

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 1(35)
январь – март 2018 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко,
С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов,
А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2018

Ю. В. Немировский¹

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

¹Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

¹Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Предельное состояние круглых и кольцевых пластин из разносопротивляющихся материалов рассматривается на основе условия пластичности П. Баландина. Используются вписанные и описанные кусочно-линейные аппроксимации эллипса напряжений Баландина и на их основе для обобщенных характеристик (моментов и скоростей кривизн) получены законы осесимметричного деформирования круглых и кольцевых пластин при осесимметричном поперечном изгибе.

Ключевые слова: Поперечный изгиб, круглые и кольцевые пластины, разносопротивляющиеся предельное состояние, пластические материалы, условие пластичности, закон пластического течения, изгибающие моменты, скорости кривизны.

УДК: 539.3

Анализ испытаний различных материалов (модифицированных сталей, чугунов, титановых и алюминиевых сплавов, пластмасс, полимербетонов и др. [1-5] указывает на совершенно различный характер их деформирования при растяжении и сжатии. При этом с достаточной достоверностью можно считать модули упругости практически одинаковыми при растяжении и сжатии, а пластические характеристики (пределы текучести, временного сопротивления, и предельные деформационные характеристики) при растяжении и сжатии могут отличаться в несколько раз (или даже десятки раз). Учет этого обстоятельства безусловно важен при расчете предельного равновесия конструкций из таких материалов. В работах [6, 7] на основе условия пластичности В. Прагера [8,9] получено параметрическое описание гиперповерхностекучности в пространстве обобщенных усилий и моментов и на их основе построены верхние границы предельных давлений для цилиндрических сосудов со сферическими днищами.

© Немировский Ю. В., 2018
Немировский Юрий Владимирович
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Кабинета Министров Чувашской Республики в рамках научного проекта № 17-41-210272

Поступила 10.02.2018

В предлагаемой работе за основу принято достаточно хорошо экспериментально проверенное условие пластичности П. Баландина [10,11], которое в случае плоского напряженного состояния имеет вид

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + a_0(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_0^+\sigma_0^- \quad (1)$$

где σ_1, σ_2 – главные напряжения; $a_0 = \sigma_0^- - \sigma_0^+$; σ_0^-, σ_0^+ – пределы текучести при сжатии (–) и растяжении (+). Если ввести замену

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + a_0, \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 + a_0$$

то условие (1) можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2^2 = b_0^2, b_0^2 = \sigma_0^-\sigma_0^+ + a_0^2 \quad (2)$$

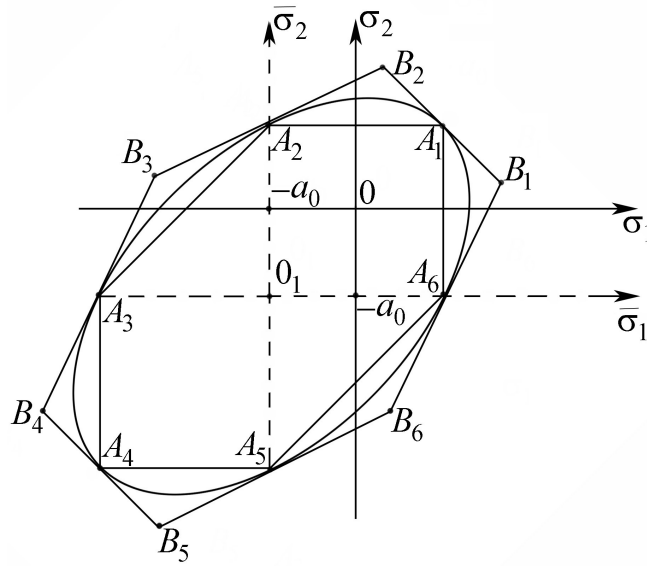


Рис. 1.

Уравнение (2) соответствует условию пластичности Мизеса с пределом текучести b_0 и в плоскости σ_1, σ_2 определяет эллипс Мизеса (рис. 1), который удобно аппроксимировать вписанным $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ или описанным $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ шестиугольниками. В соответствии с такой аппроксимацией в случае внутреннего шестиугольника условие пластичности и закон пластического течения для соответствующих режимов будет описываться соотношениями:

а) внутренний шестиугольник

$$\begin{aligned} A_1A_2 : & \quad \sigma_2 = b_0 - a_0, \quad -a_0 \leq \sigma_1 \leq b_0 - a_0, \quad \dot{\epsilon}_1 = 0, \quad \dot{\epsilon}_2 > 0; \\ A_2A_3 : & \quad \sigma_2 - \sigma_1 = b_0, \quad \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_1 = 0, \quad \dot{\epsilon}_2 > 0, \quad \dot{\epsilon}_1 < 0; \\ A_3A_4 : & \quad \sigma_1 = -(b_0 + a_0), \quad -(b_0 + a_0) \leq \sigma_2 \leq -a_0, \quad \dot{\epsilon}_1 > 0, \quad \dot{\epsilon}_2 < 0; \\ A_4A_5 : & \quad \sigma_2 = -(b_0 + a_0), \quad -(b_0 + a_0) \leq \sigma_1 \leq -a_0, \quad \dot{\epsilon}_1 = 0, \quad \dot{\epsilon}_2 < 0; \\ A_5A_6 : & \quad \sigma_2 - \sigma_1 = -b_0, \quad \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = 0, \quad \dot{\epsilon}_1 > 0, \quad \dot{\epsilon}_2 < 0; \\ A_6A_1 : & \quad \sigma_1 = b_0 + a_0, \quad -a_0 \leq \sigma_2 \leq b_0 - a_0, \quad \dot{\epsilon}_1 > 0, \quad \dot{\epsilon}_2 = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

Координаты вершин:

$$\begin{aligned} & A_1\{(b_0 - a_0), (b_0 - a_0)\}, A_2\{(-a_0), (b_0 - a_0)\}, A_3\{-(b_0 + a_0), (-a_0)\}, \\ & A_4\{-(b_0 + a_0), -(b_0 + a_0)\}, A_5\{(-a_0), -(b_0 + a_0)\}, A_6\{(b_0 - a_0), (-a_0)\} \\ & b_0 = \sqrt{(\sigma_0^- - \sigma_0^+)^2 + \sigma_0^- \sigma_0^+}, \quad b_0 > |a_0| \end{aligned}$$

б) Внешний шестиугольник

$$\begin{aligned} B_1B_2 : & \quad \sigma_2 + \sigma_1 = 2(b_0 - a_0), \quad \dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 > 0, \quad \dot{\varepsilon}_1 > 0, \\ B_2B_3 : & \quad 2\sigma_2 - \sigma_1 = 2b_0 - a_0, \quad \dot{\varepsilon}_2 + 2\dot{\varepsilon}_1 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 > 0, \quad \dot{\varepsilon}_1 < 0, \\ B_3B_4 : & \quad \sigma_2 - 2\sigma_1 = 2b_0 + a_0, \quad 2\dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_1 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 > 0, \quad \dot{\varepsilon}_1 < 0, \\ B_4B_5 : & \quad \sigma_2 + \sigma_1 = -2(b_0 - a_0), \quad \dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 < 0, \quad \dot{\varepsilon}_1 < 0, \\ B_5B_6 : & \quad 2\sigma_2 - \sigma_1 = -2(b_0 - a_0), \quad \dot{\varepsilon}_2 + 2\dot{\varepsilon}_1 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 < 0, \quad \dot{\varepsilon}_1 > 0, \\ B_6B_1 : & \quad \sigma_2 - 2\sigma_1 = -2b_0 + a_0, \quad 2\dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_1 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 < 0, \quad \dot{\varepsilon}_1 > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Координаты вершин:

$$\begin{aligned} & B_1\left\{\left(\frac{4b_0 - 3a_0}{3}\right), \left(\frac{2b_0 - 3a_0}{3}\right)\right\}, B_2\left\{\left(\frac{2b_0 - 3a_0}{3}\right), \left(\frac{4b_0 - 3a_0}{3}\right)\right\}, \\ & B_3\left\{\left(\frac{-2b_0 - 3a_0}{3}\right), \left(\frac{2b_0 - 3a_0}{3}\right)\right\}, B_4\left\{\left(-\frac{4b_0 - a_0}{3}\right), \left(\frac{-2b_0 + 5a_0}{3}\right)\right\}, \\ & B_5\left\{\left(\frac{-2b_0 + 2a_0}{3}\right), \left(\frac{-4b_0 + 4a_0}{3}\right)\right\}, B_6\left\{\left(\frac{6b_0 - 2a_0}{3}\right), \left(\frac{6b_0 - a_0}{3}\right)\right\}. \end{aligned}$$

В соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява имеем:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_{01} + z\dot{\chi}_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_{02} + z\dot{\chi}_2, \quad (5)$$

где z – координата вдоль нормали к отсчетной поверхности пластины,

$$\varepsilon_{01} = \frac{d\dot{U}_0}{dr}, \quad \varepsilon_{02} = \frac{\dot{U}_0}{r}, \quad \dot{\chi}_1 = -\frac{d^2\dot{\omega}}{dr^2}, \quad \dot{\chi}_2 = -\frac{1}{r}\frac{d\dot{\omega}}{dr}, \quad (6)$$

$\dot{\omega}$, \dot{U}_0 – скорости прогиба и радиального перемещения отсчетной поверхности, r – текущий радиус.

Нетрудно проверить, опираясь на зависимости (3)–(6), что в случае поперечного изгиба пластин, при аппроксимации внутренним шестиугольником, в них могут реализоваться пластические состояния, соответствующие парам режимов A_4A_5 , A_1A_2 , (A_1A_2, A_4A_5) , A_5A_6 , A_2A_3 (A_2A_3, A_5A_6), A_3A_4 , A_6A_1 (A_6A_1, A_3A_4), а при аппроксимации наружным шестиугольником – пластические состояния, соответствующие парам режимов B_4B_5 , B_1B_2 (B_1B_2, B_4B_5), B_5B_6 , B_2B_3 (B_2B_3, B_5B_6), B_6B_1 , B_3B_4 (B_3B_4, B_6B_1).

Тогда для изгибающих моментов и скоростей кривизн при поперечном изгибе круглых кольцевых пластин в случае аппроксимации внутренним шестиугольником будем иметь предельную кривую, изображенную на рис. 2, где прямая C_1C_2 соответствует реализации режимов A_4A_5 , A_1A_2 и для нее

$$\begin{aligned} M_2 &= M_0, \quad -M_{01} \leq M_1 \leq M_0, \\ \dot{\chi}_1 &= 0, \quad \dot{\chi}_2 > 0, \\ M_0 &= \frac{\sigma_0^+ \sigma_0^- H^2}{4b_0}, \quad M_{01} = \frac{a_0^2}{\sigma_0^+ \sigma_0^-} M_0, \end{aligned} \quad (7)$$

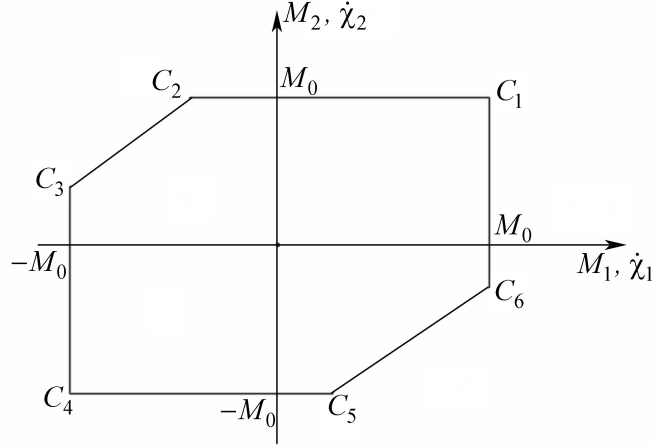


Рис. 2.

где H – толщина пластинки.

Прямая C_2C_3 соответствует реализации режимов A_5A_6 , A_2A_3 и для нее справедливы соотношения:

$$M_2 - M_1 = \frac{b_0^2}{\sigma_0^+ \sigma_0^-} M_0, \quad -M_0 \leq M_1 \leq -M_{01}, \quad (8)$$

$$\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2 = 0, \quad \dot{\chi}_1 < 0, \quad \dot{\chi}_2 > 0$$

Прямая C_3C_4 соответствует реализации режимов A_1A_6 , A_3A_4 и для нее справедливы соотношения:

$$M_1 = -M_0, \quad -M_0 \leq M_2 \leq M_{01} \quad (9)$$

$$\dot{\chi}_2 = 0, \quad \dot{\chi}_1 < 0,$$

Прямая C_5C_6 соответствует реализации режимов A_2A_3 , A_5A_6 и для нее

$$M_1 - M_2 = -\frac{b_0^2}{\sigma_0^+ \sigma_0^-} M_0, \quad M_{01} \leq M_1 \leq M_0, \quad (10)$$

$$\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2 = 0, \quad \dot{\chi}_1 > 0, \quad \dot{\chi}_2 < 0$$

При аппроксимации наружным шестиугольником предельная кривая в плоскости M_1, M_2 будет иметь вид изображенный на рис. 3.

Прямая D_1D_2 соответствует реализации режимов B_4B_5 , B_1B_2 и для нее имеем

$$M_2 + M_1 = 2M_0, \quad k_2 M_0 \leq M_1 \leq k_1 M_0, \quad (11)$$

$$\dot{\chi}_2 - \dot{\chi}_1 = 0, \quad \dot{\chi}_1 > 0, \quad \dot{\chi}_2 > 0$$

$$k_1 = \frac{8b_0^2 - 5a_0^2}{6\sigma_0^- \sigma_0^+}, \quad k_2 = \frac{4b_0^2 - 7a_0^2}{6\sigma_0^- \sigma_0^+}.$$

Прямая D_2D_3 соответствует реализации режимов B_5B_6 , B_2B_3 и для нее имеем

$$2M_2 - M_1 = 3k_2 M_0, \quad -k_3 M_0 \leq M_1 \leq k_2 M_0, \quad (12)$$

$$\dot{\chi}_2 + 2\dot{\chi}_1 = 0, \quad \dot{\chi}_2 > 0, \quad \dot{\chi}_1 < 0$$

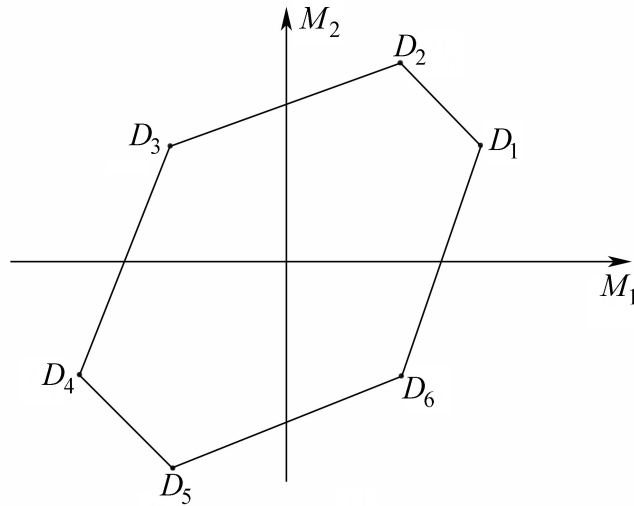


Рис. 3.

Прямая D_3D_4 соответствует реализации режимов B_6B_1 , B_3B_4 и для нее имеем

$$\begin{aligned} M_2 - 2M_1 &= 3k_2M_0, & -k_1M_0 &\leq M_1 \leq -k_3M_0, \\ 2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1 &= 0, & \dot{\chi}_2 &> 0, \dot{\chi}_1 < 0 \\ k_3 &= \frac{4b_0^2 - a_0^2}{6\sigma_0^- \sigma_0^+}. \end{aligned} \quad (13)$$

Прямая D_4D_5 соответствует реализации режимов B_1B_2 , B_4B_5 и для нее

$$\begin{aligned} M_2 + M_1 &= -2M_0, & -k_1M_0 &\leq M_1 \leq -k_2M_0, \\ \dot{\chi}_2 - \dot{\chi}_1 &= 0, & \dot{\chi}_2 &< 0, \dot{\chi}_1 < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Полученные соотношения с точностью до несущественных деталей подобны соотношениям соответствующим условиям пластичности Треска и максимального приведенного напряжения для пластин из материалов одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Поэтому многие известные решения классической теории предельного равновесия круглых и кольцевых пластин при незначительной модификации могут быть использованы для пластин из разносопротивляющихся материалов, а соотношения для внутренней и наружной аппроксимации условия пластичности П. Баландина будут полезны при использовании многих известных в литературе решений с условиями текучести Треска и максимального приведенного напряжения для получения верхних и нижних оценок предельных нагрузок в конструкциях из материалов, подчиняющихся условию пластичности П. Баландина.

В качестве примера рассмотрим круглую пластину радиуса R , опертую на контуре, нагруженную на этом контуре изгибающим моментом M_* и равномерно распределенной нагрузкой интенсивности p_0 . Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rQ) + rp_0 &= 0 \\ \frac{d}{dr}(rM_1) - M_2 &= rQ, \end{aligned} \quad (15)$$

Q – перерезывающая сила, M_1, M_2 – радиальный и окружной изгибающие моменты. Интегрируя первое уравнение, получим

$$rQ(r) = -\frac{p_0 r^2}{2} \quad (16)$$

Если в качестве предельной кривой использовать шестиугольник изображенный на рис. 2, то решение рассматриваемой задачи соответствует состоянию C_1C_2 на рис. 2, для которого $M_2 = M_0$. Подставляя это значение во второе уравнение равновесия и интегрируя его при условии $M_1(0) = M_0$, получим

$$M_1(r) = M_0 - \frac{p_0 r^2}{6} \quad (17)$$

Используя граничное условие $M_1(R) = M_*$ получим соотношения для предельных нагрузок

$$M_* + \frac{p_0 R^2}{6} = M_0 \quad (18)$$

Рассматриваемое решение будет справедливо при $M_* \geq -M_0$

Если предельная кривая соответствует шестиугольнику на рис. 3, то в зависимости от M_* в пластинке может быть реализовано либо состояние D_1D_2 во всей пластинке, либо состояние D_1D_2 на участке $0 \leq r \leq r_1$ и состояние D_2D_3 на участке $r_1 \leq r \leq R$.

В случае реализации режима D_1D_2 во всей пластинке $0 \leq r \leq R$, будем иметь

$$M_2 = 2M_0 - M_1 \quad (19)$$

и второе уравнение равновесия примет вид

$$\frac{dM_1}{dr} + 2M_1 = 2M_0 - \frac{p_0 r^2}{2}$$

Его решение

$$M_1(r) = M_0 (2 - e^{-2r}) - \frac{p_0}{2} \int_0^r r^2 e^{2r} dr \quad (20)$$

Используя граничное условие $M_1(R) = M_*$ получаем предельное соотношение между распределенной и контурной нагрузками

$$M_* + \frac{p_0}{2} \int_0^R r^2 e^{2r} dr = M_0 (2 - e^{-2R}) \quad (21)$$

Данное решение имеет место, если момент M_* на контуре пластинки удовлетворяет неравенству

$$M_* \geq k_2 M_0$$

При нарушении этого неравенства решение (20) реализуется в области $0 \leq r \leq r_1$. Граница r_1 определяется из условия

$$M_1(r_1) = k_2 M_0 \quad (22)$$

или

$$M_0 (2 - e^{-2r}) - \frac{p_0}{2} \int_0^{r_1} r^2 e^{2r} dr = k_2 M_0$$

В области $r_1 \leq r \leq R$ реализуется режим $D_2 D_3$ для которого

$$M_2 = \frac{1}{2} M_1 + \frac{3}{2} k_3 M_0$$

В этом случае второе уравнение равновесия примет вид

$$\frac{dM_1}{dr} + \frac{1}{2} M_1 = \frac{3}{2} r_3 M_0 - \frac{p_0 r^2}{2}$$

решение которого с учетом условия (22) будет иметь вид

$$M_1(r) = [\Phi_1(r) + k_2 M_0] \exp\left(\frac{r_1 - r}{r}\right), \quad (23)$$

$$\Phi_1(r) = \int_{r_1}^r \left[\frac{3}{2} k_3 M_0 - \frac{p_0 r^2}{2} \right] \exp\left(\frac{r - r_1}{2}\right) dr$$

и тогда с помощью условия $M_1(R) = M_*$ получим следующее предельное соотношение между распределенной и контурной нагрузками

$$[\Phi_1(R) + k_2 M_0] \exp\left(\frac{r_1 - R}{2}\right) = M_* \quad (24)$$

Это соотношение будет иметь место, если M_* удовлетворяет неравенству

$$M_* \geq -k_3 M_0$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лихарев К. К. Сопоставление характеристик материалов при одноосном растяжении и сжатии // Расчеты и прочность в машиностроении. М. : Машгиз, 1958. С. 168–196.
- [2] Конюшко З. М. Исследование прочности термически обработанной инструментальной стали при растяжении и сжатии // Вестник машиностроения. 1958. №2.
- [3] Свойства металлов и сплавов: справочник. М. : Металлургиздат, 1949. 896 с.
- [4] Шапошников Н. А. Механические испытания металлов. М. : Машгиз, 1954.
- [5] Эверхарт Л. Титан и его сплавы. М. : ГНТИ, 1956.
- [6] Листрова Ю. П., Мокашева Н. И. О предельном равновесии конструкций, выполненных из материалов с различными пределами текучести при растяжении и сжатии // Инженерный журнал, Механика твердого тела. 1967. №6. С. 81–85
- [7] Листрова Ю. П., Поталов В. Н., Рудис М. А. Предельное равновесие некоторых оболочек вращения, выполненных из материалов с разными пределами текучести при растяжении и сжатии // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1969. №1. С. 141–145
- [8] Прагер В. О пластическом анализе слоистых конструкций // Сб. Проблемы механики сплошной среды. М. : Изд-во АН СССР, 1961.

[9] Лепик Ю.Р. К предельному равновесию пластин, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, (Днепропетровск, 1969). М. : Наука, 1970 г.

[10] Баландин П.П. К вопросу о гипотезах прочности // Вестник инженеров и техников. 1937. №1.

[11] Ю.В. Немировский, О.Н. Шиблий, М.С. Михалишин Предельное состояние конструкций из материалов с различными пределами текучести при растяжении и сжатии // Прикладная механика. 1973. Т. 9. В.10. С.3–11.

Yu. V. Nemirovskii

COEFFICIENT OF THE INTENSITY OF STATIC INDEFINABILITY AND ACHIEVEMENT OF ABSOLUTE PLASTICITY'S CONDITION

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S.A.Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. Limit condition of round and ring plates from разносопротивляющихся materials is considered on the basis of a condition P. Balandin's plasticity. Are used entered and described piecewise and linear approximations of an ellipse of tension of Balangding and on them to basis for the generalized characteristics (the moments and speeds кривизн) laws of axisymmetric deformation round and ring are received plates at an axisymmetric cross bend.

Keywords: Cross bend, round and ring plates, разносопротивляющиеся limit state, plastic materials, the plasticity condition, law of the plastic current bending moments, curvature speeds.

REFERENCES

[1] Liharev K. K. Sopostavlenie harakteristik materialov pri odnoosnom rastyazhenii i szhatii // Raschety i prochnost' v mashinostroeni. М. : Mashgiz, 1958. S. 168–196. (in Russian)

[2] Konyushko Z. M. Issledovanie prochnosti termicheski obrabotannoj instrumental'noj stali pri rastyazhenii i szhatii // Vestnik mashinostroeniya. 1958. №2. (in Russian)

[3] Svoystva metallov i splavov: spravochnik. М. : Metallurgizdat, 1949. 896 s. (in Russian)

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S.A.Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

- [4] Шапошников Н. А. Механические испытания металлов. М. : Mashgiz, 1954. (in Russian)
- [5] ЕНверхарт Л. Титан и его сплавы. М. : GNTI, 1956. (in Russian)
- [6] Листрова Ю. П., Мокашева Н. И. О предельном равновесии конструкций, выполненных из материалов с различными пределами текучести при растяжении и сжатии // Инженерный журнал, Механика твердого тела. 1967. №6. С. 81–85 (in Russian)
- [7] Листрова Ю. П., Потопов В. Н., Рудис М. А. Предельное равновесие некоторых оболочек вращениия, выполненных из материалов с разными пределами текучести при растяжении и сжатии // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1969. №1. С. 141–145 (in Russian)
- [8] Прагер В. О пластическом анализе слоистых конструкций // Сб. Проблемы механики сплошной среды. М. : Изд-во АН СССР, 1961. (in Russian)
- [9] Лепик Ю.Р. К предельному равновесию пластин, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, (Днепропетровск, 1969). М. : Наука, 1970 г. (in Russian)
- [10] Баландин П.П. К вопросу о гипотезах прочности // Вестник инженеров и техников. 1937. №1. (in Russian)
- [11] Ю.В. Немировский, О.Н. Шиблий, М.С. Михалишин Предельное состояние конструкций из материалов с различными пределами текучести при растяжении и сжатии // Прикладная механика. 1973. Т. 9. В.10. С.3–11. (in Russian)

В. А. Кадымов

КОНТАКТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О РАСТЕКании КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОСТИ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Еще в середине прошлого века А. А. Ильюшин предложил эффективную двумерную, осредненную по толщине слоя, математическую модель течения тонкого пластического слоя между сближающимися жесткими плитами. В рамках этой модели он сформулировал краевую задачу для «вязкой жидкости» относительно трех неизвестных функций, двух компонент скорости течения и контактного давления, в области с подвижной границей. Он также указал на возможность упрощения постановки задачи до течения «идеальной жидкости». Все последующие исследователи в своих работах ограничивались этой упрощенной постановкой. В работе рассмотрены такие течения пластического слоя, которые невозможно описать в модели «идеальной жидкости». В рамках упрощенной постановки решена краевая задача течения тонкого пластического слоя в клиновидной области, составленного из двух разных сред. Проверено, что полученное решение не удовлетворяет одному из динамических условий на границе раздела двух пластических сред. Для корректного описания представленной задачи надо использовать модель «вязкой жидкости», или более простую теорию пограничного слоя.

