятой алгебраической степени.

**3. Заключение.** В настоящей работе теория алгебраических инвариантов используется с целью получения аппроксимации пятого порядка энергетической формы нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела. Алгоритм развивается на базе исходной системы инвариантных следов. Алгебраические инварианты представляют собой инвариантные следы, вообще говоря, непрерывных степеней внутренних произведений целых степеней тензоров второго ранга, составляющих исследуемую систему. Подводя итог настоящего исследования, заключаем:

- (1) С помощью теории целых рациональных алгебраических инвариантов (псевдоинвариантов) исследовано полное множество неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. В результате выделен набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных троек и 17 инвариантных четверок, т.е.  $8 + 17 + 44 + 17 = 86$ .
- (2) Из 86 элементов затем отфильтрованы по правилу возрастания алгебраических степеней инвариантов: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических и 19 инвариантов четвертой степени,  $(2 + 6 + 12 + 19 = 39)$ .



Предложена схема построения 39 инвариантов пятой степени, разбитых по семи группам.

- (3) Найдены целые рациональные произведения пятой алгебраической степени, сформированных из исходных 63 элементов, по следующей схеме: произведения линейных инвариантов между собой (5), произведения квадратичных инвариантов между собой (21), произведения линейных и квадратичных инвариантов (18), попарные произведения линейных и кубических инвариантов (24), собственно инварианты четвертой степени (19). Всего:  $(5 + 21 + 18 + 24 + 19 = 87)$ .
- (4) Построен потенциал силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, содержащий аппроксимации второго, третьего, четвертого и пятого порядков. Таким образом микрополярный потенциал содержит всего  $9 + 28 + 87 + 242 = 366$  гемитропных механических модулей.
- (5) Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие поправки второй, третьей и четвертой алгебраической степени.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124012500437-9).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. – М., Л. : ГИТТЛ, 1948. – 408 с. – [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
2. Спенсер Э. Теория инвариантов. – Мир, 1974.
3. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред. – Санкт-Петербург: Изд-во политехн. ун-та, 2012.
4. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. – Онти. Глав. ред. техн.-теоретич. лит-ры, 1937.

5. *Spencer A., Rivlin R.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // Archive for rational mechanics and analysis. – 1962. – Т. 9. – С. 45–63.
6. *Spencer A.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // Archive for rational mechanics and analysis. – 1965. – Т. 18, № 1. – С. 51–82.
7. *Cosserat E. M. P., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
8. *Gunther W.* Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. – 1958. – Т. 10. – С. 195–213.
9. *Kessel S.* Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. – 1964. – Т. 16. – С. 1–22.
10. *Neuber H.* Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. – 1966. – Т. 2. – С. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
11. *Neuber H.* On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. – Springer. 1966. – С. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5\16.
12. *Neuber H.* On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / под ред. E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – С. 109–113.
13. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1972.
14. *Besdo D.* A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. – 1974. – Т. 20. – С. 105–131.
15. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
16. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
17. *Радаев Ю. Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, вып. 3. – С. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
18. *Радаев Ю., Мурашкин Е.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82, № 4. – С. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
19. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Theory of Poisson’s ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Т. 45, № 5. – С. 2378–2390. – DOI: 10.1134/s1995080224602480.
20. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] – 2025. – Т. 29, № 2. – С. 207–219. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
21. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – Самара, 2025. – Т. 29, № 2. – С. 274–293. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
22. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo

- Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2023. – Т. 165, № 4. – С. 389–403. – DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
23. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. – United States, 2023. – Т. 58, № 9. – С. 3111–3119. – DOI: 10.3103/S0025654423700255.
  24. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – Т. 59, № 1. – С. 555–580. – DOI: 10.1134/s0025654424700274.
  25. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. – 2023. – Т. 58, № 3. – С. 802–813. – DOI: 10.3103/s0025654423700127.
  26. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 3(57). – С. 112–128. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
  27. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 4(58). – С. 86–120. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
  28. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2022. – 4(54). – С. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
  29. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2022. – 3(53). – С. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
  30. *Мурашкин Е. В.* О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 1(55). – С. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
  31. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2023. – Т. 44, № 6. – С. 2440–2449. – DOI: 10.1134/s1995080223060392.
  32. *Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N.* The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultrasotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – Т. 59, № 3. – С. 1311–1320. – DOI: 10.1134/s0025654424603719.
  33. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Т. 46, № 5. – С. 2391–2400. – DOI: 10.1134/s1995080225606514.