Ключевые слова: осадка слоя из пластического материала; квазистатическая постановка краевой задачи; свободное растекание на плоскости.

УДК: 539.3

1. Введение. Выделим один класс задач пластического течения материала в сравнительно тонком слое между сближающимися поверхностями тел инструмента [1-3]. К таковым примыкает подавляющее большинство технологических задач обработки давлением, таких как штамповка и прессование тонкостенных элементов конструкций, тонколистовая прокатка, дрессировка и др. Это сложные объемные задачи пластического формоизменения с разнообразием параметров, определяющих свойства материала. В рассматриваемых процессах развиваются высокие давления, на порядок превышающие сдвиговые свойства материала слоя. Требования к точности конечной детали определяют другую особенность этих процессов. Как известно [3], большие

© Кадымов В. А., 2018

Кадымов Вагид Ахмедович

e-mail: vkadymov@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Поступила 10.02.2018

контактные давления вызывают нормальные упругие перемещения рабочих поверхностей тел инструмента, соизмеримые с толщиной пластического слоя. А следовательно, неучет упругих перемещений тел инструмента становится неоправданным. На указанные процессы растекания пластических слоев заметное влияние могут оказывать силы инерции, температуры и тепловые потоки, объемная сжимаемость, касательные напряжения. Перечисленные выше особенности, присущие процессам течения в тонком пластическом слое, достаточно подробно изучены и представлены в научной литературе. Для описания указанного течения тонкого пластического слоя А.А.Ильюшин предложил эффективную двумерную, осредненную по толщине слоя математическую модель [1], к которой приводит исходная трехмерная задача течения идеально пластического тела. Переход к двумерной задаче проводился на основе специальных гипотез, предложенных в результате анализа известного решения Прандтля в задаче об осадке плоского, в вертикальном разрезе, слоя пластического материала [2]. На контактных поверхностях принимается условие полного проскальзывания материала, а касательные напряжения достигают максимального значения, равного пределу текучести материала слоя на сдвиг. В рамках этой модели сформулирована краевая задача для «вязкой жидкости» в области с подвижной границей относительно трех неизвестных функций- контактного давления p и двух компонент u, v скорости течения. Такая краевая задача описывается дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка. Он же указал на возможность упрощения постановки до задачи для «идеальной жидкости», в которой принимаются условия полной пластичности, и соответственно, пренебрегают касательными напряжениями. Все последующие исследователи до недавнего времени в своих работах ограничивались этой упрощенной постановкой [3], представленной нелинейными уравнениями в частных производных первого порядка; она достаточно наглядна и доступна для инженерных расчетов. На ее основе разработаны различные математические методы решения задач течения в тонком пластическом слое. Однако, не все процессы течения в тонком пластическом слое могут быть описаны в рамках упрощенной модели «идеальной жидкости». Недавно такие случаи были рассмотрены в работах автора: теоретическое исследование задачи о растекании пластического слоя, состоящего из двух разных сред [5], и экспериментальная работа по исследованию процесса растекания слоя в области с неподвижной границей [6]. Для корректного описания в таких случаях необходимо использовать более общую модель «вязкой жидкости». В настоящей работе подробно исследуется постановка задачи о растекании пластического слоя, состоящего из двух разных сред, и дается ее решение для клиновидной области в модели «идеальной жидкости».

2. Постановка краевой задачи (модель «вязкой жидкости») в размерных величинах. В процессах течения тонкого пластического слоя, как известно [1], достигаются большие давления, на порядок превышающие сдвиговые свойства материала, и, в начальном приближении, свойства материала пластического слоя близки к свойствам гидродинамической жидкости. При этом, однако, влияние сдвиговых свойств остается заметным в задачах растекания слоя, составленного из разных идеально-пластических сред. Пусть слой, составленный из разных идеально-пластических сред, сжимается между двумя параллельно сближающимися по нормали плоскостями жестких шероховатых плит (рис.1).

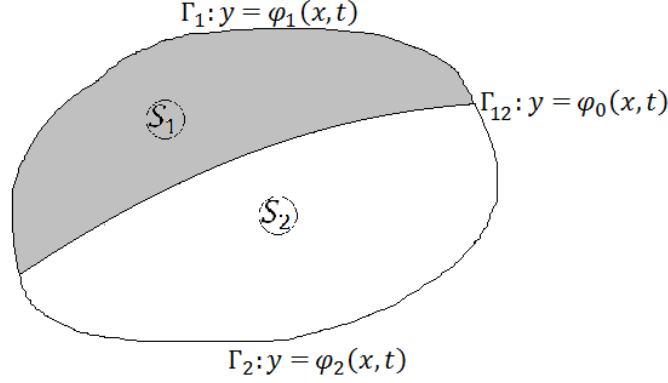


Рис. 1. Слой, составленный из двух идеально-пластических сред, в плане

Тогда основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta v - \frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

p , u , v – контактное давление и скорости течения; $\sigma_{sk} = \sqrt{3}\tau_{sk}$ ($k = 1, 2$) – предел текучести пластического материала в области S_1 и S_2 соответственно; $h = h(t)$ – известный закон изменения толщины слоя; $\lambda(t) = \ln(h_0/h(t))$ – степень деформации; $h_0 = h(t_0)$.

Выпишем условия на границе раздела двух пластических сред $\Gamma_{12} : y = \varphi_0(x, t)$:

$$\sigma_{11}^{(1)} \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(2)}, \quad (4)$$

$$\sigma_{12}^{(1)} \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(2)}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = v_k, \quad (6)$$

и свободной границе $\Gamma_k : y = \varphi_k(x, t)$, ($k = 1, 2$):

$$\sigma_{11}^{(k)} \left(-\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(k)} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{12}^{(k)} \left(-\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = v_k, \quad (9)$$

где

$$\sigma_{11}^{(k)} = -p_k + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk}\frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial u_k}{\partial x};$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{sk}\frac{dt}{d\lambda}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x}\right);$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = -p_k + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk}\frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial v_k}{\partial y}.$$

3. Краевая задача в безразмерных величинах. Упрощение краевой задачи. Пусть h_0, L_0, v_0, p_0 – характерные значения толщины слоя, линейного размера слоя, скорости течения и контактного давления; $\varepsilon = h_0/L_0 \ll 1$ – малый параметр, характеризующий тонкость пластического слоя. Примем, что $p_0 = \sigma_{s1}/\varepsilon$, $v_0 = -(dh(t_0)/dt)/\varepsilon$. Тогда, в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon \frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \varepsilon \frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{v} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_1, \quad (11)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{3} \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (12)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{3} \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{v} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_2, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad \text{в } S_1 \cup S_2, \quad (14)$$

где $\delta = \sigma_{s1}/\sigma_{s2}$.

Динамические условия (4),(5) на Γ_{12} (черточки над безразмерными величинами убираем) разрешим относительно контактного давления:

$$(p_1 - p_2) \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) = \varepsilon A, \quad p_1 - p_2 = \varepsilon B, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A &\equiv \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{2}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right], \\ B &\equiv \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \\ &+ \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{2}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Как видно из (15), $p_1 - p_2$ есть малый параметр, который определяется однозначно, если:

$$A + B \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

или:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \left(\frac{\partial \varphi_0^2}{\partial x} - 1 \right) = \\ & = 2 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Аналогично поступаем с динамическими условиями (7),(8) на свободной границе:

$$p_k \left(-\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) = \varepsilon A_1, \quad p_k = \varepsilon B_1, \quad (17)$$

где p_k – малый параметр, определяемый однозначно, если только

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi_k^2}{\partial x} - 1 \right) = 2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} - \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right). \quad (18)$$

Если отказаться от условий (16) и (18), то, в главном приближении, ($\varepsilon = 0$) исходная краевая задача для «вязкой жидкости» сводится к известной задаче о растекании слоя, составленного из идеально-пластического материала, в приближении «идеальной жидкости» относительно искомым переменных u, v, p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \text{в } S_1 \\ p_1 &= p_2 \quad \text{на } \Gamma_{12}, \\ p_k &= 0 \quad \text{на } \Gamma_k (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение несжимаемости (14), а также кинематические граничные условия (6) и (9) остаются без изменения.

4. Задача о свободном растекании пластического слоя, состоящего из разных сред, в постановке модели «идеальной жидкости». В рамках упрощенной постановки ставится краевая задача течения тонкого пластического слоя в клиновидной области, составленной из двух разных сред. Пусть пластический слой постоянной толщины в начальный момент имеет форму клиновидной области и состоит из двух разных сред с начальными углами раствора α_1 и α_2 соответственно (рис.2). Предположим, что такой слой свободно растекается между параллельно сближающимися жесткими шероховатыми плитами. Подобная задача, в условиях симметрии области, в постановке «модели идеальной жидкости» решена в [5].

Выберем неподвижную систему координат oxy , в которой в начальный момент $t = t_0$ указанная область задается углом $\beta_2 \geq 0$. При этом уравнения границ растекающейся области в начальный момент заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : y &= k_1 x, \quad k_1 > 0, \\ \Gamma_2 : y &= k_2 x, \quad k_2 \leq 0, \\ \Gamma_{12} : y &= k_0 x, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, k_0 определяются через α_1, α_2 и β_2 :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_2 &= -k_2, \\ \operatorname{tg} (\alpha_2 - \beta_2) &= k_0, \\ \operatorname{tg} [\alpha_1 + (\alpha_2 - \beta_2)] &= k_1. \end{aligned}$$

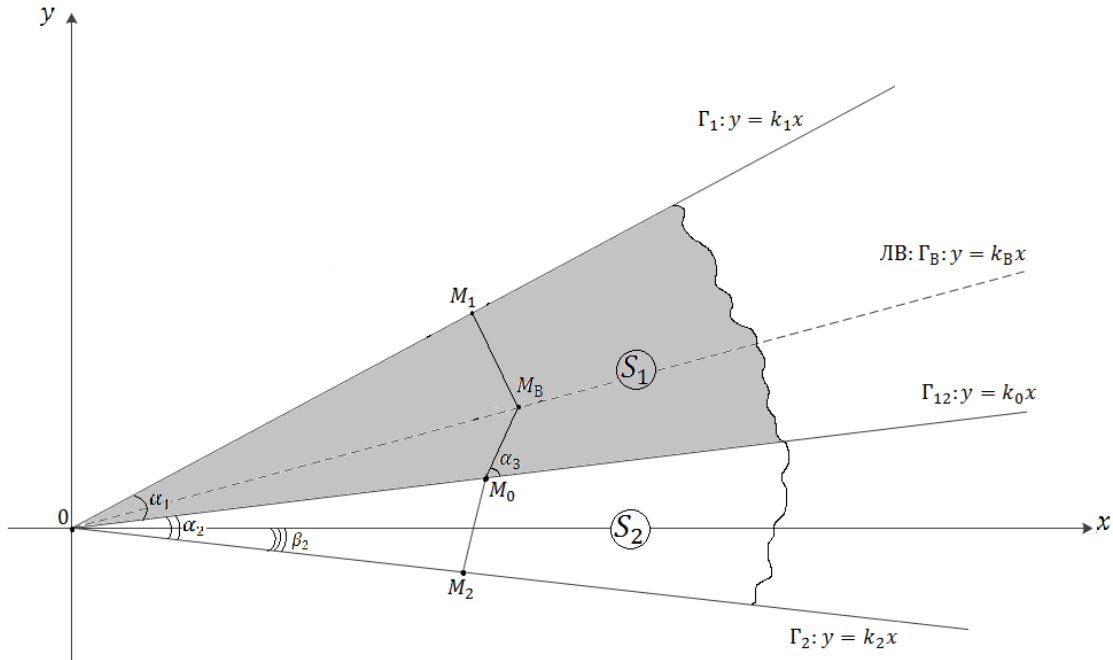


Рис. 2. О растекании в клиновидной области пластического слоя, состоящего из двух разных сред

Выпишем основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости (в размерных величинах,):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

а также условия на неизвестной границе раздела двух сред $\Gamma_{12} (y = \varphi_0(x, t), t > t_0)$, которая в начальный момент задана уравнением $\varphi_0(x, t_0) = k_0x$:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} &= v, \end{aligned}$$

и на неизвестных свободных границах $\Gamma_m (y = \varphi_m(x, t), t > t_0, m = 1, 2)$, которые в начальный момент также известны ($\varphi_m(x, t_0) = k_mx$):

$$\begin{aligned} p &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} &= v. \end{aligned}$$

Здесь p, u, v – контактное давление и скорости течения; $\sigma_{sk} = \sqrt{3}\tau_{sk} (k = 1, 2)$ – предел текучести пластического материала в области S_1 и S_2 соответственно, причем

для определенности положим, что $\sigma_{s1} \leq \sigma_{s2}$; $h = h(t)$ – известный закон изменения толщины слоя; $\lambda(t) = \ln(h_0/h(t))$ – степень деформации; $h_0 = h(t_0)$. Пусть L_0 – характерное значение линейного размера слоя. Вводя безразмерные величины:

$$\varepsilon = h_0/L_0, \quad \delta = \sigma_{s1}/\sigma_{s2} \geq 1, \quad p_0 = \sigma_{s1}/\varepsilon, \quad v_0 = -(dh(t_0)/dt)/\varepsilon,$$

перепишем соотношения задачи в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_1, \quad (20)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (21)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_2 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad \text{в } S_1 \cup S_2, \quad (23)$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \quad \text{на } \Gamma_{12}, \quad (25)$$

$$\bar{p} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \quad \text{на } \Gamma_k (k = 1, 2). \quad (27)$$

Задача решается в безразмерных величинах. Для удобства записи черточки над безразмерными величинами ниже опускаем. Как известно [1], внутри области течения существует линия ветвления течения, образованная пересечением двух различных линий тока и на которой $u^2 + v^2 = 0$. С другой стороны, при $h = h(t)$ линиями тока служат прямые, ортогональные к контуру свободно растекающегося пластического слоя. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – некоторая точка на линии раздела двух сред Γ_{12} . Для определенности положим, что:

$$\sigma_{s1} \sin \alpha_1 \geq \sigma_{s2} \sin \alpha_2. \quad (28)$$

Предположение (28) означает лишь, что линия ветвления течения в начальный момент $t = t_0$ располагается в области S_1 . Поэтому продолжим линию тока, исходящую из области S_2 , в область S_1 , отсчитывая от точки $M_0 \in \Gamma_{12}$. Для этого найдем угол преломления $\pi/2 - \alpha_3$ линии тока в точке M_0 [5]:

$$\frac{dp(s)}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \cos \alpha_3,$$

$$\delta \cos \alpha_3 = \sin \alpha_2, \quad (29)$$

где s – параметр длины дуги вдоль линии Γ_{12} . Формула (29) означает, что при пересечении линии раздела двух пластических сред линия тока преломляется, причем угол

преломления увеличивается при прохождении в «менее плотную» среду (аналогия с оптикой). Из (29) следует, что все линии тока входят в область S_2 под постоянным углом к оси ox . Теперь, зная линию тока, исходящую из точки $M_0 \in \Gamma_{12}$, можем найти на ней точку $M_B(x_B, y_B)$ ветвления течения из следующего условия:

$$\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{1}{\delta} (OM_0 \sin \alpha_2) + \frac{2}{\sqrt{3}h} (M_0 M_B) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x_B - y_B)}{\sqrt{1 + k_1^2}} \quad (30)$$

В (30) справа стоит выражение для контактного давления в точке M_B , найденного вдоль другой линии тока, исходящей от контура Γ_1 , причем величина:

$$s = \frac{|k_1 x_B - y_B|}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \frac{k_1 x_B - y_B}{\sqrt{1 + k_1^2}},$$

есть расстояние от точки M_B до границы Γ_1 .

Находим оставшиеся в (30) величины:

$$OM_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = x_0 \sqrt{1 + k_0^2}.$$

Уравнение прямой $M_0 M_B$:

$$y_0 - y = \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3)(x - x_0), \quad (31)$$

где $\beta_0 \equiv \operatorname{arctg} k_0 \geq 0$.

Из (29) получаем:

$$k_5 \equiv \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tg} \beta_0 + \operatorname{tg} \alpha_3}{1 - \operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{k_0 \sin \alpha_2 + \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}}{\sin \alpha_2 - k_0 \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}}. \quad (32)$$

С другой стороны:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}[(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_2] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) + \operatorname{tg} \beta_2}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) \operatorname{tg} \beta_2} = \frac{k_0 - k_2}{1 + k_0 k_2};$$

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{k_0 - k_2}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} > 0. \quad (33)$$

Подставим (33) в (32) и найдем k_5 в зависимости от k_2 , k_0 и δ :

$$k_5 = \frac{k_0(k_0 - k_2) + \sqrt{\delta^2(1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{(k_0 - k_2) - k_0 \sqrt{\delta^2(1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}. \quad (34)$$

В частности, при $\delta = 1$ (т.е. пластическая среда – однородная) из (34) и (31) соответственно получаем:

$$k_5 = -\frac{1}{k_2}, \quad M_0 M_B = \sqrt{(y_B - y_0)^2 + (x_B - x_0)^2} = |x_B - x_0| \sqrt{1 + k_5^2}, \quad (35)$$

где учтено, что

$$y_B = y_0 + k_5(x_B - x_0) = k_0 x_0 + k_5(x_B - x_0).$$

Подставим (33), (34), (35) в (30):

$$\frac{1}{\delta} \left(x_0 \sqrt{1 + k_0^2} \right) \sin \alpha_2 + |x_B - x_0| \sqrt{1 + k_5^2} = \frac{k_1 x_B - (y_0 + k_5(x_B - x_0))}{\sqrt{1 + k_1^2}}.$$

Разрешим последнее соотношение относительно x_B ($x_B \geq x_0$):

$$x_B = x_0 \frac{f_1(k_1, k_2, k_0, \delta)}{f_2(k_1, k_2, k_0, \delta)}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv -\frac{1}{\delta} \sqrt{1 + k_0^2} \sin \alpha_2 + \sqrt{1 + k_5^2} + \frac{k_5 - k_0}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \\ &= -\frac{1}{\delta} \frac{\sqrt{1 + k_0^2} (k_0 - k_2)}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} + \sqrt{1 + k_5^2} + \frac{k_5 - k_0}{\sqrt{1 + k_1^2}}; \\ f_2 &\equiv \sqrt{1 + k_5^2} - \frac{k_1 - k_5}{\sqrt{1 + k_1^2}}. \end{aligned}$$

Как видно из (35), (36), линия ветвления (ЛВ) в момент $t = t_0$ есть прямая:

$$y_B = k_B x_B, \quad k_B \equiv \frac{f_1 k_5 + f_2 (k_0 - k_5)}{f_1}. \quad (37)$$

В частности, при $\delta = 1$ формула (37) упрощается:

$$k_B = \frac{k_2 \sqrt{1 + k_1^2} + k_1 \sqrt{1 + k_2^2}}{\sqrt{1 + k_1^2} + \sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$\arctg k_B - \arctg k_2 = \arctg k_1 - \arctg k_B = \frac{1}{2} (\arctg k_1 - \arctg k_2).$$

Последняя формула означает, что для однородного пластического слоя линия ветвления равноотстоит от линий свободных контуров Γ_1 и Γ_2 . Если дополнительно принять, что $k_2 = -k_1$ то получаем:

$$k_B = 0,$$

т.е. линия ветвления совпадает с осью ox .

Получим теперь зависимости для контактного давления и скорости течения в начальный момент. Рассмотрим сперва область S_{1B} , ограниченную линиями Γ_1 и Γ_B . Линия тока, проходящая через точку $M(x, y) \in S_{1B}$:

$$y - y_B = -\frac{1}{k_1} (x - x_B).$$

Последнее условие, с учетом (37), разрешается относительно x_B :

$$x_B = \frac{k_1 y + x}{k_1 k_B + 1}$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x - y)}{\sqrt{1 + k_1^2}}, \\
 V(x, y) &= \frac{d\lambda}{dt} |x_B - x| \sqrt{1 + \frac{1}{k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x) \sqrt{1 + k_1^2}}{k_1} = \\
 &= \frac{d\lambda}{dt} \frac{\sqrt{1 + k_1^2}}{k_1 k_B + 1} (y - k_B x), \\
 u &= -V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = -V \sin \beta_1 = -\frac{V k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) = \\
 &= -\frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 (y - k_B x)}{k_1 k_B + 1}, \\
 v &= V \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = V \cos \beta_1 = \frac{V}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x)}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1}, \quad (38)
 \end{aligned}$$

где $\beta_1 \equiv \arctg k_1 > 0$.

Рассмотрим теперь область S_{B0} , ограниченную линиями Γ_B и Γ_{12} . Линия тока, проходящая через точку $M(x, y) \in S_{B0}$, имеет вид:

$$y - y_B = k_5 (x - x_B).$$

Разрешим последнее условие относительно x_B :

$$x_B = \frac{y - k_5 x}{k_B - k_5}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= p(M_B) + \frac{2}{\sqrt{3}h} (M_B M) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x_B - y_B)}{\sqrt{1 + k_1^2}} + \\
 &+ \frac{2}{\sqrt{3}h} \sqrt{(y - y_B)^2 + (x - x_B)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}h} \left(\frac{y - k_5 x}{k_B - k_5} \right) \frac{(k_1 - k_B)}{\sqrt{1 + k_1^2}} + \\
 &\frac{2}{\sqrt{3}h} \left(\frac{y - k_B x}{k_B - k_5} \right) \sqrt{1 + k_5^2}, \quad (39) \\
 V(x, y) &= \frac{d\lambda}{dt} (M_B M) = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} = \\
 &= \frac{d\lambda}{dt} |x - x_B| \sqrt{1 + k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) \sqrt{1 + k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1 + k_5^2} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5}, \\
 u &= -V \cos(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V}{\sqrt{1 + k_5^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5}, \\
 v &= -V \sin(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V \operatorname{tg}(\alpha_3 + \beta_0)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_3 + \beta_0)}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) k_5 = \\
 &= -\frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x) k_5}{k_B - k_5}. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, область S_{B2} , ограниченную линиями Γ_{12} и Γ_2 . Линия тока, проходящая через точку $M(x, y) \in S_{B2}$, имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k_2}(x - x_0).$$

Разрешим последнее условие относительно :

$$x_0 = \frac{k_2 y + x}{k_2 k_0 + 1}.$$

Тогда,

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{|k_2 x - y|}{\sqrt{1 + k_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{-k_2 x + y}{\sqrt{1 + k_2^2}}.$$

Скорость течения в точке M_0 допускает разрыв. Найдем скорость в точке M_0 , со стороны рассматриваемой части области течения, используя непрерывность нормальной скорости, а также условие (39):

$$V(M_{02}) = V(M_{01}) \frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_2} = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1 + k_5^2} \frac{y_0 - k_B x_0 \sin \alpha_3}{k_B - k_5 \cos \alpha_2}.$$

С другой стороны, согласно (29) и (33),

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha_2}} = \frac{1 + k_0 k_2}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}, \\ \sin \alpha_3 &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} = \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2} \sin^2 \alpha_2} = \\ &= \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta \sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}, \end{aligned}$$

В результате,

$$V(M_{02}) = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1 + k_5^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_2 k_0 + 1)} x_0,$$

$$\begin{aligned} V(x, y) &= V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} (M_0 M) = V(M_{02}) + \\ &+ \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} (x_0 - x) \frac{\sqrt{1 + k_2^2}}{-k_2} = \\ &= \frac{d\lambda}{dt} \psi(x, y), \end{aligned}$$

$$\psi \equiv \frac{1}{k_2 k_0 + 1} \left[\psi_1 - \sqrt{1 + k_2^2} (y - k_0 x) \right],$$

$$\psi_1 \equiv \sqrt{1 + k_5^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_2 k_0 + 1)} (k_2 y + x),$$

$$u(x, y) = -V(M) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2 \right) = -V(M) \sin \beta_2 = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi k_2}{\sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$v(x, y) = -V(M) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) = -V(M) \cos \beta_2 = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi}{\sqrt{1+k_2^2}}. \quad (41)$$

Итак, нашли распределение p, u, v во всей области течения в начальный момент. Покажем, что линии $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{12}$ остаются прямыми. Допустим, что они остаются прямыми, то есть их можно задать уравнениями:

$$\Gamma_1 : y = k_1(t) x, \quad (42)$$

$$\Gamma_2 : y = k_2(t) x, \quad (43)$$

$$\Gamma_{12} : y = k_0(t) x.$$

Подставим (42) в кинематические условия (27):

$$\Gamma_1 : \dot{k}_1 x - k_1 \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1},$$

в которой использованы формулы (38) относительно скоростей, а $y = k_1 x$. Или:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \dot{k}_1 - \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1^2(k_1 - k_B)}{k_1 k_B + 1} &= \frac{d\lambda}{dt} \frac{(k_1 - k_B)}{k_1 k_B + 1}, \\ \Gamma_1 : \frac{dk_1}{d\lambda} &= \frac{(k_1 - k_B)(1 + k_1^2)}{k_1 k_B + 1}. \end{aligned} \quad (44)$$

Аналогично получаем дифференциальное уравнение относительно Γ_2 :

$$\Gamma_2 : \dot{k}_2 x + k_2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi k_2}{\sqrt{1+k_2^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi}{\sqrt{1+k_2^2}},$$

где ψ определяется из (41), в которой $y = k_2 x$:

$$\psi(x) = \psi_0 x,$$

$$\psi_0 \equiv \frac{1}{k_2 k_0 + 1} \left[\psi_2 - \sqrt{1+k_2^2} (k_2 - k_0) \right],$$

$$\psi_2 \equiv \sqrt{1+k_2^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2(1+k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta(k_2 k_0 + 1)} (k_2^2 + 1),$$

или

$$\Gamma_2 : \frac{dk_2}{d\lambda} = -\psi_0 \sqrt{1+k_2^2}. \quad (45)$$

В частности, при $\delta = 1$ и $k_2 = -k_1$ формулы (44) и (45) упрощаются:

$$\Gamma_1 : \frac{dk_1}{d\lambda} = k_1 (1 + k_1^2),$$

$$\Gamma_2 : \frac{dk_2}{d\lambda} = k_2 (1 + k_2^2), \quad \psi_0 = -k_2 \sqrt{1+k_2^2},$$

т.е. получили известное дифференциальное уравнение задачи о растекании однородного пластического слоя, занимающей область формы клина.

И, наконец, третье дифференциальное уравнение (25) относительно Γ_{12} :

$$\Gamma_{12} : \dot{k}_0 x - k_0 \frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x) k_5}{k_B - k_5},$$

где использованы формулы (40) для скоростей, в которых $y = k_0x$. Или,

$$\Gamma_{12} : \frac{dk_0}{d\lambda} = \frac{(k_0 - k_B)(k_0 - k_5)}{k_B - k_5}. \quad (46)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (44), (45), (46) в общем случае решается численными методами. В результате получаем законы (42) изменения границ пластических областей в процессе растекания. Таким образом, мы представили в полном виде точное решение несимметричной задачи о растекании пластического слоя, составленного из двух клиньев, в «модели идеальной жидкости». **5. Заключение.** 1. В работе обсуждается краевая задача течения в тонком пластическом слое, которая в общей, первоначальной постановке впервые нашла применение в работах автора – все предыдущие исследователи ограничивались упрощенной ее постановкой. 2. Представлено в полном виде точное решение несимметричной задачи о растекании пластического слоя, составленного из двух клиньев, в модели «идеальной жидкости». Показано, что границы этих клиньев остаются прямыми в процессе растекания. Выведены уравнения для эволюции их границ. Установлено, что линия ветвления течения остается прямой в процессе растекания. Получена формула для нахождения линии ветвления течения. Проверено, что полученное решение не удовлетворяет одному из динамических условий на границе раздела двух пластических сред в виде (16), (18). Отметим, что ранее (в задаче о растекании пластического слоя в области с неподвижными границами) было показано, что полученные на основе упрощенной модели решения не согласуются с результатами эксперимента [6]. 3. Для решения задач течения в тонком пластическом слое в общей постановке предлагается известный метод погранслоя, разработанный применительно к указанным задачам в работах автора [4].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Труды (1946-1966). Т.2. Пластичность. М. : Физматлит, 2004. 480с.
- [2] Prandtl L.// ZAMM. 1923. №3(6). P.401–406.
- [3] Кийко И. А. Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
- [4] Белов Н. А. , Кадымов В.А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами// Изв.РАН. МТТ. 2011. №1. С.46–58.
- [5] Кадымов В. А. Математическое моделирование контактных задач пластического течения, 2016. 129 с.
- [6] Кадымов В. А., Сосенушкин Е. Н., Белов Н. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора// Изв.МАМИ. 2013. №2(16). Т.2. С. 206–212.

V. A. Kadymov

**CONTACT BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE
PIECEWISE-HOMOGENEOUS PLASTIC LAYER SPREADING ON A PLANE**

Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia

Abstract. In the middle of last century A. Il'yushin suggested an efficient two-dimensional, averaged on the layer thickness, mathematical theory of the thin plastic layer flow between two converging rigid plates, formulated the boundary-value problem for «viscous fluid» regarding three unknown functions, two components of velocity and contact pressure. Besides he pointed out the possibility of simplification of the formulation of boundary-value problem till the flow for «ideal fluid». It should be noted, that all successive researchers used the same approach. The flows of plastic layer, which are impossible to describe with the help of «ideal fluid» model, are being considered. For their correct description it is necessary to use the model of «viscous fluid», or the simplified theory of boundary layer, which for indicated problems is developed in the works of the author.

Keywords: : the thin plastic layer; the boundary value problem; a free flow in the plane.

REFERENCES

- [1] Il'yushin A. A. Trudy (1946-1966). T.2. Plastichnost'. M. : Fizmatlit, 2004. 480s. (in Russian)
- [2] Prandtl L.// ZAMM. 1923. №3(6). P.401–406.
- [3] Kijko I. A. Teoriya plasticheskogo techeniya. M.: MGU, 1978. 75 s. (in Russian)
- [4] Belov N. A. ., Kadymov V.A. O kraevoy zadache techeniya plasticheskogo sloya mezhdru sblizhayushchimisya zhestkimi plitami// Izv.RAN. MTT. 2011. №1. S.46–58. (in Russian)
- [5] Kadymov V. A. Matematicheskoe modelirovanie kontaktnyh zadach plasticheskogo techeniya, 2016. 129 s. (in Russian)
- [6] Kadymov V. A., Sosenushkin E. N., Belov N. A. Eksperimental'nye issledovaniya po plasticheskoy osadke mezhdru nepodvizhnymi stenkami tonkih polos v forme pryamougol'nika i sektora// Izv.MAMI. 2013. №2(16). T.2. S. 206–212. (in Russian)

Kadimov Vagid Ahmedovich,
e-mail: vkadymov@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia.

Р. И. Непершин

СДАВЛИВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СФЕРЫ ПЛОСКИМИ ШТАМПАМИ

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва,
Россия

Аннотация. Приведено моделирование пластического сдавливания жесткопластической сферы плоскими штампами при условии полной пластичности на ребре призмы Треска. Рассчитываются линии скольжения, напряжения и скорости пластического течения с учетом контактного трения, изменения границ пластической области и формы сферы. Результаты работы представляют интерес для оценки предельной нагрузки и формоизменения сферы при больших перемещениях штампов.

Ключевые слова: сжатие сферы, плоский штамп, идеальная пластичность, осевая симметрия, условие полной пластичности, линии скольжения, напряжения, скорости течения, контактное трение.

УДК: 539. 374

Введение. Первая задача осесимметричного пластического течения идеально пластического тела при давлении плоского кругового штампа и вдавливании жесткой сферы в пластическое полупространство при условии полной пластичности решена А.Ю. Ишлинским [1-3]. В последующих работах Р. Шилда [4,5] получены уравнения кинематики пластического течения, ассоциированные с ребром условия пластичности Треска, показана непрерывность скоростей на жесткопластических границах, и получены сингулярные поля скоростей в окрестности оси симметрии для гладкого плоского штампа и штампа с максимальным контактным трением.

В [6] решение А.Ю. Ишлинского о вдавливании гладкой сферы дополнено расчетами поля скоростей пластического течения с проверкой положительности диссипативной функции. В [7-10] задача А.Ю. Ишлинского о вдавливании плоского кругового штампа и сферы рассматривалась с учетом контактного трения и изменения формы свободной границы пластической области. Показано, что искривление свободной пластической границы в процессе вдавливания жесткой гладкой сферы незначительно влияет на среднее контактное давление, полученное А.Ю. Ишлинским для прямолинейной свободной границы.

© Непершин Р. И., 2018

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin_ri@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 15.01.2018

В настоящей работе представлено моделирование обратной задачи о пластическом сдавливании жесткопластической сферы плоскими штампами при изменении границы контакта и свободной пластической границы деформируемой сферы с учетом контактного трения. Свободная пластическая граница принимается прямолинейной и вычисляется из условия несжимаемости с последующими вычислениями линий скольжения, напряжений, скоростей перемещений и контролем положительности диссипативной функции. Предположение о линейности свободной границы пластической области подтверждается практически линейной формой смещения этой границы по расчетному полю скоростей при малом перемещении штампов.

Результаты моделирования представляют интерес для оценки предельной нагрузки на жесткопластическую сферу по пластическому отпечатку и пластического формоизменения сферы в диск, сжимаемый жесткими штампами.

Форма деформируемой сферы. При сжатии жесткопластической сферы плоскими штампами образуются круговые границы контакта с выдавливанием материала на свободную поверхность сферы. Свободная пластическая граница выдавливаемого материала, определяющая область двухмерного пластического течения, принимается прямолинейной с непрерывной касательной к недеформируемой части сферы. Это предположение подтверждается ниже практически линейным смещением свободной границы пластической области по расчетному полю скоростей при малом перемещении штампов на различных стадиях деформирования сферы.

Изменение формы сферы с увеличением радиуса контакта, длины и угла наклона свободной границы пластической области при сжатии сферы определяется условием пластической несжимаемости материала в координатах r, z с началом отсчета в центре неподвижной сферы. В этих координатах расчетная область имеет плоскость симметрии $z = 0$. Вследствие осевой симметрии задача рассматривается в первом квадранте плоскости r, z (рис. 1). Радиус R недеформированной сферы принимается за характерный размер. При перемещении s штампа относительно начальной точки контакта с недеформированной сферой (показана штриховой линией) образуется граница контакта с радиусом r_A и свободная граница AB длиной l касательная к недеформируемой сфере с углом наклона α к границе плиты. Деформируемый сегмент сферы с высотой $1 - \cos \alpha$ принимает форму усеченного конуса с высотой h . Из условия пластической несжимаемости следует равенство объема сегмента сферы и усеченного конуса, приводящее к кубическому уравнению для h при заданном угле α

$$h^3 - 3h(h \cos \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1)$$

Переменные r_A, l и s связаны с α и h соотношениями

$$r_A = \sin \alpha - l \cos \alpha, \quad l = h / \sin \alpha, \quad s = 1 - h - \cos \alpha, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

При $\alpha = 0$ и $s = 0$ уравнение (1) имеет решение $h = 0$. При $\alpha = \pi/2$ из уравнения (1) находим $h = 2/3$ и $s = 1/3$. При $0 < \alpha < \pi/2$ уравнение (1) решаем по формулам Кардано для переменной $l = h / \sin \alpha$, так как при малых углах α левая и правая части в уравнении (1) стремятся к нулю. Кубическое уравнение для переменной l имеет вид

$$l^3 + al^2 + bl = c, \quad (3)$$

где

$$a = -3 \operatorname{tg} \alpha, \quad b = 3 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad c = (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) / (\sin \alpha \cos^2 \alpha).$$

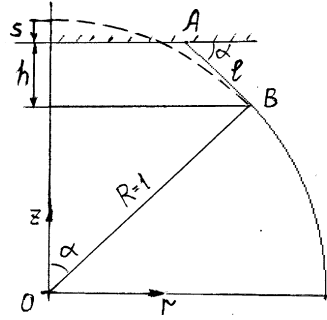


Рис. 1. Сдавливание жесткопластической сферы плоским штампом

Подстановка $l = u + \operatorname{tg} \alpha$ приводит уравнение (3) к виду $u^3 = c - \operatorname{tg}^3 \alpha$ с одним действительным корнем для переменной u , и решение уравнений (3) и (1) имеет вид

$$l = (c - \operatorname{tg}^3 \alpha)^{1/3} + \operatorname{tg} \alpha, \quad h = l \sin \alpha, \quad (4)$$

где c — правая часть уравнения (3). При $\alpha = \pi/2$ и $s = 1/3$ сфера деформируется в цилиндр, сжимаемый плоскими штампами с отношением диаметра к высоте цилиндра $D/H = 3/2$. При $s > 1/3$ происходит сжатие цилиндра с увеличением отношения D/H , которое исследовано в [11]. При больших отношениях D/H при сжатии тонкого диска среднее давление q на границах контакта определяется отношением D/H и коэффициентом пластического трения μ

$$q = 1 + 1/3\mu D/H, \quad 0 < \mu < 0.5. \quad (5)$$

Линии скольжения. Осесимметричное пластическое течение при сдавливании сферы плоскими штампами происходит сдвигом материального элемента по двум плоскостям скольжения при условии полной пластичности на ребре призмы Треска. В пространстве главных напряжений, отнесенных к напряжению текучести $\sigma_Y = 1$, при положительной радиальной скорости V_r условие полной пластичности имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \sigma_1, \quad (6)$$

где σ_1 и σ_2 — главные напряжения в плоскости r, z и $\sigma_3 = \sigma_\theta$ — нормальное напряжение в окружном направлении. Дифференциальные уравнения равновесия осесимметричной задачи пластичности при условии (6) относятся к гиперболическому типу с характеристиками, совпадающими с ортогональными линиями скольжения ξ, η на плоскости r, z [3]

$$dz/dr = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad dz/dr = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \eta, \quad (7)$$

где φ — угол наклона касательной к линии скольжения ξ с осью r . Вдоль линий скольжения касательные напряжения максимальны $\tau = 1/2$, а нормальные напряжения $\sigma = 1/2(\sigma_1 - \sigma_2)$ и угол φ удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$d\sigma - d\varphi = (dr + dz)/2r \quad \text{вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = (dr - dz)/2r \quad \text{вдоль } \eta. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) при заданных статических граничных условиях представляют замкнутую систему для координат r, z и переменных σ и φ . Напряжения в цилиндрических координатах определяются по формулам

$$\sigma_r = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma + \frac{1}{2}, \quad \tau_{rz} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi. \quad (9)$$

При расчете линий скольжения и скоростей перемещений в пластической области за характерный размер принимаем радиус контакта $r_A = 1$ с началом координат r, z в центре границы контакта (рис. 2). Линии скольжения определяются граничными условиями сжатия вдоль границы AB с длиной l и углом наклона α

$$\sigma_2 = -1, \quad \sigma_1 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \pi/4 - \alpha, \quad (10)$$

контактным трением μ на границе скольжения AF

$$\varphi = \gamma - \pi/2, \quad \gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu), \quad 0 < \mu < \frac{1}{2} \quad (11)$$

и условием симметрии $\tau_{rz} = 0$ на оси z в точке G

$$\varphi = -\pi/4, \quad r = 0. \quad (12)$$

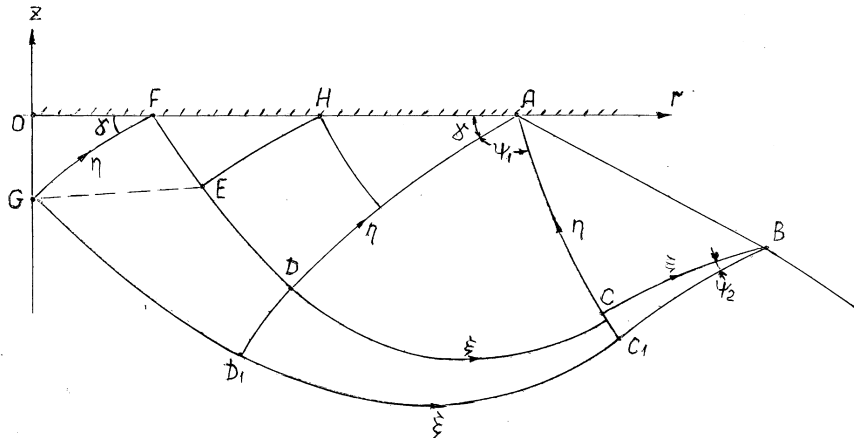


Рис. 2. Пластическая область при сдавливании сферы плоским штампом

Линии скольжения и распределение напряжений в пластической области вычисляются численным интегрированием уравнений (7) и (8) с граничными условиями (10) — (12) с использованием конечно-разностной аппроксимации и вычислительных процедур решения краевых задач Коши, Гурса и смешанного типа, приведенных в [10,11]. В области ABC решается задача Коши от границы AB с координатами узловых точек $r = 1 + i\Delta l \cos \alpha$, $z = -i\Delta l \sin \alpha$, $\Delta l = l/N$, $i = 1, 2, \dots, N$ и граничными условиями (10). Используется циклическая процедура с возобновлением значений r, z, σ, φ переменного массива **AB** и передачей их в переменные массивы **ETA** и **KSI**

линий скольжения AC и BC . Затем решается задача Гурса для центрированных линий скольжения с вырожденными ξ и η линиями скольжения в точках A и B . В этих точках σ и φ находятся из уравнений (8) при равенстве нулю правых частей.

В области ACD решается задача Гурса от линии скольжения AC и точки A с увеличением угла веера ϕ_1 в точке A с малым шагом $\Delta\varphi$ до значения

$$\phi_1 = 3\pi/4 - \alpha - \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu),$$

ограниченного углом γ , и возобновлением данных массивов **ETA** и **KSI** на линиях скольжения, проходящих через точки A и C . Затем вычисляются линии скольжения в области $ADEH$ от линии скольжения AD решением смешанной задачи с условиями (11) на контактной границе и определением точки E по условию $\varphi = -\pi/4$. От точки E вычисляется траектория EG главного напряжения σ_1 до малой окрестности оси симметрии $r = \varepsilon$ при приближенном выполнении граничного условия (12). В области $EHFG$ продолжается решение смешанной задачи от η линии скольжения EH с граничными условиями (11). В области $BCDEGD_1C_1$ решается задача Гурса от ξ линии скольжения $BCDE$ с вырожденной η линией скольжения в точке B при увеличении угла веера ϕ_2 с малым шагом $\Delta\varphi$ до выполнения условия $r \leq \varepsilon$ в точке G . Координаты траектории EG находятся решением элементарной задачи Гурса по значениям r, z, σ, φ в ближайших к EG точках η линий скольжения, где $\varphi < -\pi/4$, и ξ линий скольжения, где $\varphi > -\pi/4$.

Несущая способность жесткой зоны сферы со свободной границей в точке B определяется неравенством $\varphi < \pi/4$, которое выполняется для всех значений r_A, l и α определяющих пластическую область.

В FORTRAN-программе выполняется передача значений r, z, σ, φ в переменные массивы **KSI** и **ETA** с выводом на экран монитора узловых точек линий скольжения для контроля вычислительного процесса. По второй формуле (9) вычисляется давление $p = -\sigma_z$ в точках контактной границы AF . После вычисления линий скольжения сохраняются значения r, z, σ, φ на жесткопластических границах BC_1D_1G и GF необходимые для последующего расчета поля скоростей. Нормальные и касательные напряжения на линии скольжения BC_1D_1G используются для вычисления среднего давления q

$$q = -2 \int_G^B (\sigma \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi) r ds. \quad (13)$$

Для приближения к оси симметрии с точностью $\varepsilon \approx 0.02$ сетка линий скольжения вычисляется при задании 20 – 30 точек на границе AB с шагом $\Delta\varphi = 0.02 - 0.03$ центрированных вееров в точках A и B , с числом точек на линии скольжения BC_1D_1G более 100. При этом число узловых точек сетки линий скольжения достигает нескольких тысяч. При детальном анализе напряженного состояния напряжения (9) могут вычисляться на любой линии скольжения, определяемой переменными массивами **KSI** и **ETA**.

Поле скоростей. После вычисления линий скольжения определяются кинематические граничные условия для скоростей перемещений на жесткопластических границах и на границе контакта пластической области с плоскими штампами. Проекция вектора скорости V_ξ и V_η на линии скольжения ξ и η удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = -\frac{1}{2}(V_\xi dr - V_\eta dz)/r \quad \text{вдоль } \xi, \quad (14)$$

$$dV_\eta + V_\xi d\varphi = -\frac{1}{2}(V_\xi dz + V_\eta dr)/r \quad \text{вдоль } \eta. \quad (15)$$

Проекции вектора скорости на оси r, z определяются формулами

$$V_r = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_z = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi. \quad (16)$$

В рассматриваемой задаче задана скорость штампа $V_z = -1$, $V_r = 0$ при $r = 0$ и неподвижная жесткая область сферы ниже жесткопластической границы BC_1D_1G (рис. 2). Вследствие непрерывности скоростей на жесткопластических границах BC_1D_1G и FG , пересекающих ось симметрии [3], из уравнений (16) следуют граничные условия для скоростей V_ξ, V_η

$$V_\xi = V_\eta = 0 \quad \text{на } BC_1D_1G, \quad (17)$$

$$V_\xi = -\sin \varphi, \quad V_\eta = -\cos \varphi \quad \text{на } FG, \quad (18)$$

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \varphi \quad \text{на } AF. \quad (19)$$

Вследствие скачка скорости на оси симметрии в точке G возникает полярная особенность поля скоростей, которая при $\varphi = -\pi/4$ имеет вид [5]

$$V_r = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \psi}/\pi, \quad V_z = \operatorname{arccos}(\operatorname{tg} \psi)/\pi - 1, \quad -\pi/4 \leq \psi \leq \pi/4. \quad (20)$$

В случае гладкого штампа при $\mu = 0$ граница FG стягивается к центру O с полярной особенностью скоростей в окрестности этой точки [4]

$$V_r = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\cos 2\psi}{\cos \psi}}, \quad V_z = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\cos 2\psi}{\sin \psi}}, \quad -\pi/4 \leq \psi \leq 0. \quad (21)$$

Условие совместности полей напряжений и скоростей для идеально пластического тела [3] требует проверки положительности диссипативной функции пластического течения, которое для направлений главных напряжений и скоростей деформаций имеет вид

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \geq 0, \quad (22)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и $\varepsilon_3 = V_r/r$ – главные скорости деформаций. Подстановка соотношений (10) в (22) и условие несжимаемости $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ приводят к неравенствам $-\varepsilon_2 \geq 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \geq 0$ из которых следует неравенство

$$\Gamma + V_r/r \geq 0, \quad (23)$$

где Γ – максимальная скорость сдвига вдоль линий скольжения

$$\Gamma = \frac{\partial V_\xi}{\partial s_\eta} - V_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial s_\xi} + V_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial s_\xi}, \quad (24)$$

которая находится при интегрировании уравнений (14) и (15). Скорости V_ξ, V_η находятся численным интегрированием уравнений (14), (15) с граничными условиями

(17) – (19) при вычислении линий скольжения в обратном направлении от жесткопластических границ BC_1D_1G и FG с граничным условием (11) на AF . При этом в уравнениях (14) и (15) координаты r, z и углы φ известны, и конечно-разностная аппроксимация этих уравнений приводит к линейной системе уравнений для скоростей V_ξ, V_η [10], которые вычисляются в процедуре решения элементарных задач Гурса и смешанного типа.

Массивы данных **KSI** и **ETA** на жесткопластических границ BC_1D_1G и FG дополняются значениями скоростей (17), (18). Затем вычисляются линии скольжения, скорости и проверяется неравенство (23) при решении задачи Гурса в области D_1DFG , задачи смешанного типа в области ADF , задачи Гурса в области ADD_1C_1C , задачи Гурса в области CC_1B и задачи Гурса в области ABC до свободной границы AB . В узловых точках линий скольжения определяются скорости (16) и выводятся на экран монитора в виде годографа на плоскости V_r, V_z .