## REFERENCES

1. *Gurevich G. B.* Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. – Moscow, Leningrad : GITTL, 1948. – 408 p.
2. *Spencer E.* Theory of Invariants. – Mir, 1974.
3. *Zhilin P. A.* Rational Mechanics of Continuous Media. – Saint Petersburg: Polytechnic University Press, 2012.
4. *Sushkevich A. K.* Foundations of Higher Algebra. – ONTI. Main Editorial Office for Technical, Theoretical Literature, 1937.
5. *Spencer A. J. M., Rivlin R. S.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1962. – Vol. 9. – P. 45–63.
6. *Spencer A. J. M.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1965. – Vol. 18, no. 1. – P. 51–82.
7. *Cosserat E. M. P., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
8. *Gunther W.* Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. – 1958. – Vol. 10. – P. 195–213.
9. *Kessel S.* Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. – 1964. – Vol. 16. – P. 1–22.
10. *Neuber H.* Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. – 1966. – Vol. 2. – P. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
11. *Neuber H.* On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. – Springer. 1966. – P. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5\\_16.
12. *Neuber H.* On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / ed. by E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – P. 109–113.
13. *Nowacki W.* Theory of Micropolar Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1972.
14. *Besdo D.* A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. – 1974. – Vol. 20. – P. 105–131.
15. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
16. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
17. *Radayev Y. N.* Multiplier Rule in Covariant Formulations of Micropolar Continuum Mechanics Theories // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. – 2018. – Vol. 22, iss. 3. – P. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
18. *Radayev Y. N., Murashkin E. V.* Pseudotensor Formulation of the Mechanics of Hemitropic Micropolar Media // Problemy prochnosti i plastichnosti. – 2020. – Vol. 82, no. 4. – P. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

19. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Vol. 45, no. 5. – P. 2378–2390. – DOI: 10.1134/s1995080224602480.
20. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On Quadratic Corrections to the Constitutive Equations for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] – 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 207–219. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
21. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On Quadratic Corrections to the Constitutive Equations for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. – Samara, 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 274–293. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
22. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2023. – Vol. 165, no. 4. – P. 389–403. – DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
23. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. – United States, 2023. – Vol. 58, no. 9. – P. 3111–3119. – DOI: 10.3103/S0025654423700255.
24. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – Vol. 59, no. 1. – P. 555–580. – DOI: 10.1134/s0025654424700274.
25. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58, no. 3. – P. 802–813. – DOI: 10.3103/s0025654423700127.
26. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On the Polyvariance of the Basic Equations of Coupled Micropolar Thermoelasticity // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2023. – 3(57). – P. 112–128. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
27. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Multiweights Thermomechanics of Hemitropic Micropolar Solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2023. – 4(58). – P. 86–120. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
28. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Reduction of Natural Forms of Hemitropic Energy Potentials to Conventional Ones // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2022. – 4(54). – P. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
29. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On Two Basic Natural Forms of the Potential of Asymmetric Force-Stress and Couple-Stress Tensors in the Mechanics of Hemitropic Bodies // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2022. – 3(53). – P. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
30. *Murashkin E. V.* On the Relation Between Micropolar Constitutive Parameters of Thermodynamic State Potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2023. – 1(55). – P. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.

31. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2023. – Vol. 44, no. 6. – P. 2440–2449. – DOI: 10.1134/S1995080223060392.
32. *Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N.* The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultrasotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – Vol. 59, no. 3. – P. 1311–1320. – DOI: 10.1134/S0025654424603719.
33. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Vol. 46, no. 5. – P. 2391–2400. – DOI: 10.1134/S1995080225606514.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Алексеев Андрей Алексеевич (alexeev@bk.ru)** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь, Россия.