Численные результаты. На рис. 3 и 4 показаны линии скольжения и годограф скоростей при перемещении штампа $s = 0.0248$ с радиусом контакта $r_A = 0.312$, длиной $l = 0.179$ и углом наклона свободной границы пластической области $\alpha = 0.4987$ при $\mu = 0.2$. Сетка линий скольжения вычислена с числом узлов $N = 21$ на свободной границе AB и угловым шагом $\Delta\varphi = 0.024$ веера линий скольжения в точке A с углом $\phi_1 = 1.287$. Граничные условия (12) выполняются с точностью $r_G = 0.001$ в окрестности оси симметрии для углового шага $\Delta\varphi = 0.012$ веера линий скольжения в точке B с углом $\phi_2 = 0.144$. Узловые точки сетки линий скольжения и скорости V_r, V_z этих точек на плоскости годографа изображаются пикселями на экране монитора.

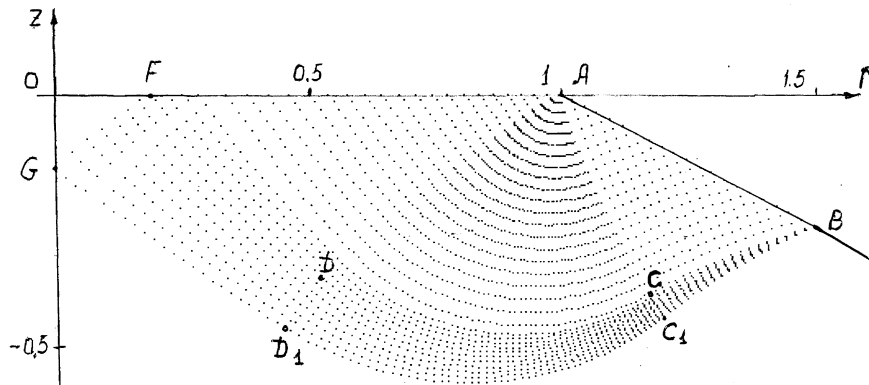


Рис. 3. Линии скольжения при сдавливании сферы при $s = 0.0248, \mu = 0.2$

Полярная особенность (20) поля скоростей в окрестности оси симметрии около точки G показана на годографе штриховой линией. Жесткопластические границы BG и GF линий скольжения на годографе скоростей стягиваются в точки. На ближайших к этим границам линиях скольжения напряжения σ и углы φ непрерывны и близки вследствие малых элементов сетки линий скольжения. Но полярная особенность поля скоростей в окрестности точки G приводит к быстрому изменению скоростей при переходе к пластической области в узкой полосе жесткопластических границ BG, GF и вдоль линии скольжения FB . В этих полосах быстрое изменение скоростей

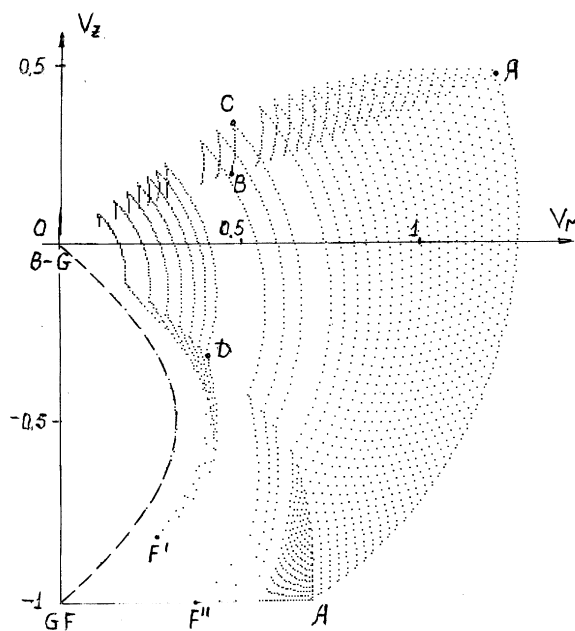


Рис. 4. Годограф скоростей

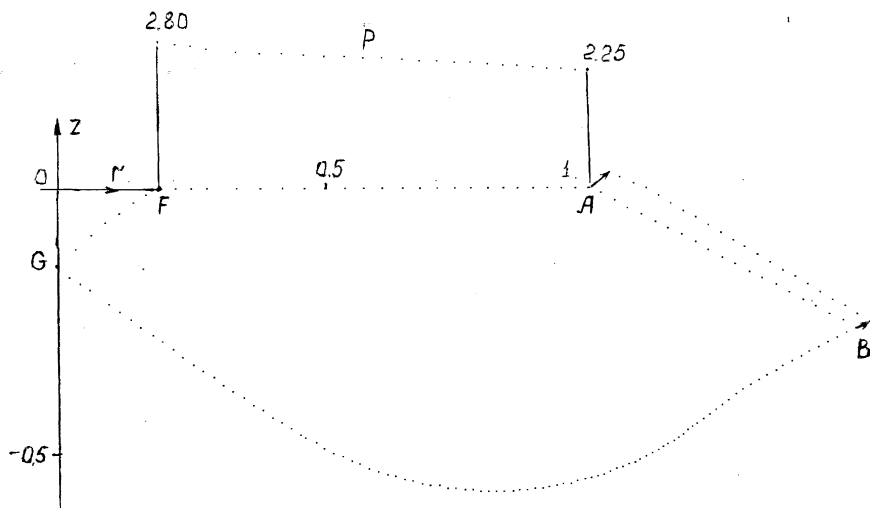


Рис. 5. Жесткопластические границы, контактное давление и смещение свободной границы AB при $s = 0.0248$, $\Delta s = 0.05$ и $\mu = 0.2$

происходит по касательной к указанным линиям скольжения при высокой скорости максимального сдвига Γ . Переход полосы с максимальной скоростью сдвига в точке F от линии скольжения GF к линии скольжения FB показан на годографе точками F' и F'' в окрестности точки F . Поле скоростей с границей скольжения AF изображается на годографе областью ADF . Остальная часть пластической области изображается на годографе ξ линиями, стягивающимися к точке O , с максимальными скоростями в особой точке A . η -линия скольжения ACC_1 , на которой кривизна ξ линий скольжения меняет знак (рис. 3), изображается на годографе точками возврата ξ линий скольжения с полем скоростей областей ABC и BCC_1 . Граница AB на годографе прямолинейна с углом наклона $\approx \pi/4 - \alpha$ с линейным возрастанием вектора скорости от точки B к точке A . Диссипативная функция положительна во всей пластической области с положительными значениями обоих слагаемых в неравенстве (23).

На рис. 5 показано распределение давления на границе контакта, жесткопластические границы и смещение границы AB пластической области при малом перемещении штампа $\Delta s = 0.05$. Угол наклона смещенной прямолинейной границы AB увеличивается на $\Delta\alpha = 0.05$. Нормальное давление на контактной границе скольжения AF возрастает от 2.254 в точке A до 2.804 в точке F при среднем давлении $q = 2.451$ на границе контакта OA , вычисленном по интегралу (13) на жесткопластической границе BG .

На рис. 6 и 7 показаны линии скольжения и годограф скоростей, на рис. 8 показана жесткопластическая граница с распределением контактного давления и смещением свободной границы пластической области при перемещении штампа $\Delta s = 0.05$, вычисления проводились для параметров r_A , l и α соответствующих рис. 3-5 при гладкой границе контакта с плитой $\mu = 0$. В этом случае жесткая область в центре штампа отсутствует. Точка G жесткопластической границы BG совпадает с началом координат O с точностью 0.001 для линий скольжения, определяемых углами центрированных веерообразных $\phi_1 = 1.082$ в точке A и $\phi_2 = 0.047$ в точке B с угловым шагом $\Delta\varphi = 0.0233$. На годографе скоростей штриховой линией показана полярная особенность (21), которая порождает быстрое изменение скоростей по касательной к жесткопластической границе BG в узкой полосе с ближайшей к ней ξ линией скольжения с высокими значениями максимальной скорости сдвига Γ . Диссипативная функция положительна во всей пластической области. Пластическая область с границей скольжения AG отображается на годографе областью ADG . Остальная часть пластической области на годографе определяется центрированными веерами линий скольжения в точках A и B , и изменением знака кривизны ξ линий скольжения на η -линии скольжения ACC_1 , которая отображается точками возврата ξ линий скольжения на годографе скоростей.

Контактное давление возрастает от 2.095 в точке A до 3.193 на оси симметрии (рис. 8). Среднее давление $q = 2.319$ снижается по сравнению с шероховатым штампом при $\mu = 0.2$. Линейное возрастание скоростей от точки B к точке A на годографе приводит к линейной смещенной границе AB при малом перемещении штампа $\Delta s = 0.05$, за исключением малой окрестности точки B .

Пластическое деформирование сферы в зависимости от перемещения штампа s приведено в табл.1. При $s = 1/3$ радиус контакта r_A равен радиусу начальной сферы. Граница l пластической области вертикальна при $\alpha = \pi/2$. Деформированная сфера принимает форму цилиндра с отношением $D/H = 1.5$.

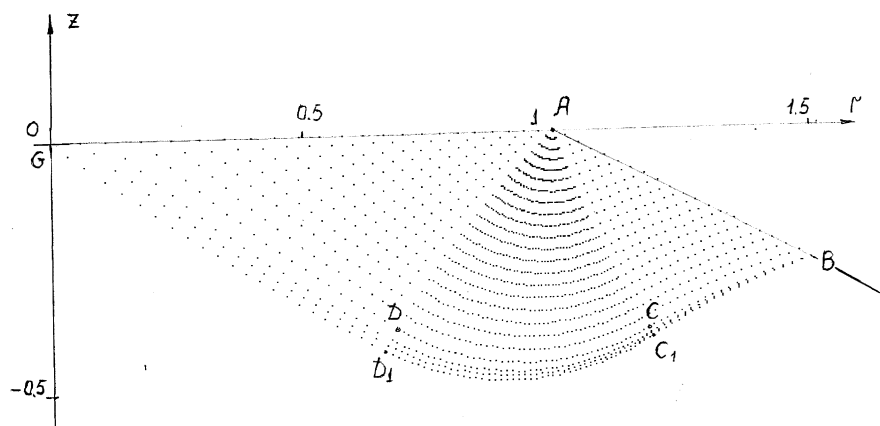


Рис. 6. Линии скольжения при сдавливании сферы при $s = 0.0248$, $\mu = 0$

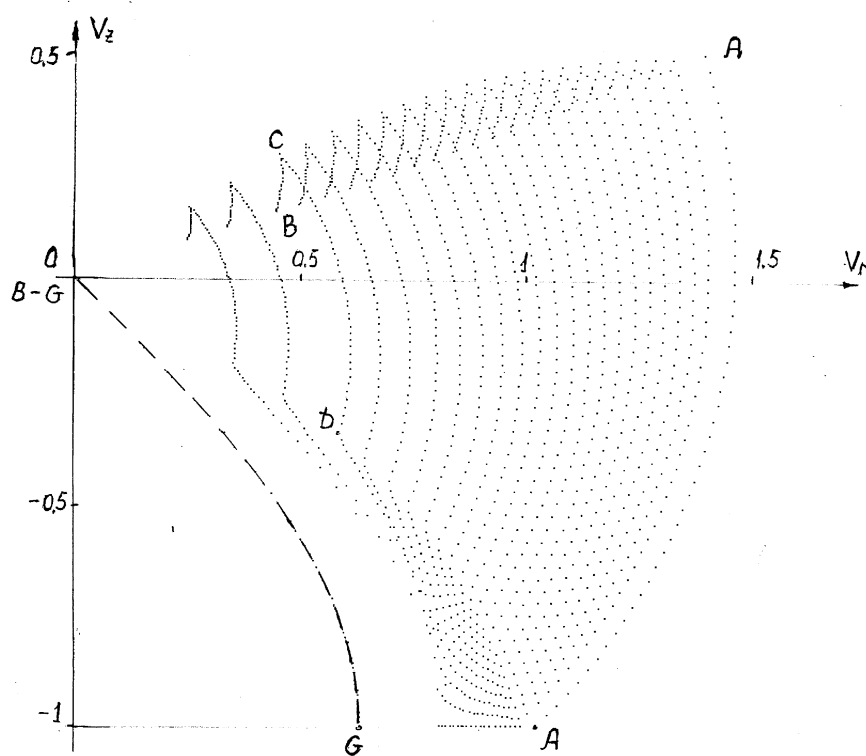


Рис. 7. Годограф скоростей для линий скольжения

В табл. 2 приведены зависимости среднего давления q от перемещения штампа s рассчитанные по интегралам (13) для линий скольжения, вычисленных для коэффициентов трения $\mu = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$. При увеличении s угол α наклона границы l

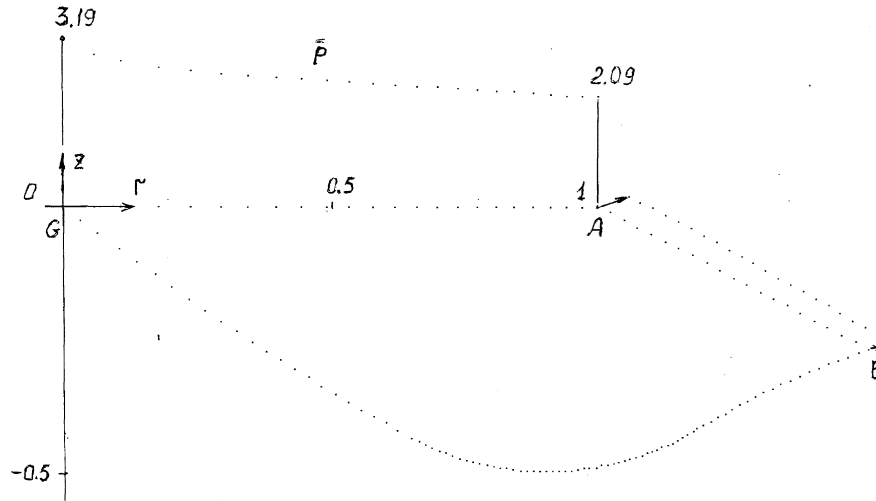


Рис. 8. Жесткопластические границы, контактное давление и смещение свободной границы AB при $s = 0.0248$, $\Delta s = 0.05$ и $\mu = 0$

Таблица 1. Пластическое деформирование сферы

s	r_A	l	α	s	r_A	l	α
0.001	0.055	0.032	0.087	0.100	0.550	0.336	0.873
0.004	0.110	0.065	0.174	0.121	0.606	0.372	0.960
0.009	0.165	0.097	0.262	0.145	0.661	0.410	1.047
0.016	0.220	0.130	0.349	0.170	0.717	0.449	1.135
0.025	0.275	0.163	0.436	0.198	0.772	0.489	1.222
0.036	0.330	0.196	0.524	0.228	0.829	0.531	1.309
0.049	0.385	0.230	0.611	0.261	0.885	0.574	1.396
0.064	0.440	0.265	0.698	0.296	0.942	0.619	1.484
0.081	0.495	0.300	0.785	0.333	1.000	0.667	1.571

пластической области увеличивается. Угол ϕ_1 верха линий скольжения и давление в точке A уменьшаются, что приводит к снижению среднего давления q . Увеличение коэффициента трения μ в указанном интервале приводит к небольшому увеличению давления q . При $s > 1/3$ происходит пластическое сжатие тонкого диска с увеличением отношения D/H и среднего давления (5). Сила сопротивления пластическому деформированию сферы монотонно возрастает вследствие увеличения радиуса контакта r_A .

Заключение. Получено полное решение задачи о сжатии жесткопластической сферы плоскими штампами при условии полной пластичности Треска и изменении формы сферы с линейной границей пластической области. Результаты решения представляют интерес для оценки несущей способности сферы по пластическому отпечатку и для моделирования конечного формоизменения сферы при больших перемещениях штампа.

Таблица 2. Давление на штамп

μ	0.05	0.1	0.15	0.2	μ	0.05	0.1	0.15	0.2
s	q				s	q			
0.001	2.811	2.847	2.876	2.898	0.100	1.912	1.944	1.972	2.002
0.004	2.715	2.746	2.777	2.805	0.121	1.810	1.838	1.870	1.900
0.009	2.615	2.648	2.679	2.707	0.145	1.705	1.734	1.767	1.798
0.016	2.517	2.550	2.580	2.607	0.170	1.600	1.628	1.663	1.695
0.025	2.417	2.453	2.482	2.508	0.198	1.495	1.525	1.559	1.592
0.036	2.319	2.351	2.380	2.408	0.228	1.385	1.420	1.457	1.489
0.049	2.218	2.250	2.278	2.306	0.261	1.278	1.316	1.352	1.384
0.064	2.116	2.150	2.178	2.204	0.296	1.171	1.211	1.248	1.280
0.081	2.013	2.046	2.073	2.104	0.333	1.070	1.109	1.145	1.179

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ишлинский А. Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
- [2] Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1. – М. : Наука, 1986. 359 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М. : Физматлит, 2001. 704 с.
- [4] Shield R. T. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1955. A 233. N 1193. P. 267–287.
- [5] Eason G. and Shield R. T. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // Z. Angew. Math. Phys. 1960. 11. N 1. P. 33–43.
- [6] Ивлев Д. Д., Непершин Р. И. Внедрение гладкого сферического штампа в жесткопластическое полупространство // Изв. АН СССР, МТТ. 1974. № 4. С. 159–166.
- [7] Непершин Р. И. О внедрении гладкого сферического штампа в идеально пластическое полупространство // ДАН РАН. 2003. Т. 389. № 5. С. 616–620.
- [8] Непершин Р. И. Давление плоского круглого штампа на идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения // Изв. РАН, МТТ. 2005. № 5. С. 150–158.
- [9] Непершин Р. И. Внедрение сферического штампа в идеально пластическое полупространство при наличии контактного трения // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 490–503.
- [10] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. – Moscow: MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [11] Druyanov B. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam : Elsevier, 1994. 426 p.

R. I. Nepershin

COMPRESSION OF THE RIGID-PLASTIC SPHERE BY THE FLAT DIES

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Computer simulation of the rigid-plastic sphere compression by the flat dies is presented for the full plasticity regime on the rib of Tresca prism. The slip lines, stresses and velocities plastic flow fields are calculated with contact friction, the sphere form and the plastic region boundaries variation considerations. The results of the problem solution can be used for the limit force estimation of the sphere plastic compression, and for the sphere plastic forming simulation with large displacements of the dies.

Keywords: sphere plastic compression, flat dies, ideal plasticity, axial symmetry, full plasticity, slip lines, stresses, velocities, contact friction

REFERENCES

- [1] Ishlinskij A. YU. Osesimmetricheskaya zadacha plastichnosti i proba Brinellya // PMM. 1944. T. 8. Vyp. 3. S. 201–224. (in Russian)
- [2] Ishlinskij A. YU. Prikladnye zadachi mekhaniki. T. 1. – M. : Nauka, 1986. 359 s. (in Russian)
- [3] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M. : Fizmatlit, 2001. 704 s. (in Russian)
- [4] Shield R. T. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1955. A 233. N 1193. P. 267–287.
- [5] Eason G. and Shield R. T. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // Z. Angew. Math. Phys. 1960. 11. N 1. P. 33–43.
- [6] Ivlev D. D., Nepershin R. I. Vnedrenie gladkogo sfericheskogo shtampa v zhestko-plasticheskoe poluprostranstvo // Izv. AN SSSR, MTT. 1974. № 4. S. 159–166. (in Russian)
- [7] Nepershin R. I. O vnedrenii gladkogo sfericheskogo shtampa v ideal'no plasticheskoe poluprostranstvo // DAN RAN. 2003. T. 389. № 5. S.616–620. (in Russian)
- [8] Nepershin R. I. Davlenie ploskogo kruglogo shtampa na ideal'no plasticheskoe poluprostranstvo s uchetom kontaktnogo treniya // Izv. RAN, MTT. 2005. № 5. S. 150–158. (in Russian)
- [9] Nepershin R. I. Vnedrenie sfericheskogo shtampa v ideal'no plasticheskoe poluprostranstvo pri nalichii kontaktnogo treniya // PMM. 2006. T. 70. Vyp. 3. S. 490–503. (in Russian)
- [10] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. – Moscow: MSTU STANKIN, 2016. 310 p. (in Russian)
- [11] Druyanov B. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam : Elsevier, 1994. 426 p. (in Russian)

Nepershin Rostislav Ivanovich ,
e-mail: nepershin_ri@rambler.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

М. А. Артемов¹, Е. С. Барановский¹, Э. В. Сёмка², Ю. Н. Третьякова¹

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

¹ Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

² Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия

Аннотация. Рассматриваются известные альтернативные формы записи условий пластичности Треска. Отмечается, что особенности представления условия пластичности Треска через основные инварианты тензора напряжений являются общими для кусочно-линейных условий пластичности. Обсуждается подход к определению эквивалентных напряжений и пластических деформаций. Предложены иные инвариантные определения эквивалентных напряжений и деформаций.

Ключевые слова: условие пластичности, пластический потенциал, обобщенный ассоциированный закон пластического течения, математическая теория пластичности, эквивалентные напряжения, эквивалентные деформации.

УДК: 539.214

Введение. Математическая теория пластичности является основой многих инженерных направлений. Фундаментальный вклад в эту науку внесли многие отечественные и зарубежные ученые. Полное перечисление всех исследователей, занимающихся математической теорией пластичности, вряд ли уместно в рамках небольшой заметки, поэтому сошлемся лишь на некоторые книги по теории пластичности, содержащие обширную библиографию [1–15].

© Артемов М. А., Барановский Е. С., Сёмка Э. В., Третьякова Ю. Н., 2018

Артемов Михаил Анатольевич

e-mail: artemov_m_a@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Барановский Евгений Сергеевич

e-mail: esbaranovskii@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Сёмка Элеонора Викторовна

e-mail: semka_elya@mail.ru, преподаватель, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Третьякова Юлия Николаевна

e-mail: ulia_tretyakova1993@mail.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 17.01.2018

Несмотря на то, что математическая теория пластичности является вполне развитой и достаточно содержательной наукой, всегда можно найти вопросы, требующие уточнения. В настоящей заметке рассматриваются два вопроса: об альтернативных формах записи условия пластичности Треска и об определении эквивалентных напряжений и деформаций. Такой выбор обусловлен тем, что условие пластичности Треска и его модификации используются во многих последних публикациях. Кроме того, условие пластичности Треска, имея много общего с кусочно-линейными условиями пластичности общего вида, все-таки выделяется из них, что проявляется как в вопросах теории, так и при решении прикладных задач. Рассматриваемые альтернативные формы записи условия пластичности Треска также присущи всем кусочно-линейным условиям пластичности. Выбор эквивалентов для тензорных величин нередко встречается в ряде работ, связанных с решением задач упрочняющегося упругопластического тела, например [16–18]. На наш взгляд, рассмотрение этих и ряда других вопросов математической и прикладной теории пластичности целесообразно обсуждать.

Альтернативные формы записи условия пластичности Треска. В силу исторических причин из всех кусочно-линейных условий пластичности особо выделяют условие Треска [19]

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2k. \quad (1)$$

Равенство (1) имеет альтернативную форму записи [9–11]

$$|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1| = 4k.$$

Хотя эта форма записи условия пластичности Треска не содержит условия выбора, тем не менее при использовании ассоциированного закона пластического течения необходимо явно выделять отдельные режимы пластичности.

В ряде работ, например, [8–11], следуя Леви [20], в качестве условия пластичности Треска, записанного через основные инварианты девиатора напряжений, предлагается соотношение

$$4(J_2 - k^2)(J_2 - 4k^2)^2 - 27J_3^2 = 0, \quad (2)$$

которое следует из равенства [21]

$$((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2)((\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2)((\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2) = 0. \quad (3)$$

На неэквивалентность равенств (2) и (3) условию Треска указывается, например, в работах [22, 23].

Используя процедуру аналогичную получению записи (2) из (3), можно найти соотношения в основных инвариантах, рассматривая другие кусочно-линейные условия пластичности.

К выбору эквивалентных напряжений и деформаций. Обсудим вопрос о выборе эквивалентных (или эффективных) напряжений и деформаций.

Для упругопластических тел в качестве эквивалентного напряжения можно выбирать, например, функцию пластичности или пластический потенциал.

Рассмотрим кусочно-линейное условие пластичности общего вида

$$F = \max_{i=1 \div n} \{\alpha_i \sigma_1 + \beta_i \sigma_2 + \gamma_i \sigma_3\} = k, \quad (4)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — константы.

Если для получения определяющего уравнения, устанавливающего связь пластических деформаций и напряжений, выбрать ассоциированный закон пластического

течения (закон нормальной связи), то приращения компонент пластических деформаций будут удовлетворять соотношениям:

$$\frac{d\varepsilon_1^p}{\alpha_i} = \frac{d\varepsilon_2^p}{\beta_i} = \frac{d\varepsilon_3^p}{\gamma_i}. \quad (5)$$

Примем, что элементарная работа напряжений на приращениях пластических деформаций

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{\text{eq}} d\varepsilon_{\text{eq}}^p, \quad \sigma_{\text{eq}} = F. \quad (6)$$

Тогда, используя гипотезу естественного состояния [4] для процесса активного нагружения и учитывая (4), (5), получаем

$$\varepsilon_{\text{eq}}^p = \frac{\varepsilon_1^p}{\alpha_i} = \frac{\varepsilon_2^p}{\beta_i} = \frac{\varepsilon_3^p}{\gamma_i}. \quad (7)$$

Если выбирается кусочно-линейная функция пластичности, учитывающая трансляционное упрочнение,

$$F = \max_{i=1 \div n} \{ \alpha_i(\sigma_1 - c\varepsilon_1^p) + \beta_i(\sigma_2 - c\varepsilon_2^p) + \gamma_i(\sigma_3 - c\varepsilon_3^p) \} = k, \quad (8)$$

то, полагая

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{eff}} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sigma_{\text{eq}}^{\text{eff}} d\varepsilon_{\text{eq}}^p, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\sigma} - c\varepsilon^p, \quad \sigma_{\text{eq}}^{\text{eff}} = F$$

и учитывая (8), приходим к определению (7).

Равенство (6) для определения эквивалентной пластической деформации, когда рассматривается режим $|\sigma_1 - \sigma_2| = k$ условия пластичности Треска, было использовано, например, в работах [16–18].

Если пластический потенциал определяется гладкой функцией $F(\boldsymbol{\sigma})$, тогда согласно ассоциированному закону течения

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$d\lambda = \sqrt{\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma} \cdot \partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}}}.$$

Принимая, что

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \sqrt{\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma} \cdot \partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}}} = \sigma_{\text{eq}} d\varepsilon_{\text{eq}}^p,$$

определяем

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma} \cdot \partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}}}, \quad d\varepsilon_{\text{eq}}^p = \sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p}. \quad (10)$$

Для режимов кусочно-линейных условий пластичности (4)

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \alpha_i \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \beta_i \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \gamma_i \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

где \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} — собственные векторы тензора напряжений. Тогда

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{F}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}}.$$

Учитывая (5), получаем

$$\sigma_{\text{eq}} d\varepsilon_{\text{eq}}^p = \frac{F d\varepsilon_{\text{eq}}^p}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}} = F \frac{d\varepsilon_1^p}{\alpha_i} = F \frac{d\varepsilon_2^p}{\beta_i} = F \frac{d\varepsilon_3^p}{\gamma_i}.$$

Для условия пластичности Мизеса

$$F = \sqrt{\text{tr } \mathbf{s}^2} = k,$$

принимая (10), имеем

$$\sigma_{\text{eq}} = F, \quad d\varepsilon_{\text{eq}}^p = \sqrt{d\varepsilon^p \cdot d\varepsilon^p}.$$

Для тензора второй валентности свертка

$$J = d\varepsilon^p \cdot d\varepsilon^p$$

определяет квадратичный инвариант. Инвариант \sqrt{J} (с точностью до числового множителя) часто выбирается для оценки величины тензора $d\varepsilon^p$. Величина $\sqrt{d\varepsilon^p \cdot d\varepsilon^p}$ является одной из инвариантных норм матрицы тензора $d\varepsilon^p$.

Отметим, что мера упрочнения (параметр Одквиста, накопленная пластическая деформация) была предложена в [24]

$$q = \int \sqrt{2d\varepsilon^p \cdot d\varepsilon^p}.$$

Для определения $\varepsilon_{\text{eq}}^p$ можно использовать процедуру построения изотропных скалярнозначных функций [25]. Если f — изотропная скалярнозначная однородная функция, то из (9) следует, что

$$d\lambda^m = \frac{f(d\varepsilon^p)}{f(\partial F / \partial \sigma)}.$$

Например, когда

$$\text{tr} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \neq 0,$$

из условия (9) следует, что

$$d\lambda = \frac{\text{tr} d\varepsilon^p}{\text{tr}(\partial F / \partial \sigma)},$$

поэтому, принимая, что

$$\sigma \cdot d\varepsilon^p = \frac{\text{tr} d\varepsilon^p}{\text{tr}(\partial F / \partial \sigma)} \sigma \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \sigma_{\text{eq}} d\varepsilon_{\text{eq}}^p,$$

определяем

$$d\varepsilon_{\text{eq}}^p = |\text{tr} d\varepsilon^p|, \quad \sigma_{\text{eq}} = \frac{\sigma \cdot \partial F / \partial \sigma}{\text{tr}(\partial F / \partial \sigma)}.$$

В общем случае, принимая

$$\sigma \cdot d\varepsilon^p = \sigma_{\text{eq}} d\varepsilon_{\text{eq}}^p,$$

и

$$d\varepsilon_{\text{eq}}^p = \sqrt{d\varepsilon^p \cdot d\varepsilon^p},$$

получаем

$$\sigma_{\text{eq}} \neq F.$$

Для упругопластического тела вполне уместно полагать, что

$$\sigma_{\text{eq}} = F.$$

Поэтому для определения $\varepsilon_{\text{eq}}^p$ вместо равенства

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sigma_{\text{eq}} d\varepsilon_{\text{eq}}^p,$$

можно выбирать иной подход, например, $\varepsilon_{\text{eq}}^p$ определять как функцию инвариантов тензора пластических деформаций.

Вопрос определения $d\varepsilon_{\text{eq}}^p$ при рассмотрении сингулярных точек поверхности пластичности не обсуждается.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Ч.1. Уругопластические деформации. М.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [3] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [4] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [5] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [6] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [7] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. 355 p.
- [8] Prager W., Hodge P. G. Theory of Perfectly Plastic Solids. New York: Wiley, 1951. 264 p.
- [9] Malvern L. E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. New Jersey: Prentice-Hall, 1969. 713 p.
- [10] Lubliner J. Plasticity Theory. New York: Macmillan, 1990. 528 p.
- [11] Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Burlington: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 p.
- [12] Zyczkowski M. Combined Loadings in the Theory of Plasticity. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publ., 1981. 714 p.
- [13] Mendelson A. Plasticity: Theory and Application. New York. London: Macmillan 1968. 353 p.
- [14] Jones R. M. Deformation Theory of Plasticity. Blacksburg: Bull Ridge Publ., 2009. 615 p.
- [15] Chen W. F., Zhang H. Structural Plasticity — Theory, Problems, and CAE Software. New York: Springer, 1991. 250 p.
- [16] Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference // Acta Mechanica. 1986. Vol. 61. P. 1–14.
- [17] Mack W., Gamer U. Die Spannungsverteilung in der elastisch-plastischen Kreisscheibe infolge einer kreisflächenförmigen Wärmequelle // Forschung im Ingenieurwesen. 1985. Vol. 51, № 5. P. 160–164.
- [18] Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The Strain Hardening Rotating Hollow Shaft Subject to a Positive Temperature Gradient // Acta Mechanica. 2007. Vol. 194. P. 191–211.
- [19] Tresca H. Memoire sur l'ecoulement des corps solides soumis a de fortes pressions // Comptes Rend. Acad. Sci. Paris. 1864. Vol. 59. P. 754–758.
- [20] Levy M. Memoire sur les equations generales des mouvements interieurs des corps solids ductiles au dela des limites, ou l'elasticite pourrait les ramener a leur premier etat // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1870. Vol. 70. P. 1323–1325.

[21] Reuss A. Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliedbedingung // Z. Angew. Math. Mech. 1933. Vol. 13. P. 365–360.

[22] Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 71–82. 1

[23] Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 72–87.

[24] Odqvist F. K. G. Die Verfestigung von flußeisenähnlichen Körpern // Z. Angew. Math. Mech. 1933. Vol. 13. P. 360–363.

[25] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, E. V. Semka, Yu. N. Tretyakova

ON SOME ASPECTS OF THE PLASTICITY THEORY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Military Educational and Scientific Center of the Air Force “N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy”, Voronezh, Russia

Abstract. We consider alternative forms of Tresca’s yield condition. It is noted that features of the representation of Tresca’s condition by the principal invariants of the stress tensor are common for piece-wise linear conditions of plasticity. The approach to determining equivalent stresses and plastic deformations is discussed. Different invariant definitions of equivalent stresses and deformations are proposed.

Keywords: yield condition, plastic potential, associated flow rule, mathematical theory of plasticity, equivalent stress, equivalent strain.

REFERENCES

- [1] Il’yushin A. A. *Plastichnost’*. CH. 1. Uprugoplasticheskie deformacii. M.: GITTL, 1948. 376 s.(in Russian)
- [2] Ivlev D. D. *Teoriya ideal’noj plastichnosti*. M.: Nauka, 1966. 232 s.(in Russian)
- [3] Sokolovskij V. V. *Teoriya plastichnosti*. M.: Vysshaya shkola, 1969. 608 s.(in Russian)
- [4] Kachanov L. M. *Osnovy teorii plastichnosti*. M.: Nauka, 1969. 420 s.(in Russian)
- [5] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. *Teoriya plastichnosti*. Vladivostok: Dal’nauka, 1998. 528 s.(in Russian)
- [6] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti*. M.: Fizmatlit, 2001. 704 s.(in Russian)
- [7] Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Clarendon Press, 1950. 355 p.
- [8] Prager W., Hodge P. G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. New York: Wiley, 1951. 264 p.
- [9] Malvern L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. New Jersey: Prentice-Hall, 1969. 713 p.
- [10] Lubliner J. *Plasticity Theory*. New York: Macmillan, 1990. 528 p.
- [11] Chakrabarty J. *Theory of Plasticity*. Burlington: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 p.

Artemov Mikhail Anatolievich

e-mail: artemov_m_a@mail.ru, Head of the Chair, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Baranovskii Evgenii Sergeevich

e-mail: esbaranovskii@gmail.com, Associate Professor, Cand. Sci. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia

Semka Eleonora Viktorovna

e-mail: semka_elya@mail.ru, Lecturer, Military Educational and Scientific Center of the Air Force “N.E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy”, Voronezh, Russia

Tretyakova Yuliya Nikolaevna

e-mail: ulia_tretyakova1993@mail.ru, Postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russia

- [12] Zyczkowski M. Combined Loadings in the Theory of Plasticity. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publ., 1981. 714 p.
- [13] Mendelson A. Plasticity: Theory and Application. New York. London: Macmillan 1968. 353 p.
- [14] Jones R. M. Deformation Theory of Plasticity. Blacksburg: Bull Ridge Publ., 2009. 615 p.
- [15] Chen W. F., Zhang H. Structural Plasticity — Theory, Problems, and CAE Software. New York: Springer, 1991. 250 p.
- [16] Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference // Acta Mechanica. 1986. Vol. 61. P. 1–14.
- [17] Mack W., Gamer U. Die Spannungsverteilung in der elastisch-plastischen Kreisscheibe infolge einer kreisflächenförmigen Wärmequelle // Forschung im Ingenieurwesen. 1985. Vol. 51, № 5. P. 160–164.
- [18] Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The Strain Hardening Rotating Hollow Shaft Subject to a Positive Temperature Gradient // Acta Mechanica. 2007. Vol. 194. P. 191–211.
- [19] Tresca H. Memoire sur l'écoulement des corps solides soumis a de fortes pressions // Comptes Rend. Acad. Sci. Paris. 1864. Vol. 59. P. 754–758.
- [20] Levy M. Memoire sur les equations generales des mouvements interieurs des corps solides ductiles au dela des limites, ou l'elasticite pourrait les ramener a leur premier etat // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1870. Vol. 70. P. 1323–1325.
- [21] Reuss A. Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliedbedingung // Z. Angew. Math. Mech. 1933. Vol. 13. P. 365–360.
- [22] Artemov M. A., Baranovskij E. S., YAkubenko A. P. Al'ternativnye formy zapisi kusochno-linejnyh uslovij plastichnosti i ih obobshcheniya // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. 2015. № 1. S. 71–82.(in Russian) 1
- [23] Artemov M. A., Baranovskij E. S. Matematicheskoe modelirovanie plasticheskogo sostoyaniya tel. Ploskaya deformaciya // Vestnik CHuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. YAkovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2015. № 2 (24). S. 72–87.(in Russian)
- [24] Odqvist F. K. G. Die Verfestigung von flußeisenähnlichen Körpern // Z. Angew. Math. Mech. 1933. Vol. 13. P. 360–363.
- [25] Lur'e A. I. Nelinejnaya teoriya uprugosti. M.: Nauka, 1980. 512 s.(in Russian)

Н. В. Минаева, Д. В. Сабьинин

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Рассмотрена упругопластическая труба из неоднородного материала под действием внутреннего и внешнего гидростатических давлений. Контуры поперечного сечения близки к круговым. Неоднородность материала и отклонения формы сечения от канонической характеризуются функциями, известными с точностью до малых параметров. Найдено условие, определяющее границу области сходимости метода возмущений. Получено решение, описывающее напряженно-деформированное состояние трубы, с точностью до величин второго порядка малости.

Ключевые слова: упругость, пластичность, толстостенная труба, сходимость, метод малого параметра.

УДК: 539.3

Рассмотрим неоднородную упругопластическую толстостенную трубу, находящуюся под воздействием внутреннего и внешнего давлений. Отличие ее поперечного сечения от кругового кольца и неоднородность материала характеризуются функциями f_i .

Пусть функции $r = a + f_1(\theta)$ и $r = b + f_2(\theta)$ описывают в полярной системе координат внутренний и внешний контуры поперечного сечения трубы, а функция $r = r_s(\theta)$ – контур, отделяющий упругую зону от пластической.

Следуя [12]–[14], будем полагать, что для материала трубы в случае плоской задачи потенциал деформации имеет в следующий вид

$$w = \frac{1}{8G}[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau^2],$$

где G – модуль сдвига, σ_r , σ_θ , τ – компоненты тензора напряжений.

Поступила 10.03.2018

© Минаева Н. В., Сизикова А. А. 2017

Минаева Надежда Витальевна

e-mail: minaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия,

Сабьинин Денис Викторович

e-mail: minaeva@yandex.ru, магистрант факультета УиТС Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

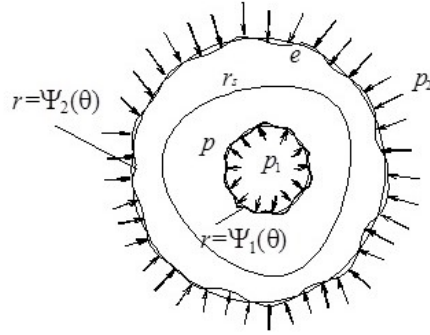


Рис. 1. Сечение трубы в нагруженном состоянии

Пусть материал характеризуется функцией

$$G = G_0 + G_1(r, \theta); \quad G_0 = \text{const}$$

В упругой области (е) в случае плоской деформации напряженно-деформированное состояние тела будет описываться решением следующей задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho^e}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^e}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^e - \sigma_\theta^e}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau^e}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{2\tau^e}{\rho} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u^e}{\partial \rho} + \frac{\partial v^e}{\partial \theta} + u^e &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e - \sigma_\theta^e &= 4(1 + f_3) \frac{\partial u^e}{\partial \rho} \\ \tau^e &= (1 + f_3) \left(\frac{\partial v^e}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^e}{\partial \theta} - \frac{v^e}{\rho} \right) \\ \sigma_n^e|_{\rho=\Psi_2(\theta)} &= -q_2; \quad \tau_n^e|_{\rho=\Psi_2(\theta)} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\rho = \frac{r}{b}$, $q_2 = \frac{p_2}{G_0}$, $f_3(\rho, \theta) = \frac{G_1(b\rho, \theta)}{G_0}$; все величины, имеющие размерность напряжений отнесены к модулю сдвига G_0 , функция $\Psi_2(\theta)$ описывает внешний контур поперечного сечения трубы в деформированном состоянии.

В пластической области (р) напряженно-деформированное состояние характеризуется решением следующей задачи [1-3,7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho^p}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^p}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau^p}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^p}{\partial \theta} + \frac{2\tau^p}{\rho} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u^p}{\partial \rho} + \frac{\partial v^p}{\partial \theta} + u^p &= 0 \\ (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p)^2 + 4(\tau^p)^2 &= 8k^2(1 + f_3) \\ 4 \frac{\partial u^p}{\partial \rho} \tau^p - \left(\frac{\partial v^p}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^p}{\partial \theta} - \frac{v^p}{\rho} \right) (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma_n^p|_{\rho=\Psi_1(\theta)} = -q_1; \quad \tau_n^p|_{\rho=\Psi_1(\theta)} = 0, \quad q_1 = \frac{p_1}{G_0}, \quad (4)$$

где функция $\Psi_1(\theta)$ описывает внутренний контур поперечного сечения трубы в деформированном состоянии.

К (1)-(4) следует добавить условия сопряжения решения задач (1), (2) и (3),(4) при $\rho = \rho_s(\theta)$ ($\rho_s = r_s/b$).

Пусть $f_i(\theta)$ заданы с точностью до малых параметров, т.е. $f_1 = \varepsilon_1\varphi_1(\theta)$, $f_2 = \varepsilon_2\varphi_2(\theta)$, $f_3 = \varepsilon_3\varphi_3(\rho, \theta)$, . Будем искать решение методом возмущений в виде степенных рядов:

$$\sigma_\rho^p = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \sigma_\rho^{lmn p} \varepsilon_1^l \varepsilon_2^m \varepsilon_3^n, \quad \sigma_\theta^p = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \sigma_\theta^{lmn p} \varepsilon_1^l \varepsilon_2^m \varepsilon_3^n, \dots \quad v^e = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} v^{lmn e} \varepsilon_1^l \varepsilon_2^m \varepsilon_3^n \quad (5)$$

Функцию, описывающую границу пластической зоны также ищем в виде:

$$\rho_s = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \rho_s^{lmn} \varepsilon_1^l \varepsilon_2^m \varepsilon_3^n \quad \rho_s^{000} = \rho_s^0. \quad (6)$$

Ряды (5), (6) будут сходящимися, если выполняются условия, содержащиеся в критерии аналитичности по малым параметрам в окрестности $\varepsilon_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) [11]. Основным из них является требование непрерывной зависимости решения задачи (1)-(4) от f_i при $f_i = 0$. Для проведения исследования этой проблемы, согласно критерию непрерывной зависимости решения от исходных данных [4,9,11], необходимо рассмотреть вспомогательную задачу относительно функций $\zeta_i(\rho, \theta)$, полученную из (1)-(4). Эти функции определяются следующим образом

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \zeta_1, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \zeta_2, \quad \tau = \tau^0 + \zeta_3, \quad u = u^0 + \zeta_4, \quad v = v^0 + \zeta_5 \quad (7)$$

Чтобы условия непрерывной зависимости были удовлетворены, нужно, чтобы линейризованная однородная задача для $\zeta_i(\rho, \theta)$ имела только тривиальное решение.

В (7) $\sigma_\rho^0, \dots, v^0$ является решением задачи (1)-(4) при $f_3(\rho, \theta) = f_2(\theta) = f_1(\theta) = 0$. Оно имеет вид [9]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{0p} &= 2\eta \ln \rho + C_1; & \sigma_\theta^{0p} &= 2\eta(1 + \ln \rho) + C_1; \\ \sigma_\rho^{0e} &= -\eta(\rho_s^0)^2 \rho^{-2} + C_2; & \sigma_\theta^{0e} &= \eta(\rho_s^0)^2 \rho^{-2} + C_2; \\ \tau^{0p} &= \tau^{0e} = 0; & v^{0p} &= v^{0e} = 0; \\ u^{0p} &= u^{0e} = \eta(\rho_s^0)^2 \rho^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= -q_1 - 2\eta \ln \left[\alpha + \frac{\eta}{2\alpha} (\rho_s^0)^2 \right] \\ C_2 &= \eta - q_2 + 2\eta \ln \rho_s^0 - 2\ln \left[\alpha (\rho_s^0)^{-1} + \frac{\eta}{2\alpha} \rho_s^0 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{2}{G_0} k^2}; \quad \alpha = \frac{a}{b}; \quad \text{sign} \eta = \text{sign}(q_1 - q_2)$$

Величина ρ_s^0 находится из уравнения

$$\eta + q_2 - q_1 - 2\eta \ln \left[\alpha (\rho_s^0)^{-1} + \frac{\eta}{2\alpha} \rho_s^0 \right] - \eta (\rho_s^0)^2 \left[1 + \frac{\eta}{2} (\rho_s^0)^2 \right]^{-2} \quad (10)$$

В результате проведенных исследований найдено одно из соотношений, при котором вспомогательная задача допускает нетривиальное решение, т.е. нарушается непрерывная зависимость решения задачи (1)-(4) от f_i при $f_i = 0$:

$$\Delta = \eta(\rho_s^0)^4 \left\{ \eta(\rho_s^0)^2 \alpha^{-2} - 1 - \frac{\eta}{2}(\rho_s^0)^2 - \frac{\eta}{2}(\rho_s^0)^{-2} + 2\eta \ln \frac{\alpha}{\rho_s^0} + \left[(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\eta}{2} \rho_s^0 \right]^4 \right\} = 0 \quad (11)$$

Обозначим через q_* наибольший отрицательный корень системы уравнений (10) и (11) при $q_2 = 0$, $\kappa = -\frac{k}{G}$, а через q_{**} – наименьший положительный корень этой системы уравнений при $q_2 = 0$, $\kappa = \frac{k}{G}$. Тогда условия существования нетривиального решения вспомогательной задачи запишутся так

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= q_* \\ q_1 - q_2 &= q_{**} \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, если точка с координатами q_1 , q_2 находится внутри полосы, определяемой прямыми (12), то решение задачи (1)-(4) непрерывно зависит от функций f_i при $f_i = 0$. Например, для $\alpha = 0,8$ получено $q_* \approx -0,502$, $q_{**} \approx 0,034$. На рис. 2 для этого частного случая изображена область непрерывной зависимости от f_i , и, как следствие, аналитичности по ε_i , решения исходной задачи (1)-(4).