**Богданов Андрей Николаевич (bogdanov@imec.msu.ru)** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории газодинамики взрыва и реагирующих систем Научно-исследовательского института механики МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (aab@imim.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Власов Александр Николаевич (bah1955@yandex.ru)** – доктор технических наук, директор Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН), г. Москва.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Иванов Дмитрий Валерьевич (ivanovdv.84@ya.ru)** – профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Лисовенко Дмитрий Сергеевич (dslisov@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (ekc\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.



**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич** ([orlowvn@rambler.ru](mailto:orlowvn@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович** ([revuzhenko@yandex.ru](mailto:revuzhenko@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович** ([radch@samgtu.ru](mailto:radch@samgtu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович** ([sen@sibsau.ru](mailto:sen@sibsau.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич** ([shashkin@amm.vsu.ru](mailto:shashkin@amm.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тихонов Сергей Владимирович** ([strangheb@mail.ru](mailto:strangheb@mail.ru)) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич** ([taa58@yandex.ru](mailto:taa58@yandex.ru)) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Чернышов Александр Данилович** ([post@vgta.vrn.ru](mailto:post@vgta.vrn.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович** ([chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович** ([shashkin@amm.vsu.ru](mailto:shashkin@amm.vsu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru) и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст,

который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки на русском и английском языках**; **сведения о всех авторах на русском и английском языках**: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2<sub>ε</sub> с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> К избранию профессора Дмитрия Владимировича Георгиевского членом–корреспондентом Российской академии наук .....	7
<i>Тихонов С. В.</i> К избранию Дмитрия Сергеевича Лисовенко членом–корреспондентом Российской академии наук .....	55
<i>Дудин Д. С., Келлер И. Э.</i> Описание сульфидно-оксидной и хлоридной коррозии жаропрочных сплавов с учётом напряжений. II. Расчет и сравнение с экспериментом .....	77
<i>Канахин И. В., Григорьева А. Л., Григорьев Я. Ю.</i> Моделирование процесса определения деформаций и формы деформируемой границы при вдавливании клина в заготовку выпуклой формы .....	87
<i>Дудко О. В., Лаптева А. А.</i> Циклическое одноосное растяжение-сжатие разномодульного упругого полупространства .....	105
<i>Карьев Л. Г., Федоров В. А., Лановая А. В.</i> К вопросу о сходимости тригонометрических рядов .....	118
<i>Акимова В. В., Бударина М. А., Нефедова Т. Ю., Иванов Д. В.</i> , Об оценке межэкспертной надежности при обработке результатов экспериментов по одноосному сжатию образцов губчатой кости .....	128
<i>Артемов М. А., Верлин А. А.</i> Упругопластическое состояние вращающегося диска. Кусочно-линейные и гладкие функции пластичности .....	143
<i>Быкова М. И., Ковалев А. В., Минаева Н. В., Шашкин А. И.</i> Порождение передних кромок трещин продольного и поперечного сдвигов при отражении предельной кромки трещины продольного сдвига от жёсткой границы .....	168
<i>Ковалев А. В., Коротков М. М., Минаева Н. В., Шашкин А. И.</i> Анализ математических моделей, используемых при исследовании предельного состояния упругой неоднородной полосы при сжатии .....	185
<i>Римский А. А., Крылова Е. Ю., Островский Н. В., Гаркави А. В.</i> Влияние проксимальной остиотомии малоберцовой кости на напряженно-деформированное состояние менисков коленного сустава .....	198
<i>Захаров И. Н., Солодкова Е. Г., Балалин С. В., Лэ В. Х., Лобанов Е. В.</i> Разработка персонализированной конечно-элементной модели роговицы для прогнозирования результатов имплантации интрастромальных сегментов при кератоконусе .....	221
<i>Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Матченко Д. В.</i> Применение гиперупругих моделей для анализа деформаций глаза .....	246

---

<i>Петухов Д. С., Келлер И. Э.</i> Описание зависимости усталостной долговечности от частоты нагружения и выдержек в рамках эволюционной модели повреждаемости .....	262
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Об одном алгоритме аппроксимации энергетической формы гемитропного микрополярного тела .....	282
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	301
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	304

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2025. № 2 (64)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 12.12.2024. Выход в свет 19.12.2025.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>. Усл. печ. л. 38,3.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 562

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного  
педагогического университета им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38