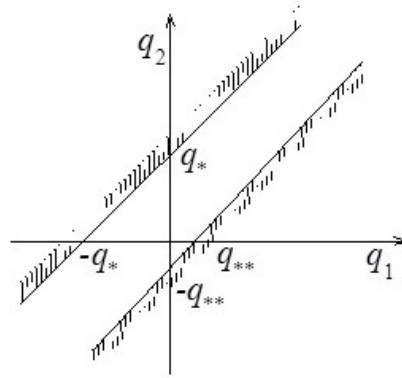


Рис. 2. Область непрерывной зависимости

Пусть параметры внешнего воздействия таковы, что соответствующая им точка принадлежит указанной области. Тогда, учитывая, что (8), (9) задают компоненты нулевого приближения, ряды (5), (6) будут сходящимися. В соответствии с методом малого параметра, для первого приближения были получены следующие задачи:

1. Для компонент с индексом «100»

Для пластической области

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_\rho^{100p}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^{100p}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{100p} - \sigma_\theta^{100p}}{\rho} = 0 \\
& \frac{\partial \tau^{100p}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{100p}}{\partial \theta} + \frac{2\tau^{100p}}{\rho} = 0 \\
& \frac{\partial u^{100p}}{\partial \rho} + \frac{\partial v^{100p}}{\partial \theta} + u^{100p} = 0 \\
& (\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{100p} - \sigma_\theta^{100p}) = 0 \\
& 4 \frac{\partial u^{0p}}{\partial \rho} \tau^{100p} - \left(\frac{\partial v^{100p}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{100p}}{\partial \theta} - \frac{v^{100p}}{\rho} \right) (\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

при $\rho = \alpha + u^{0p}(\alpha)$

$$\begin{aligned}
& \sigma_\rho^{100p} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0p}}{\partial \rho} \left[\left(1 - \frac{u^0(\alpha)}{\alpha} \right) \varphi_1 + u^{100p}(\alpha, \theta) \right] = 0 \\
& \tau^{100p} + \frac{\sigma_\rho^{100p} - \sigma_\theta^{100p}}{\rho} \left[\left(1 - \frac{u^0(\alpha)}{\alpha} \right) \frac{d\varphi_1}{d\theta} + \frac{\partial u^{100p}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} \right] = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Для упругой области:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_\rho^{100e}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^{100e}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{100e} - \sigma_\theta^{100e}}{\rho} = 0 \\
& \frac{\partial \tau^{100e}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{100e}}{\partial \theta} + \frac{2\tau^{100e}}{\rho} = 0 \\
& \frac{\partial u^{100e}}{\partial \rho} + \frac{\partial v^{100e}}{\partial \theta} + u^{100e} = 0 \\
& \sigma_\rho^{100e} - \sigma_\theta^{100e} = 4 \frac{\partial u^{100e}}{\partial \rho} \\
& \tau^{100e} = \frac{\partial v^{100e}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{100e}}{\partial \theta} - \frac{v^{100e}}{\rho}
\end{aligned} \tag{15}$$

при $\rho = 1 + u^{0e}(1)$

$$\begin{aligned}
& \sigma_\rho^{100e} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0e}}{\partial \rho} u^{100e}(1, \theta) = 0 \\
& \tau^{100e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho} \frac{\partial u^{100e}(1, \theta)}{\partial \theta} = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Условия сопряжения решений задач (13)-(14) и (15)-(16) будут такими (при $\rho = \rho_s^0$)

$$\begin{aligned}
& \sigma_\rho^{100e} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0e}}{\partial \rho} \rho_s^{100} = \sigma_\rho^{100p} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0p}}{\partial \rho} \rho_s^{100} \\
& \tau^{100e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho} \frac{\partial \rho_s^{100}}{\partial \theta} = \tau^{100p} + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho} \frac{\partial \rho_s^{100}}{\partial \theta} \\
& \sigma_\theta^{100e} + \frac{\partial \sigma_\theta^{0e}}{\partial \rho} \rho_s^{100} = \sigma_\theta^{100p} + \frac{\partial \sigma_\theta^{0p}}{\partial \rho} \rho_s^{100} \\
& u^{100e} + \frac{du^{0e}}{d\rho} \rho_s^{100} = u^{100p} + \frac{du^{0p}}{d\rho} \rho_s^{100} \\
& v^{100e} = v^{100p}
\end{aligned} \tag{17}$$

2. Для $\sigma_\rho^{010p}, \dots, v^{010e}$ система уравнений, а также условия сопряжения имеют вид аналогичный (13), (15) и (17). Граничные условия будут такими при $\rho = \alpha + u^{0p}(\alpha)$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{010p} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0p}}{\partial \rho} u^{010p}(\alpha, \theta) &= 0 \\ \tau^{010p} + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho} \frac{\partial u^{010p}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

при $\rho = \alpha + u^{0e}(1)$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{010e} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0e}}{\partial \rho} [(1 + c_2)\varphi_2 + u^{010e}(1, \theta)] &= 0 \\ \tau^{010e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho} \left[(1 + c_2) \frac{d\varphi_2}{d\theta} + \frac{\partial u^{010e}(1, \theta)}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ c_2 &= -\frac{\kappa}{2} (\rho_s^0)^2\end{aligned}$$

3. Для $\sigma_\rho^{001p}, \dots, v^{001e}$ уравнения равновесия и условия сопряжения также аналогичны (13), (15), (17). Реологические соотношения примут вид: для пластической зоны

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001p} - \sigma_\theta^{001p} &= \eta \varphi_3 \\ 4 \frac{\partial u^{0p}}{\partial \rho} \tau^{001p} - \left(\frac{\partial v^{001p}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{001p}}{\partial \theta} - \frac{v^{001p}}{\rho} \right) (\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) &= 0\end{aligned}$$

для упругой области:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001e} - \sigma_\theta^{001e} &= 4 \left(\frac{\partial u^{001e}}{\partial \rho} + \varphi_3 \frac{du^{0e}}{d\rho} \right) \\ \tau^{001e} &= \frac{\partial v^{001e}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{001e}}{\partial \theta} - \frac{v^{001e}}{\rho}\end{aligned}$$

Граничные условия для соответствующих задач будут такими при $\rho = \alpha + u^{0p}(\alpha)$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001p} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0p}}{\partial \rho} u^{001p}(\alpha, \theta) &= 0 \\ \tau^{001p} + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho} \frac{\partial u^{001p}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

при $\rho = 1 + u^{0e}(1)$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001e} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0e}}{\partial \rho} u^{001e}(1, \theta) &= 0 \\ \tau^{001e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho} \frac{\partial u^{001e}(1, \theta)}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

Следуя [5,10], было найдено решение задач первого приближения для $\varphi_i = \cos \theta$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{100p} = \sigma_\theta^{100p} = M_1 \frac{1}{\rho} \cos \theta; \quad \tau^{100p} &= M_1 \frac{1}{\rho} \sin \theta; \\ u^{100p} &= - \left(M_2 + M_3 \ln \rho + \frac{1}{2} M_1 c_2 \rho^{-2} \right) \cos \theta; \\ v^{100p} &= \left(M_2 + M_3 (1 + \ln \rho) - \frac{1}{2} M_1 c_2 \rho^{-2} \right) \sin \theta;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{100e} &= (M_4\rho^{-3} + M_5\rho) \cos \theta; & \sigma_\theta^{100e} &= (-M_4\rho^{-3} + 3M_5\rho) \cos \theta; \\ \tau_\rho^{100e} &= (M_4\rho^{-3} + M_5\rho) \sin \theta; & \rho_s^{100} &= M_6 \cos \theta; \\ u^{100e} &= -\frac{1}{4} (M_4\rho^{-3} + M_5\rho^2 + M_6) \cos \theta; & v^{100e} &= -\frac{1}{4} (M_4\rho^{-3} - 3M_5\rho^2 - M_6) \sin \theta;\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}M_1 &= 2(\rho_s^0)^2 M_5; & M_3 &= (\rho_s^0)^2 M_5; & M_4 &= (\rho_s^0)^4 M_5; \\ M_6 &= 4(\rho_s^0)^2 \ln \rho_s^0 + 4M_2; & M_5 &= \frac{4\kappa c_2(1 + c_2\alpha^{-2})}{\Delta} \\ M_2 &= \frac{\kappa(1 + c_2\alpha^{-2})[(1 + c_2)(\rho_s^0)^4 + 4c_2(\rho_s^0)^2 \ln \rho_s^0 + (1 - c_2)^4 + c_2]}{\Delta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{010p} &= \sigma_\theta^{010p} = N_1 \frac{1}{\rho} \cos \theta; & \tau^{010p} &= N_1 \frac{1}{\rho} \sin \theta; \\ u^{010p} &= -(N_2 + N_3 \ln \rho + \frac{1}{2} N_1 c_2 \rho^{-2}) \cos \theta; \\ v^{010p} &= (N_2 + N_3(1 + \ln \rho) - \frac{1}{2} N_1 c_2 \rho^{-2}) \sin \theta; \\ \sigma_\rho^{010e} &= (N_4\rho^{-3} + N_5\rho) \cos \theta; & \sigma_\theta^{010e} &= (-N_4\rho^{-3} + 3N_5\rho) \cos \theta; \\ \tau_\rho^{010e} &= (N_4\rho^{-3} + N_5\rho) \sin \theta; & \rho_s^{010} &= N_6 \cos \theta; \\ u^{010e} &= -\frac{1}{4} (N_4\rho^{-2} + N_5\rho^2 + N_6) \cos \theta; & v^{010e} &= -\frac{1}{4} (N_4\rho^{-2} - 3N_5\rho^2 - N_6) \sin \theta;\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}N_1 &= 2(\rho_s^0)^2 N_5; & N_3 &= (\rho_s^0)^2 N_5; & N_4 &= (\rho_s^0)^4 N_5; \\ N_6 &= 4(\rho_s^0)^2 \ln \rho_s^0 + 4N_2; & N_5 &= \frac{\kappa^2(1 + c_2)}{\Delta} \\ N_2 &= \frac{\kappa(\rho_s^0)^2(1 + c_2)(1 + c_2\alpha^{-2} - \kappa \ln \alpha)}{\Delta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001p} &= (L_1\rho^{-1} - \eta) \cos \theta; & \sigma_\theta^{001p} &= (L_1\rho^{-1} - 2\eta) \cos \theta; \\ \tau_\rho^{001p} &= (L_1\rho^{-1} - \eta) \sin \theta; \\ u^{001p} &= -(L_2 + L_3 \ln \rho + \frac{1}{2} L_1 c_3 \rho^{-2} + 4c_3 \rho^{-1}) \cos \theta; \\ v^{001p} &= (-L_2 + L_3(1 + \ln \rho) - \frac{1}{2} L_1 c_3 \rho^{-2}) \sin \theta; \\ \sigma_\rho^{001e} &= (L_4\rho^{-3} + L_5\rho - \frac{8}{3} c_3 \rho^{-2}) \cos \theta; & \sigma_\theta^{001e} &= (-L_4\rho^{-3} + 3L_5\rho) \cos \theta; \\ \tau_\rho^{001e} &= (L_4\rho^{-3} + L_5\rho - \frac{8}{3} c_3 \rho^{-2}) \sin \theta; & \rho_s^{001} &= L_6 \cos \theta; \\ u^{001e} &= -\frac{1}{4} (L_4\rho^{-2} + L_5\rho^2 + L_6 - \frac{32}{3} c_3 \rho^{-1}) \cos \theta; \\ v^{001e} &= -\frac{1}{4} (L_4\rho^{-2} - 3L_5\rho^2 - L_6) \sin \theta;\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}L_1 &= 2(\rho_s^0)^2 L_5; & L_3 &= (\rho_s^0)^2 L_5; & L_4 &= (\rho_s^0)^4 L_5; \\ L_6 &= 4(\rho_s^0)^2 \ln \rho_s^0 + 4L_2; & L_5 &= \frac{\Delta_5}{\Delta} & L_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \Delta_2 &= \left[2(\rho_s^0)^2 \ln \alpha - \frac{(\rho_s^0)^2}{\eta} (1 + 2c_3\alpha^{-2}) \right] \Delta_5 + \\ &+ \left[\frac{1}{2} (\alpha - 6c_3\alpha^{-1}) + \frac{11}{12} \eta \rho_s^0 \ln \alpha - \frac{8}{3} \rho_s^0 (1 + 2c_3\alpha^{-2}) \right] \Delta \\ \Delta_5 &= c_3 \left[2\alpha + \frac{8}{3} - 11\rho_s^0 + \frac{c_3}{3} (16 - \rho_s^0 - 36\alpha^{-1} - 64\alpha^{-2}) + \right. \\ &+ \left. \frac{\eta \rho_s^0}{3} (11 \ln \alpha - 11 \ln \rho_s^0 + \frac{5}{2}) \right]; & c_3 &= -\frac{1}{2} \eta (\rho_s^0)^2\end{aligned}$$

Итак, с точностью до величин первого порядка малости решение задачи (1)–(4), характеризующее напряженно-деформированное состояние трубы, имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^p &= \sigma_\rho^{0p} + \sigma_\rho^{100p} \varepsilon_1 + \sigma_\rho^{010p} \varepsilon_2 + \sigma_\rho^{001p} \varepsilon_3; \\ v^p &= v^{100p} \varepsilon_1 + v^{010p} \varepsilon_2 + v^{001p} \varepsilon_3; \\ \sigma_\rho^e &= \sigma_\rho^{0e} + \sigma_\rho^{100e} \varepsilon_1 + \sigma_\rho^{010e} \varepsilon_2 + \sigma_\rho^{001e} \varepsilon_3; \\ v^e &= v^{100e} \varepsilon_1 + v^{010e} \varepsilon_2 + v^{001e} \varepsilon_3,\end{aligned}\tag{18}$$

так как остаточные члены рядов будут величинами второго порядка малости. Граница пластической зоны также с точностью до величин первого порядка малости будет описываться следующей функцией

$$\rho_s = \rho_s^{100} \varepsilon_1 + \rho_s^{010} \varepsilon_2 + \rho_s^{001} \varepsilon_3\tag{19}$$

Поскольку решение задачи (1)–(4) при указанных выше условиях являются аналитическими функциями, то (5), (6) совпадают с рядами Тейлора ($\varepsilon_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$)). Следовательно, в качестве оценки погрешности решения (18), (19) можно использовать одну из оценок ряда Тейлора.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григорьев О. Д. Некоторые задачи теории пластичности неоднородных тел. Новосибирск: НИИВТ, 1969.
- [2] Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. №8. С. 149–152.
- [3] Захарова Т. Л., Ивлев Д. Д. Приближённое решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // ПМТФ. 1997. №5. С. 165–172.
- [4] Зачепа В. Р., Сапронов Ю. И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж: Изд-во Воронежск. госунивер., 2002. 185 с.
- [5] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [6] Ильющин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 576 с.
- [7] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 701 с.
- [8] Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. журнал. 1954. Т. 6. №2. С. 140–146.
- [9] Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
- [10] Максимов С. Б., Немировский Ю. В. Некоторые свойства уравнений и метода малого параметра в плоских задачах теории идеальной пластичности // Изв. РАН. МТТ. 1986. №5. С.101–107.
- [11] Минаева Н. В. Метод возмущений в механике деформируемых тел. М. : Научная книга, 2002. 156 с.
- [12] Минаева Н. В., Костырин Н. Б., Мяснянкин Ю. М. О напряженно-деформированном состоянии упругопластических тел, близких к однородным // Изв. РАН МТТ. 2004. №5. С. 150–159.
- [13] Ольшев В., Рыхлевский Я., Урбановский Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964.

- [14] Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М.: Гостехиздат, 1947. 396 с.

N. V. Minaeva, D. V. Sabyinin

THE INVESTIGATION OF STATE OF INHOMOGENEOUS ELASTIC PLASTIC TUBE BY SMALL PARAMETER METHOD

Voronezh State University, Voronezh State University of Engineering Technologies

Abstract. We considered the elastic-plastic tube made of non-uniform material under the action of internal and external hydrostatic. The contours of the cross section are close to circular. The inhomogeneous material and the deviation of the section shape from the canonical characterizes by of the functions known to small parameters. We found a condition defining the boundary of the convergence region of the perturbation method. We obtained a solution describing the stress-strain state of the tube up to the first order of terms.

Keywords: elastic-plastic, thick-walled tube, convergence, method of small parameter.

REFERENCES

- [1] Grigor'ev O. D. Nekotorye zadachi teorii plastichnosti neodnorodnyh tel. Novosibirsk: NIIVT, 1969.(in Russian)
- [2] Ershov L. V., Ivlev D. D. O vypuchivanii tolstostennoj trubyy, nahodyashchejsya pod dejstviem vnutrennego davleniya // Izv. AN SSSR. OTN. 1957. №8. S. 149–152.(in Russian)
- [3] Zaharova T. L., Ivlev D. D. Priblizhynnoe reshenie ploskih zadach dlya ideal'nyh uprugoplasticheskikh neodnorodnyh tel // PMTF. 1997. №5. S. 165–172.(in Russian)
- [4] Zachepa V. R., Sapronov YU. I. Lokal'nyj analiz fredgol'movyh uravnenij. Voronezh: Izd-vo Voronezhsk. gosuniver., 2002. 185 s.(in Russian)
- [5] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s.(in Russian)
- [6] Il'yushin A. A. Plastichnost'. M.: Gostekhizdat, 1948. 576 s.(in Russian)
- [7] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D.. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Fizmatlit, 2001. 701 s.(in Russian)
- [8] Ishlinskij A. YU. Rassmotrenie voprosov ob ustojchivosti ravnovesiya uprugih tel s točki zreniya matematicheskoy teorii uprugosti // Ukr. matem. zhurnal. 1954. T. 6. №2. S. 140–146.(in Russian)
- [9] Kolmogorov A. N., Fomin S.V. EHlementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1976. 542 s.(in Russian)
- [10] Maksimov S. B., Nemirovskij YU. V. Nekotorye svojstva uravnenij i metoda malogo parametra v ploskih zadachah teorii ideal'noj plastichnosti // Izv. RAN. MTT. 1986. №5. С.101–107.(in Russian)

- [11] Minaeva N. V. Metod vozmushchenij v mekhanike deformiruemyh tel. M. : Nauchnaya kniga, 2002. 156 s.(in Russian)
- [12] Minaeva N. V., Kostyrin N. B., Myasnyankin YU. M. O napryazhenno-deformirovannom sostoyanii uprugoplasticheskikh tel, blizkih k odnorodnym // Izv. RAN MTT. 2004. №5. S. 150–159.(in Russian)
- [13] Ol'shak V., Ryhlevskij YA.,Urbanovskij Teoriya plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir, 1964.(in Russian)
- [14] Filonenko-Borodich M. M. Teoriya uprugosti. M.: Gostekhizdat, 1947. 396 s.(in Russian)

Minaeva Nadezhda Vitalevna

e-mail: minaeva@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Sabynin Denis Viktorovich

e-mail: minaeva@yandex.ru, graduate Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Е. А. Микишанина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В УПРУГО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается двумерная стационарная задача фильтрации жидкости, описывающая проникание жидкости через упругую пористую плиту, в рамках гипотезы о зависимости коэффициента фильтрации среды от первого инварианта тензора напряжений. Аналитическим методом Чарного определяется давление жидкости внутри плиты, строятся графики давления в тестовом примере.

Ключевые слова: упруго-пористая плита, фильтрация, коэффициент фильтрации, напряжения, метод Чарного.

УДК: 532.685

Введение. Решение двумерной задачи стационарной фильтрации в пористой среде с переменным коэффициентом фильтрации $k(x_1, x_2)$ (или проницаемостью $k_{\pi}(x_1, x_2) = \mu k(x_1, x_2) \setminus \rho, \mu$ - плотность и вязкость жидкости соответственно) сводится к определению функции давления $P(x_1, x_2)$ из дифференциального уравнения [1]

$$\nabla \cdot (k(x_1, x_2) \cdot \nabla P(x_1, x_2)) = 0. \quad (1)$$

Среда считается слабо деформируемой, изотропной, подчиняется обобщенному закону Гука, фильтрация подчиняется линейному закону Дарси.

Решение подобных задач, но с постоянным коэффициентом фильтрации, приводилось автором ранее в работах [2,3]. Однако, при возникновении на границе среды гидравлического напора, будет изменяться поровое пространство, что повлечет за собой изменение проницаемости и коэффициента фильтрации.

Аналитическое решение краевой задачи для уравнения (1) довольно трудоемко. В случае, если коэффициент фильтрации зависит только от одной переменной, например, $k = k(x_1)$, аналитическое решение задачи значительно упрощается.

Коэффициент фильтрации. Представляя поровое пространство в виде капиллярных трубок малого радиуса [4], зависимость между средним радиусом поры a ,

© Микишанина Е. А., 2018
Микишанина Евгения Арифжановна
e-mail: evaeva_84@mail.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Поступила 30.01.2018

коэффициентом фильтрации k и вязкостью жидкости μ примет вид

$$a^2 = \frac{8\mu k}{\rho g}. \quad (2)$$

В силу того, что при возникновении в среде напряжений в результате внешнего распределенного силового воздействия, количество пор остается постоянным, относительное изменение поперечного сечения трубки определится следующим образом:

$$\frac{a^2 - a_0^2}{a_0^2} = \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma),$$

где E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, $J_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ - первый инвариант тензора напряжений, a_0 , a - средний радиус недеформированной и деформированной поры соответственно.

Следовательно, с учетом (2) для коэффициента фильтрации справедливо

$$k = k_0 \left(1 + \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma) \right), \quad (3)$$

где k_0 , k - коэффициенты фильтрации недеформированной и деформированной сред соответственно.

Постановка задачи. Пусть оси декартовой системы координат ориентированы как показано на рисунке 1. Сделаем следующие допущения. Плита $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq 1$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ (рисунок 1) под действием приложенных моментов терпит чистый цилиндрический изгиб в плоскости Oyz , R - заданный радиус кривизны нейтральной «линии» сечения $z = 0$.

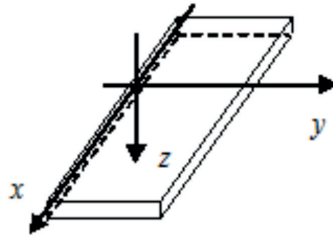


Рис. 1. Плита

Пренебрегая напряжением $\sigma_{z,z}$ в силу его малости по сравнению с напряжениями $\sigma_{x,x} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)R} z$, $\sigma_{y,y} = \frac{E}{(1-\nu^2)R} z$, скорректированный коэффициент фильтрации согласно формуле (3) можно записать в виде:

$$k = k_0 (1 + Az), \quad (4)$$

где $A = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)R}$.

Пусть на поверхности $z = -h/2$ задано давление жидкости $p_0(y)$, а границы $y = 0$ и $y = 1$ являются для жидкости непроницаемыми. Считая радиус кривизны большим,

а изгиб малым, двумерную краевую задачу фильтрации через плиту в поперечном сечении можно записать в виде

$$\nabla \cdot ((1 + Az) \cdot \nabla P(y, z)) = 0, \quad (5)$$

$$P(y, -h/2) = p_0(y), \quad P(y, h/2) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(0, z) = \frac{\partial P}{\partial y}(1, z) = 0.$$

Далее воспользуемся методом Чарного [5].

Аналитическое решение. Для решения задачи (5) с граничными условиями (6) введем новые переменные:

$$\tilde{z} = 1 + Az, \quad \tilde{y} = Ay. \quad (7)$$

Преобразование (7) переводит отрезки $[0, 1]$, $[-h/2, h/2]$ в отрезки $[0, A]$, $[1 - Ah/2, 1 + Ah/2]$ соответственно. Тогда уравнение (5) и граничные условия (6) в новых переменных примут вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{z}} \frac{\partial P}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (8)$$

$$P(\tilde{y}, 1 - \frac{Ah}{2}) = p(\tilde{y}), \quad P(\tilde{y}, 1 + \frac{Ah}{2}) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tilde{y}}(0, \tilde{z}) = \frac{\partial P}{\partial \tilde{y}}(A, \tilde{z}) = 0.$$

Уравнение (8) является уравнением Лапласа в цилиндрических координатах в осесимметричном случае.

Разделяя переменные в искомой функции $P(\tilde{y}, \tilde{z}) = Y(\tilde{y}) \cdot Z(\tilde{z})$ перепишем уравнение (8) в виде

$$Y''Z + YZ'' + \frac{1}{\tilde{z}}Z'Y = 0.$$

Последнее дифференциальное уравнение после разделения переменных сведется к решению двух дифференциальных уравнений

$$Y'' \pm \lambda^2 Y = 0, \quad Z'' + \frac{1}{\tilde{z}}Z' \mp \lambda^2 Z = 0. \quad (10)$$

При $\lambda = 0$ решение уравнений (10) примет вид

$$Y = a_0 + a_1 \tilde{y}, \quad Z = b_0 + b_1 \ln \tilde{z}.$$

Решение дифференциальных уравнений

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0, \quad Z'' + \frac{1}{\tilde{z}}Z' + \lambda^2 Z = 0.$$

имеет вид

$$Y = A_\lambda e^{\lambda \tilde{y}} + B_\lambda e^{-\lambda \tilde{y}} \\ Z = C_\lambda J_0(\lambda \tilde{z}) + D_\lambda Y_0(\lambda \tilde{z}),$$

где J_0, Y_0 - функции Бесселя 1 и 2 рода нулевого порядка вещественного аргумента, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Решение дифференциальных уравнений

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0, \quad Z'' + \frac{1}{\tilde{z}}Z' - \lambda^2 Z = 0.$$

имеет вид

$$Y = A_\lambda \cos(\lambda \tilde{y}) + B_\lambda \sin(\lambda \tilde{y})$$

$$Z = C_\lambda I_0(\lambda \tilde{z}) + D_\lambda K_0(\lambda \tilde{z}),$$

где I_0, K_0 - функции Бесселя 1 и 2 рода нулевого порядка мнимого аргумента, $\lambda \in R \setminus \{0\}$. С учетом граничных условий (9) искомая функция запишется в виде

$$P(\tilde{y}, \tilde{z}) = b_0 + b_1 \ln \tilde{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n I_0 \left(\frac{\pi n \tilde{z}}{A} \right) + D_n K_0 \left(\frac{\pi n \tilde{z}}{A} \right) \right) \cos \left(\frac{\pi n \tilde{y}}{A} \right). \quad (11)$$

Раскладывая граничную функцию $p(\tilde{y})$ в ряд по косинусам и используя граничные условия (9), получим выражения для постоянных:

$$b_1 = \frac{p_0}{\ln \left(\frac{2-Ah}{2+Ah} \right)}, \quad b_0 = \frac{-p_0 \ln \left(\frac{2+Ah}{2} \right)}{\ln \left(\frac{2-Ah}{2+Ah} \right)}.$$

$$C_n = \frac{-p_n K_0 \left(\pi n \frac{2+Ah}{2A} \right)}{I_0 \left(\pi n \frac{2+Ah}{2A} \right) K_0 \left(\pi n \frac{2-Ah}{2A} \right) - I_0 \left(\pi n \frac{2-Ah}{2A} \right) K_0 \left(\pi n \frac{2+Ah}{2A} \right)}$$

$$D_n = \frac{p_n I_0 \left(\pi n \frac{2+Ah}{2A} \right)}{I_0 \left(\pi n \frac{2+Ah}{2A} \right) K_0 \left(\pi n \frac{2-Ah}{2A} \right) - I_0 \left(\pi n \frac{2-Ah}{2A} \right) K_0 \left(\pi n \frac{2+Ah}{2A} \right)}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим функцию давления в виде:

$$P(y, z) = \frac{p_0 \ln \left(\frac{2+2Az}{2+Ah} \right)}{\ln \left(\frac{2-Ah}{2+Ah} \right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n I_0 \left(\frac{\pi n(1+Az)}{A} \right) + D_n K_0 \left(\frac{\pi n(1+Az)}{A} \right) \right) \cos(\pi n y),$$

где постоянные C_n, D_n определяются из предыдущих формул.

Числовой пример. Через однородно-изотропную тонкую плиту (коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$) в виде полосы $-\infty < x < +\infty$, $-1 \leq y \leq 1$, $-h/2 \leq z \leq h/2$, $h = 0.1$, подверженную чистому цилиндрическому изгибу с заданным радиусом кривизны $R = 20$ в плоскости Oyz происходит установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости, которая оказывает на верхней поверхности плиты давление $p_0 = 1 + y^2$. Грани $y = -1$ и $y = 1$ непроницаемы. Определить давление жидкости внутри плиты и на ее границах.

Скорректированный коэффициент фильтрации примет вид

$$k = k_0(1 + 0.0375z).$$

Разложение граничной функции в ряд по косинусам на интервале $(-1, 1)$ имеет вид

$$p_0 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n y).$$

На рисунке 2 представлены графики функции давления жидкости (с точностью до двадцати членов ряда Фурье). Учитывая симметричность функции давления, кривые построены при $y \in [0, 1]$ на каждой прямой $z = -0.05$ (1), $z = -0.025$ (2), $z = 0$ (3), $z = 0.025$ (4), $z = 0.05$ (5). Линии (1) и (5) соответствуют граничным условиям.

Заключение. В работе была решена двумерная задача фильтрации жидкости через тонкую плиту с переменной проницаемостью (или переменным коэффициентом фильтрации) аналитическим методом Чарного. Переменность коэффициента фильтрации связана с возникающими в среде напряжениями. Решение задачи строилось в рамках гипотезы о линейной зависимости коэффициента фильтрации с первым инвариантом тензора напряжений.

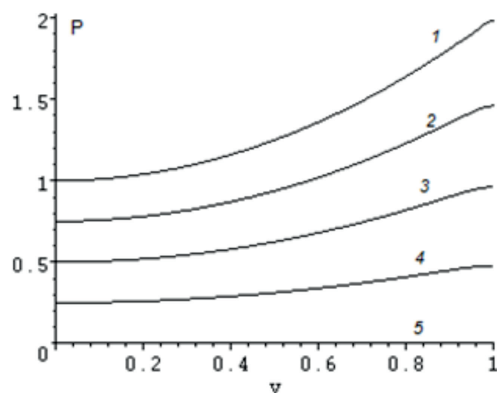


Рис. 2. Функция давления

ЛИТЕРАТУРА

[1] Голубев Г. В., Тумашев Г. Г. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1972. 195 с.

[2] Микишанина Е. А., Терентьев А. Г. Фильтрация через упруго-пористую плиту // Научный журнал "Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. №4(30). С. 33–40.

[3] Микишанина Е. А., Терентьев А. Г. Об определении напряженного состояния упруго-пористой среды // Ученые записки Казан. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2017. Т.159. № 2. С. 204–215.

[4] Kozeny J. Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss- und Kanal-versickerung // Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1931. Н.3. Р. 28-31.

[5] Чарный И. А. Приток к скважинам в пласте с переменной проницаемостью и мощностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. №2. С. 180–188.

E. A. Mikishanina

**THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF FLUID FILTRATION IN AN
ELASTIC-POROUS MEDIUM WITH VARIABLE PERMEABILITY**

Chuvash state University named I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. A two-dimensional stationary problem of fluid filtration is considered, which describes the liquid penetration through an elastic porous plate, within the framework of the hypothesis of the dependence of the medium filtration coefficient on the first invariant of the stress tensor. Analytically, the pressure of the liquid inside the plate is determined by the Charny method, the pressure graphs in the test example are constructed.

Keywords: elastic-porous plate, filtration, filtration coefficient, voltage, method of Charny.

REFERENCES

- [1] Golubev G. V., Tumashev G. G. Fil'traciya neszhimovoj zhidkosti v neodnorodnoj poristoj srede. Kazan' : Izd-vo Kazan. un-ta, 1972. 195 s. (in Russian)
- [2] Mikishanina E. A., Terent'ev A. G. Fil'traciya cherez uprugoporistuyu plitu // Nauchnyj zhurnal "Vestnik CHGPU im. I. YA. YAkovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2016. №4(30). S. 33–40. (in Russian)
- [3] Mikishanina E. A., Terent'ev A. G. Ob opredelenii napryazhennogo sostoyaniya uprugoporistoj sredy // Uchenye zapiski Kazan. un-ta. Seriya: fiz.-mat. nauki. 2017. T.159. № 2. S. 204–215. (in Russian)
- [4] Kozeny J. Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss- und Kanal-versickerung // Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1931. H.3. P. 28-31.
- [5] CHarnyj I. A. Pritok k skvazhinam v plaste s peremennoj pronicaemost'yu i moshchnost'yu // Izv. AN SSSR. MZHG. 1967. №2. S. 180–188.

Mikishanina Evgeniya Arifzhanovna

e-mail: evaeva_84@mail.ru, senior lecturer, Chuvash state University name I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

А. Н. Прокудин, С. В. Фирсов

РАСЧЕТ ПОЛЗУЧЕСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Исследуется процесс установившейся ползучести во вращающемся цилиндре со свободными концами. Предполагается, что в цилиндре имеет место осевая симметрия и обобщенная плоская деформация. Приведена постановка задачи на основе степенного закона на ползучести. Сформулированная система дифференциальных уравнений решается методом конечных разностей. Получены численные зависимости напряжений и деформаций в цилиндре от времени.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, вращающийся цилиндр, метод конечных разностей

УДК: 539.3

Введение. Способность материала необратимо деформироваться даже при постоянных во времени нагрузках называется ползучестью. Серьезный интерес к этому явлению возник в середине XX-го века при анализе работы паровых турбин [1, 2]. Под действием центробежных сил в дисках и лопатках турбин возникают напряжения, которые приводят к медленному накоплению деформаций ползучести. В результате этого сокращается срок службы турбины. Ползучесть характерна в той или иной степени для всех материалов. С увеличением температуры ползучесть материалов становится более выраженной, при этом многие материалы, например, лед, бетон, полимеры и композиты проявляют заметные свойства ползучести даже при комнатной температуре.

К настоящему времени опубликовано множество работ по изучению и моделированию явления ползучести, в т.ч. монографии [1–6]. Расчеты на ползучесть широко применяются при анализе конструкций и сооружений на длительную прочность. С другой стороны явление ползучести оказалось полезным в технологических процессах формирования, поскольку в этом случае возможно достижение значительных деформаций

© Прокудин А. Н., Фирсов С. В., 2018

Прокудин Александр Николаевич

e-mail: prokudin@imim.ru, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Фирсов Сергей Викторович

e-mail: firsov.s.new@yandex.ru, аспирант, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН №007-00285-18-00

Поступила 10.02.2018

при относительно небольших и постоянных нагрузках, что приводит к существенной экономии энергии по сравнению с пластическим формованием [2].

Для построения математической модели процесса ползучести предполагается существование потенциала ползучести [4–6], конкретный вид которого определяется из экспериментов по одноосной деформации. Следует отметить, что определяющие соотношения теории ползучести являются достаточно сложными для изучения и их точные решения известны лишь в некоторых простейших случаях, например [7].

В настоящей работе изучается процесс ползучести во вращающемся цилиндре со свободными концами. Этой задаче и близкой к ней задачам о вращающемся цилиндре с закрепленными концами о вращающемся диске посвящено множество публикаций. В известной монографии Ю.Н. Работнова [1] исследуется неустановившаяся ползучесть вращающегося изотропного цилиндра с использованием экспоненциального закона ползучести. Влияние начальной анизотропии материала на процесс ползучести во вращающемся полом цилиндра анализировалось в работах [8, 9]. Установлено, что использование ортотропного материала может повысить срок службы цилиндра. В рамках теории больших деформаций данная задача решена в [10, 11]. Следует отметить, что в работах [8–11] используется степенной закон ползучести, а также предполагается, что напряжения в цилиндре не зависят от времени. Неустановившаяся ползучесть цилиндра под действием сил инерции, внутреннего и внешнего давления с учетом анизотропии и упрочнения исследовалась в работе [12]. В ней определены закономерности развития ползучести и релаксации напряжений в цилиндре для разных вариантов анизотропии. В последние годы публикуется большое количество работ, посвященных ползучести в функционально-градиентных материалах, отметим из них лишь наиболее близкие к теме данной работы [13–17].

Постановка задачи. Рассмотрим полый цилиндр бесконечной длины с внутренним и внешним радиусом a и b соответственно. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью $\omega(t)$. Введем цилиндрическую систему координат r, ϕ, z , ось Z которой совпадает с образующей цилиндра. Предполагаем, что имеет место осевая симметрия и обобщенная плоская деформация, в этом случае вектор перемещений имеет две ненулевые компоненты: u_r и u_z . В дальнейшем компоненту u_r будем обозначать кратко u . Для удобства перейдем к безразмерной радиальной координате:

$$\beta = r/b, \delta = a/b, \delta \leq \beta \leq 1.$$

Для компонент тензора упругих деформаций введем обозначение e_{ij} , а для деформаций ползучести — p_{ij} . Предполагаем, что полные деформации состоят из упругих деформаций и деформаций ползучести:

$$e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad e_{\phi\phi} + p_{\phi\phi} = \frac{u}{\beta}, \quad e_{zz} + p_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{const} \quad (1)$$

Напряжения (в безразмерном виде) связаны с упругими деформациями законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{rr} + \nu e_{\phi\phi} + \nu e_{zz}) \\ \sigma_{\phi\phi} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + (1-\nu)e_{\phi\phi} + \nu e_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + \nu e_{\phi\phi} + (1-\nu)e_{zz}) \end{aligned} \quad (2)$$

где E — Модуль Юнга, σ_y — предел текучести, ν — коэффициент Пуассона.

Из последних соотношений можно получить:

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}) + \frac{E}{\sigma_y} e_{zz} \quad (3)$$

При этом суммарная осевая сила, действующая на цилиндр равна нулю:

$$2\pi \int_{\delta}^1 \beta \sigma_{zz} d\beta = 0. \quad (4)$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{\beta} = -\Omega \beta, \Omega = \frac{\rho b^2 \omega^2}{\sigma_y}. \quad (5)$$

Выразим напряжения через перемещения и деформации ползучести с помощью соотношений (1) и (2), подставим в уравнение равновесия и получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u_r}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} u = & - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\sigma_y}{E} \Omega \beta + \\ & + \frac{\partial p_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial \beta} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} (p_{rr} - p_{\phi\phi}). \end{aligned} \quad (6)$$

Скорости деформаций ползучести определяются законом [3]:

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7)$$

где C — потенциал ползучести.

Запишем потенциал ползучести в соответствии со степенным законом ползучести:

$$C = B \Sigma^n, \quad (8)$$

где B, n — параметры материалы, определяемые экспериментально, Σ — эквивалентное напряжение.

Эквивалентное напряжение Σ примем в следующей форме:

$$\Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma)^2 + (\sigma_{\phi\phi} - \sigma)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma)^2}, \quad (9)$$

где $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$.

Введем безразмерные величины: $\tau = t/T, X = (BT\sigma_y^{n-1})/2$, тогда для потенциала (8) можно получить выражения для скоростей деформаций ползучести:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{rr} &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial \tau} = X n \Sigma^{n-2} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{\phi\phi} &= \frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial \tau} = X n \Sigma^{n-2} (2\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{zz} &= \frac{\partial p_{zz}}{\partial \tau} = X n \Sigma^{n-2} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}). \end{aligned} \quad (10)$$

здесь T — длительность процесса.

Для определения напряжений в цилиндре помимо перемещений и деформаций ползучести также необходимо знать полную осевую деформацию. Воспользуемся соотношениями (2)–(4) и после преобразований получим:

$$e_{rr} + p_{rr} = \frac{2}{(1 - \delta^2)} \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \int_{\delta}^1 \beta (p_{rr} + p_{\phi\phi}) d\beta + \int_{\delta}^1 \beta p_{zz} d\beta - \frac{\nu}{1 - \nu} (u_r(1) - \delta u_r(\delta)) \right). \quad (11)$$

Система уравнений (1), (2), (6), (10) и (11) описывает процесс установившейся ползучести во вращающемся цилиндре. Полученная система уравнений сводится к уравнениям теории упругости, если предположить, что деформации ползучести в среде не накапливаются. Также, если предположить, что полная осевая деформация равна нулю $e_{zz} + p_{zz} = \partial u_z / \partial z = 0$, то получим задачу о развитии ползучести во вращающемся цилиндре с закрепленными концами (плоское деформированное состояние).

Перейдем к формулировке начальных и граничных условий. В начальный момент времени $\tau = 0$ деформации ползучести в цилиндре отсутствуют:

$$p_{rr} = p_{\phi\phi} = p_{zz} = 0. \quad (12)$$

На внутренней поверхности трубы используются два варианта граничных условий. Первый — цилиндр с жестким включением:

$$u|_{\beta=\delta} = 0. \quad (13)$$

Второй вариант — полый цилиндр:

$$\sigma_{rr}|_{\beta=\delta} = 0. \quad (14)$$

Внешняя поверхность трубы свободна от напряжений:

$$\sigma_{rr}|_{\beta=1} = 0. \quad (15)$$

Численная схема. Для численного решения поставленной начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных воспользуемся методом конечных разностей [18]. Построим в области деформирования $\delta \leq \beta \leq 1$ равномерную сетку из N узлов. Шаг сетки $\Delta\beta$ вычисляется, как: $\Delta\beta = (1 - \delta)/(n - 1)$, а координаты i -го узла: $\beta_i = \delta + i\Delta\beta$. Для аппроксимации пространственных производных некоторой неизвестной функции $y(\beta, \tau)$ воспользуемся конечно-разностными операторами 2-го порядка точности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(\beta, \tau)}{\partial \beta^2} &\cong \frac{y(\beta + \Delta\beta, \tau) - 2y(\beta, \tau) + y(\beta - \Delta\beta, \tau)}{\Delta\beta^2}, \\ \frac{\partial y(\beta, \tau)}{\partial \beta} &\cong \frac{y(\beta + \Delta\beta, \tau) - y(\beta - \Delta\beta, \tau)}{2\Delta\beta}. \end{aligned} \quad (16)$$

В граничных узлах сетки также используются односторонние шаблоны:

$$\begin{aligned} \beta = \delta : \frac{\partial y(\beta, \tau)}{\partial \beta} &\cong \frac{-y(\beta + 2\Delta\beta, \tau) + 4y(\beta + \Delta\beta, \tau) - 3y(\beta, \tau)}{2\Delta\beta}, \\ \beta = 1 : \frac{\partial y(\beta, \tau)}{\partial \beta} &\cong \frac{y(\beta - 2\Delta\beta, \tau) - 4y(\beta - \Delta\beta, \tau) + 3y(\beta, \tau)}{2\Delta\beta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Весь процесс деформирования разобьем на K равных шагов продолжительностью $\Delta\tau$. В уравнения (10) входит производная по времени, для ее аппроксимации воспользуемся явной схемой:

$$\frac{p_{ii}(\beta, \tau + \Delta\tau) - p_{ii}(\beta, \tau)}{\Delta\tau} \cong \dot{p}_{ii}(\beta, \tau) \quad (18)$$

Заметим, что в этом случае первый временной шаг соответствует численному решению упругой задачи. Определенные интегралы из уравнения (11) вычисляются с помощью метода трапеций.

Результаты расчетов. Для проведения расчетов использовались следующие параметры материала: $\rho = 7700$ кг/м³, $E = 210$ ГПа, $\sigma_y = 250$ МПа, $\nu = 0.3$, $n = 3$, $B = 4.1 \cdot 10^{-22}$ с⁻¹ · Па⁻ⁿ. Размеры цилиндра: $a = 0.02$ м., $b = 0.1$ м. Длительность процесса деформирования $T = 1000$ с. Параметры сетки: $N = 2500$, $K = 1000$. Скорость вращения цилиндра: $\omega = 500$ рад/с.

На рис. 1–2 представлены графики эквивалентных напряжений в цилиндре с жестким включением (13) и полом цилиндре (14) для моментов времени $\tau = 0.0, 0.5, 1.0$. Аналогичные графики для деформаций ползучести $p_{rr}, p_{\phi\phi}$ представлены на рис. 3, 4. Проведенные расчеты показали, что в процессе деформирования напряжения в цилиндре перераспределяются от начального упругого решения и к некоторому моменту времени τ_0 стабилизируются. В результате этого накопление деформаций ползучести происходит с постоянной скоростью $\dot{p}_{ii}(\beta, \tau_0)$ и дальнейшие вычисления можно значительно упростить, в частности для деформаций ползучести принять: $p_{ii}(\beta, \tau_0 + \Delta\tau) = p_{ii}(\beta, \tau_0) + \Delta\tau \cdot \dot{p}_{ii}(\beta, \tau_0)$. Видим, что деформирование полого цилиндра происходит более интенсивно, чем цилиндра с жестким включением, при этом стабилизация напряженного состояния в полом цилиндре также происходит быстрее.

Интересно сравнить полученные результаты с расчетами для цилиндра с закрепленными концами ($\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$). Анализ показал, что в свободном цилиндре имеют место более высокие напряжения и скорости деформаций ползучести, в особенности это характерно для цилиндра с жестким включением. Для него эквивалентные напряжения к концу процесса выше приблизительно в два раза.

Для оценки точности используемого алгоритма построим точное решение для упрощенной постановки задачи. Далее воспользуемся идеями работы [8], где впервые было получено решение для ортотропного цилиндра. Положим, что в цилиндре имеет место плоская деформация, а упругие деформации и напряжения не зависят от времени, тогда:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{rr} &= \frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{Xn\Sigma^{n-2}}{2} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{\phi\phi} &= \frac{v}{\beta} = \frac{Xn\Sigma^{n-2}}{2} (2\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{zz} &= 0 = \frac{Xn\Sigma^{n-2}}{2} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}). \end{aligned} \quad (19)$$

где v — скорости.

Из последнего уравнения можно найти:

$$\sigma_{zz} = \frac{(\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi})}{2} \quad (20)$$

Решение уравнения несжимаемости $\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\phi\phi} + \dot{p}_{zz} = 0$:

$$v = \frac{C}{\beta}; \dot{p}_{rr} = -\frac{C}{\beta^2}; \dot{p}_{\phi\phi} = \frac{C}{\beta^2}. \quad (21)$$

где C — константа интегрирования.

Далее из уравнений (19)–(21) найдем:

$$\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{C}{Xn}\right)^{\frac{1}{n-1}} \beta^{-\frac{2}{n-1}} \quad (22)$$

Подставим найденное выражение в уравнение равновесия (5), решая которое получим:

$$\sigma_{rr} = -\frac{n-1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{C}{Xn}\right)^{\frac{1}{n-1}} \beta^{-\frac{2}{n-1}} - \frac{1}{2}\Omega\beta^2 + D \quad (23)$$

где D — константа интегрирования.

С помощью граничных условий (13)–(15) можно найти значения констант C, D и получить окончательные выражения для напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{zz}$ и скоростей деформаций ползучести $\dot{p}_{rr}, \dot{p}_{\phi\phi}$. Сравнение результатов полученных с помощью численного алгоритма для случая плоской деформации и по формулам (21), (23) показало, что в ходе процесса деформирования напряжения и скорости деформаций ползучести стремятся к аналитическому решению задачи (19) с высокой степенью точности.

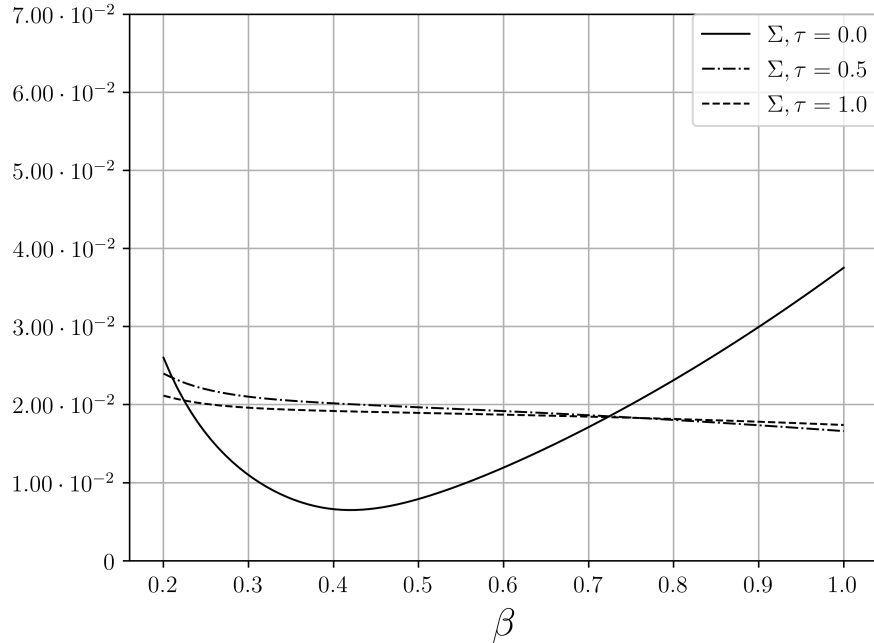
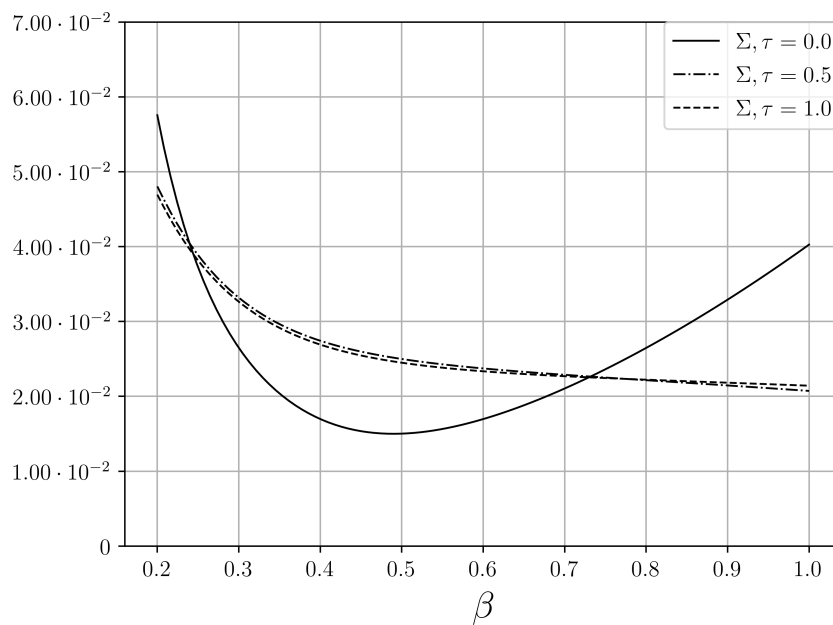
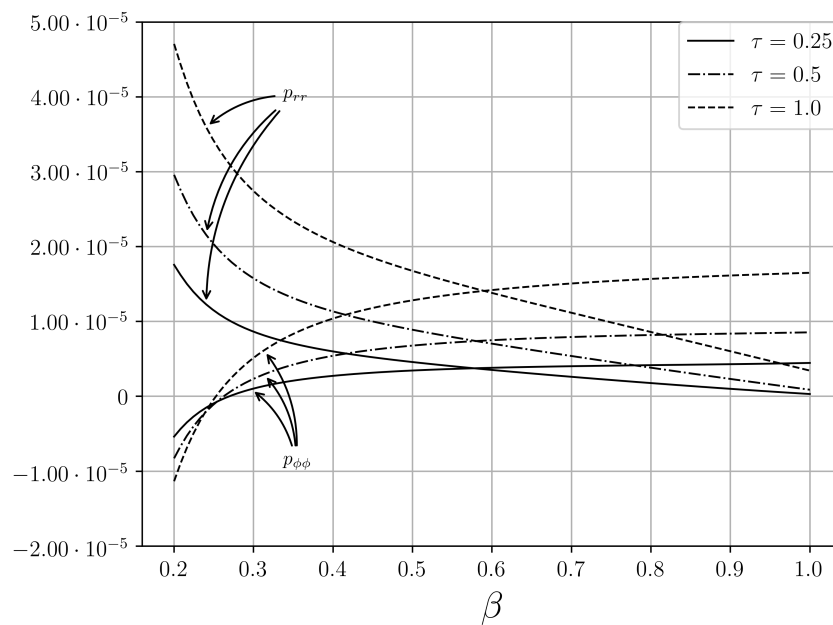


Рис. 1. Эквивалентное напряжение Σ в цилиндре с жестким включением

Рис. 2. Эквивалентное напряжение Σ в полем цилиндреРис. 3. Деформации ползучести p_{rr} и $p_{\phi\phi}$ в цилиндре с жестким включением

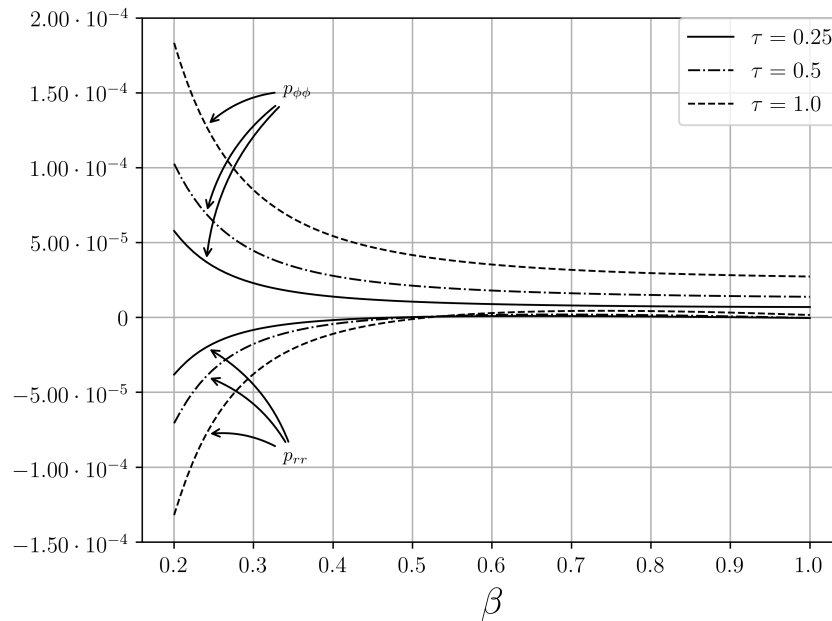


Рис. 4. Деформации ползучести p_{rr} и $p_{\phi\phi}$ в полем цилиндре

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [2] Локощенко А. М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.
- [3] Odqvist F. K. G. Mathematical theory of creep and creep rupture. Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 p.
- [4] Betten J. Creep mechanics. Berlin: Springer, 2008. 367 p.
- [5] Rusinko A., Rusinko K. Plasticity and creep of metals. Berlin: Springer-Verlag, 2011. 434 p.
- [6] Naumenko K., Altenbach H. Modeling of Creep for Structural Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 220 p.
- [7] Kobelev V. Some basic solutions for nonlinear creep // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. № 19–20. P. 3372–3381.
- [8] Bhatnagar N. S., Arya V. K., Debnath K. K. Creep Analysis of Orthotropic Rotating Cylinder // Journal of Pressure Vessel Technology. 1980. Vol. 102. № 4. P. 371–377.
- [9] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of an internally pressurised orthotropic rotating cylinder // Nuclear Engineering and Design. 1984. Vol. 83. № 3. P. 379–388.
- [10] Rimrott F. P. J., Luke J. R. Large Strain Creep of Rotating Cylinders // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1961. Vol. 41. № 12. P. 485–500.
- [11] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of orthotropic rotating cylinders considering finite strains // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1986. Vol. 21. № 1. P. 61–71.

- [12] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Analysis of an orthotropic thick-walled cylinder under primary creep conditions // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1986. Vol. 23. № 3. P. 165–185.
- [13] Singh T., Gupta V. K. Modeling Steady State Creep in Functionally Graded Thick Cylinder Subjected to Internal Pressure // *Journal of Composite Materials*. 2010. Vol. 44. № 11. P. 1317–1333.
- [14] Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder // *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. № 2. P. 747–758.
- [15] Mangal S. K., Kapoor N., Singh T. Steady-State Creep Analysis of Functionally Graded Rotating Cylinder // *Strain*. 2013. Vol. 49. № 6. P. 457–466.
- [16] Nejad M. Z., Hoseini Z., Niknejad A., Ghannad M. Steady-State Creep Deformations and Stresses in FGM Rotating Thick Cylindrical Pressure Vessels // *Journal of Mechanics*. 2015. Vol. 31. № 1. P.1–6.
- [17] Bose T., Rattan M. Effect of thermal gradation on steady state creep of functionally graded rotating disc // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2018. Vol. 67. № Supplement C. P. 169–176.
- [18] LeVeque R. J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations steady-state and time-dependent problems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 342 p.

A. N. Prokudin, S. V. Firsov

CREEP ANALYSIS OF ROTATING CYLINDER WITH FREE ENDS

Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The process of steady-state creep in rotating cylinder with free ends is investigated. Axial symmetry and generalized plane strain in cylinder are assumed. Piecewise linear potential and power creep law are used in problem statement. Finite difference method is utilized to solve governing system of differential equations. Dependences of stresses and strains in cylinder on the time are examined.

Keywords: elasticity, creep, rotating cylinder, finite difference method

REFERENCES

- [1] Rabotnov Yu. N.. Creep of structural elements. M.: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian)
- [2] Lokoshchenko A. M. Modeling of creep and long-term strength of metals. M.: MGIU, 2007. 264 p. (in Russian)
- [3] Odqvist F. K. G. Mathematical theory of creep and creep rupture. – Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 p.
- [4] Betten J. Creep mechanics. Berlin: Springer, 2008. 367 p.
- [5] Rusinko A., Rusinko K. Plasticity and creep of metals. Berlin: Springer-Verlag, 2011. 434 p.
- [6] Naumenko K., Altenbach H. Modeling of Creep for Structural Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 220 p.
- [7] Kobelev V. Some basic solutions for nonlinear creep // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. № 19–20. P. 3372–3381.
- [8] Bhatnagar N. S., Arya V. K., Debnath K. K. Creep Analysis of Orthotropic Rotating Cylinder // Journal of Pressure Vessel Technology. 1980. Vol. 102. № 4. P. 371–377.
- [9] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of an internally pressurised orthotropic rotating cylinder // Nuclear Engineering and Design. 1984. Vol. 83. № 3. P. 379–388.
- [10] Rimrott F. P. J., Luke J. R. Large Strain Creep of Rotating Cylinders // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1961. Vol. 41. № 12. P. 485–500.
- [11] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of orthotropic rotating cylinders considering finite strains // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1986. Vol. 21. № 1. P. 61–71.
- [12] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Analysis of an orthotropic thick-walled cylinder under primary creep conditions // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 1986. Vol. 23. № 3. P. 165–185.

Prokudin Aleksandr Nikolaevich

e-mail: prokudin@imim.ru, Candidate of Engineering Sciences, Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Firsov Sergey Viktorovich

e-mail: firsov.s.new@yandex.ru, Postgraduate student, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

[13] Singh T., Gupta V. K. Modeling Steady State Creep in Functionally Graded Thick Cylinder Subjected to Internal Pressure // *Journal of Composite Materials*. 2010. Vol. 44. № 11. P. 1317–1333.

[14] Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder // *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. № 2. P. 747–758.

[15] Mangal S. K., Kapoor N., Singh T. Steady-State Creep Analysis of Functionally Graded Rotating Cylinder // *Strain*. 2013. Vol. 49. № 6. P. 457–466.

[16] Nejad M. Z., Hoseini Z., Niknejad A., Ghannad M. Steady-State Creep Deformations and Stresses in FGM Rotating Thick Cylindrical Pressure Vessels // *Journal of Mechanics*. 2015. Vol. 31. № 1. P.1–6.

[17] Bose T., Rattan M. Effect of thermal gradation on steady state creep of functionally graded rotating disc // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2018. Vol. 67. № Supplement C. P. 169–176.

[18] LeVeque R. J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations steady-state and time-dependent problems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 342 p.

О. В. Марченко, А. М. Сергеева

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ
ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЛЕДЯНОГО
ПОКРОВА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ**

*Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской
академии наук, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

Аннотация. С использованием теории малых упругих деформаций и апробированного численного метода разработана математическая модель для проведения исследований напряженно-деформированного состояния упругой изотропной пластины конечной толщины, находящейся под действием динамической нагрузки. Показана целесообразность использования данной математической модели для исследования несущей способности ледяного покрова.

Ключевые слова: математическая модель, численное моделирование, сложное нагружение, теория упругости, деформирование, напряжения, ледяной покров.

УДК: 539.3

Введение. До настоящего времени остается актуальной проблема разработки математических моделей для описания сложных процессов деформирования материалов с целью исследования их напряженно-деформированного состояния и оптимизации инженерных решений для достижения требуемого результата. Проведение теоретических исследований с применением математического моделирования позволяет получать новые знания с минимальными временными и сырьевыми затратами, а также дает возможность детально изучать образование и распространение трещин в материале, спрогнозировать возможные области, являющиеся концентраторами напряжений и предупредить возможные нежелательные разрушения, а также несущей способности материала.

© Марченко О. В., Сергеева А. М., 2018

Марченко Олеся Владимировна

e-mail: olemarchenko@yandex.ru, соискатель, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Сергеева Анастасия Михайловна

e-mail: serg-nasty@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 10.03.2018

Представление исследуемых объектов в качестве упругой изотропной пластины конечной толщины, часто используется для исследования бетонных, металлических конструкций, но также может быть применено к исследованиям ледяного покрова [1, 2].

При математическом описании процесса деформирования или разрушения объекта необходимо учитывать особенности материалов, их поведения при внешнем воздействии, воздействии температурных полей, а также взаимовлияние отдельных частей деформируемого объекта друг на друга. Моделируя процессы, протекающие в ледяном покрове необходимо учитывать, что физические и механические свойства исследуемого материала являются зависимыми от температуры, от химического состава льда и от наличия включений, примесей и внутренних дефектов.

Анализируя процессы деформирования ледяного покрова, нарушения его сплошности, разрушения в результате внешнего деформирующего воздействия методами математического моделирования, необходимо учитывать, что некоторые задаваемые величины являются известными (например, параметры ледоразрушающего устройства), тогда как другие могут быть случайными (толщина льда, скорость ледового поля и т.д.). Необходимо также максимально учитывать всевозможные сочетания параметров окружающей среда, которые могут оказывать существенное влияние на протекание процессов в исследуемом объекте или объектах. Проводя исследования несущей способности ледяного покрова, необходимо учитывать тот факт, что напряжения растяжения или сдвига, при которых происходит полное разрушение ледяного покрова, должны в несколько раз превышать предел прочности льда, определенный для образца в лабораторных условиях [3]. В случае, если напряжения незначительно превышают предел прочности, то может образовываться трещина или группа трещин, а лед при этом переходит в новое устойчивое состояние и способен выдерживать внешнюю нагрузку.

Рассматриваемая в работе математическая модель разработана для решения широкого круга задач. Позволяет проводить исследования пластины, нагруженной не только квазистационарной нагрузкой, но и движущейся или даже внедряющейся. Представленная математическая модель универсализирована и позволяет проводить исследования для различных вариантов деформирования пластины, ее нагружения и исследования ее несущей способности.

Целью данной работы является апробация возможности применения разработанной математической модели изотропной пластины конечной толщины для теоретического исследования несущей способности ледяного покрова, находящегося под воздействием динамической нагрузки. В работе также проведен анализ полученных результатов и сделано заключение о практической применимости, рассмотренной математической модели.

Математическая модель. Используя уравнения теории упругости для малых деформаций, разработана математическая модель, подробное построение которой представлено в работах [3,4]. В данной работе остановимся на конечной системе уравнений:

Уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = I_i^t; \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad t = 1, 2 \dots n - \text{номер нагрузки} \quad (1)$$

$$I_i^t = \rho_t \left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \text{в случае установившегося (стационарного) движения нагрузки} \quad (2)$$

Закон Гука

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}; \quad \text{где } \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Дополнительное условие в случае всестороннего сжатия

$$3K_t \frac{d\sigma}{d\tau} - \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

Уравнение теплопроводности (только для пластины)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (5)$$

для стационарного случая

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0. \quad (6)$$

В уравнениях (1 – 6) используется суммирование по повторяющимся индексам; θ – температура льда; $\rho = \rho(\theta)$ – плотность льда, $G = G(\theta)$ – модуль сдвига льда; $[\sigma_{ij}]$ – тензор напряжений; $[\varepsilon_{ij}]$ – тензор деформаций; v_i , F_i – проекции скорости перемещений и удельной объемной силы по координатным осям x_i , $i = 1, 2, 3$; λ – коэффициент теплопроводности; $\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \tau}$, τ – время деформации.

По краям пластины при необходимости можно задавать условия закрепления уравнением:

$$\sigma_{ij} = -\psi\tau_S \frac{v_{ск}}{|v|}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где τ_S – условный предел текучести материала пластины, $v_{ск}$ – скорость перемещения пластины относительно основы закрепления, ψ – коэффициент трения, $|v|$ – нормирующая скорость.

Постановка и решение задачи с применением математической модели. Применение предлагаемой математической модели рассмотрим на примере решения задачи о деформировании упругой изотропной пластины, материал которой – пресный лед. Ледяная пластина претерпевает деформирующее воздействие со стороны движущейся ледокольной приставки.

Принцип работы устройства [5] достаточно прост. Перед судном создают свободную кромку льда. Из рис.1 видно, что рассматриваемое устройство выполнено в виде ледокольной приставки и содержит контейнеры 1, которые соединены крепежами 2 в линию, перпендикулярную движению судна. В носовой части судна при помощи тег 8 устанавливают ледокольную приставку. Для удобства конструкцию и работу устройства будем рассматривать на примере одного из контейнеров.

При заполнении области 5 водой рис.2, контейнер приобретает отрицательную плавучесть, т.е. подтапливается, а при откачке воды – контейнер приобретает положительную плавучесть, т.е. всплывает. Для обеспечения более удобного продвижения контейнера подо льдом передний край приставки (дальний от судна) и задний край (ближний к судну) оснащены полозьями 11 (рис.2), причем передний край имеет выпуклую форму 10.

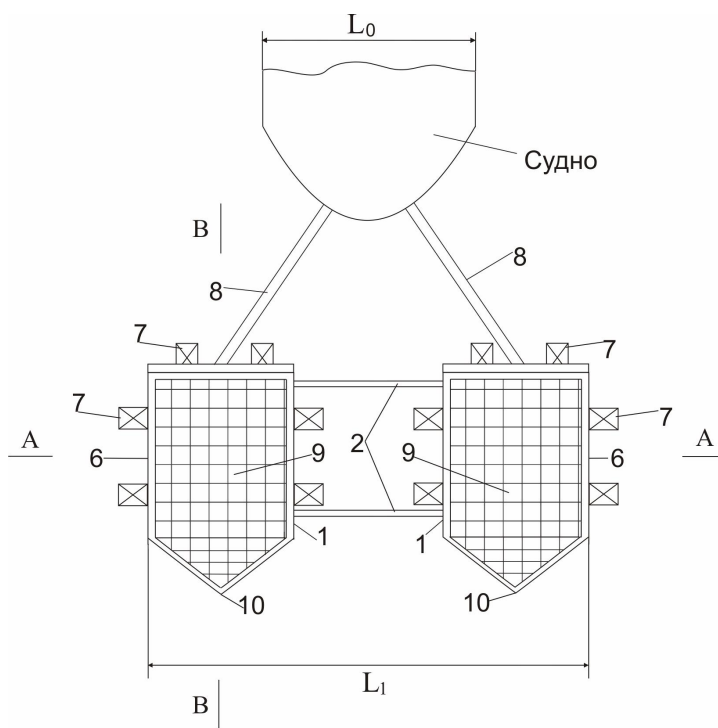


Рис. 1. Схема ледокольного устройства

Чтобы завести приставку под лед, при помощи насосов 7, установленных в области 5, контейнеру 1 сообщают отрицательную плавучесть, т.е. контейнер подтапливают. Далее из области 5, регулирующей выталкивающую силу, откачивают воду насосами 7, тем самым заставляют всплывать контейнер до контакта с ледяным покровом. Так как боковые стенки 6 контейнера, контактирующие со льдом, имеют острые края 12 (рис.2), то приставка практически врежется боковыми стенками в лед. Вода из контейнеров откачивается насосами 7, в результате чего в рабочей области 4 образуется разрежение, поэтому под действием атмосферного давления и собственного веса лед, расположенный над разреженной полостью рухнет при определенных геометрических параметрах контейнера и скорости его продвижения. Контейнер начинает подтапливаться в результате активного заполнения его водой, обломки льда всплывают, таким образом, происходит очищение контейнера ото льда. Далее обломки льда раздвигаются обводами движущегося судна. Так как разрушение льда происходит без остановки судна, то контейнер автоматически продвигается далее под ледяным покровом и процесс продолжается. Для предотвращения попадания осколков льда в насосы, устанавливается решетка 9, зернистость которой зависит от того, каких размеров включения может пропускать используемые в установке насосы 7. Контейнер имеет перегородку 3 (рис.2), которая отделяет рабочую область 4 от области 5, регулирующей выталкивающую силу. Необходимо отметить, что суммарная длина установки L_1 должна быть больше ширины судна L_0 , чтобы образовавшийся канал был безопасен для дальнейшего продвижения судна. Количество насосов, установленных в нижней

части контейнера, зависит от их подачи и максимальной толщины льда, на которую рассчитана приставка.

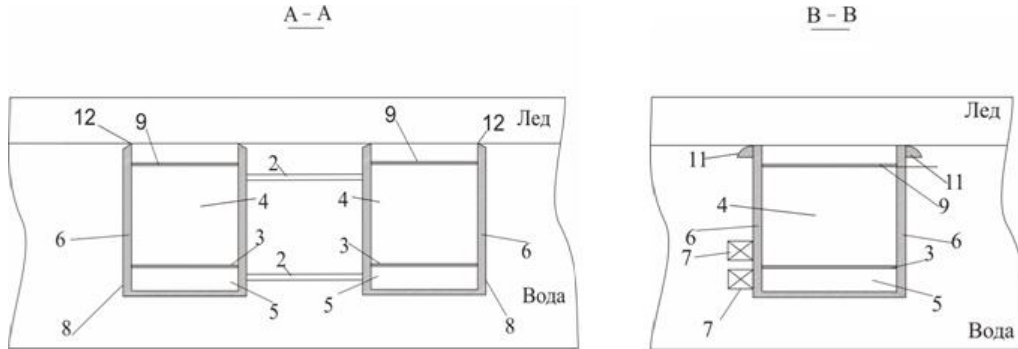


Рис. 2. Сечения плоскостями А-А, В-В, показывающие устройство конструкции для разрушения ледяного покрова.

Известно, что ледяной покров неоднороден из-за условий его формирования и наличия всевозможных включений: пузырьков воздуха, песчинок, камней и др. Сплошным лед также трудно назвать, в нем имеются температурные и деформационные трещины, образующиеся в процессе роста льда и движения ледовых масс. Возникающие в процессе жизненного цикла льда сквозные трещины могут залечиваться, в результате заполнения их водой на 90% и последующей ее кристаллизации, причем в случае такого восстановления сплошности ледяного покрова прочностные свойства льда возрастают. Достаточно сложно учесть все возможные особенности льда, поэтому при решении задач, связанных с анализом напряженно-деформированного состояния льда, применяют модели упругих изотропных пластин конечной толщины. Предложенная в работе модель упругой изотропной пластины конечной толщины с учетом ее сжимаемости, можно применить к решению задачи о деформировании и разрушении льда ледокольной приставкой. Примем, что рассматриваемая ледяная пластина имеет распределение температур по толщине от -5°C до -30°C , в таком диапазоне температур лед ведет себя упруго. Для решения задачи примем модуль Юнга и коэффициент Пуассона зависимыми от температуры и согласно работам [6,7], равными соответственно $E = (87.6 - 0.21\theta - 0.0017\theta^2) 10^2 \text{ МПа}$, $\nu = 0.5 + 0.003\theta$; коэффициент объемного сжатия (k) примем равным $k = (1 - 2\nu) / E$, модуль сдвига — $G = E / 2(1 + \nu)$. В качестве критических напряжений примем напряжения $\sigma_{\text{кр}}^{\text{рас}} = 4 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{кр}}^{\text{сж}} = -8 \text{ МПа}$, установленные в работе [6]. Процессы, происходящие в материале, из которого выполнены клин и форштвень устройства, не являются объектами исследования в данной работе, поэтому трение на контактных со льдом поверхностях устройства пренебрежем. Воспользуемся решением уравнения теплопроводности, приведенное в работах [8,9] с учетом $\lambda = \lambda_0(1 + a\theta)$, где $a = -0.0159 \text{ град}^{-1}$

$$\theta = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{x_1}{h_0} \left(\frac{2\theta_1}{a} + \theta_1 \right)} \quad (8)$$

Рассмотрим 1/2 области деформирования ледяного покрова в сечении Ox_1x_2 , проходящим вдоль контейнера. На рис.3 представлена схема, поясняющая назначение граничных условий для решения указанной задачи.

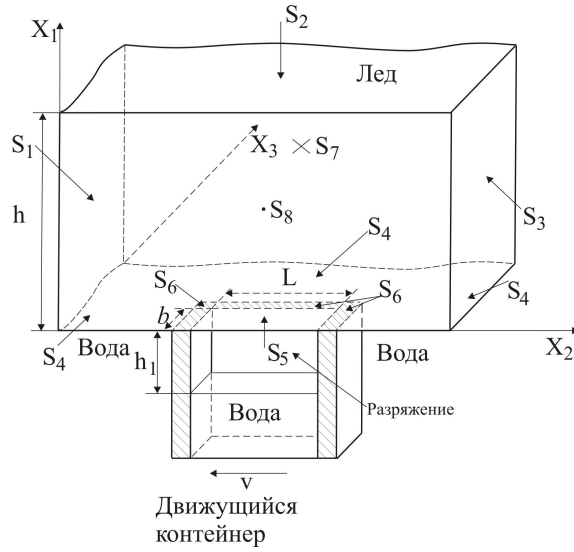


Рис. 3. Схема к расчету деформации ледяной пластины.

В представленной схеме выделены поверхности, характеризующие взаимодействия ледяного покрова с нагрузками и окружающей средой. В плоскости Ox_2x_3 определено три области S_4, S_5, S_6 моделирующие соответственно поверхность взаимодействия льда с водой, разряженной областью в контейнере и с кромками контейнера соответственно. На расстоянии h (толщина ледяного покрова) от нижней плоскости льда определена поверхность S_2 , которая моделирует контакт льда с воздухом.

В плоскости Ox_1x_3 выделено несколько поверхностей, ограничивающих исследуемую область льда и характеризующих: S_1 — взаимодействие исследуемой области льда с ледяным полем, S_3 — взаимодействие свободного края льда с атмосферой.

В плоскости Ox_2x_3 выделены поверхности S_8 и S_7 , моделирующие соответственно взаимодействие исследуемой области льда с ледяным полем и поверхность расположенную в плоскости симметрии.

Начальные условия задачи условия задачи:

$$v_i|_{\tau=0} = 0, \quad \varepsilon_{ij}|_{\tau=0} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Граничные условия задачи, в соответствии с рис.3:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{S_2} = -p_0; \quad \sigma_{11}|_{S_4} = -p_0 - \gamma h; \quad \sigma_{11}|_{S_5} = 0, \quad \sigma_{11}|_{S_6} = -p_0 - \gamma h - p_1; \\ (\sigma_{12} = \sigma_{13})|_{S_i} = 0, \quad i = 2, 4, 5, 6; \quad (\sigma_{21} = \sigma_{23})|_{S_i} = 0, \quad i = 1, 3; \quad \sigma_{22}|_{S_3} = 0; \\ \sigma_{32}|_{S_i} = 0; \quad i = 7, 8; \quad \sigma_{31}|_{S_8} = 0; \quad \sigma_{33}|_{S_7} = 0; \quad v_2|_{S_1} = v^*; \quad v_3|_{S_8} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь p_0 — атмосферное давление; γ — удельный вес льда, h — толщина льда; $p_1 = bLh_1\gamma_0/\delta(L + 2(b + \delta))$ — выталкивающее давление, появляющееся, когда в контейнере образовалась полость высотой h_1 ; v^* — скорость перемещения ледяного покрова; γ_0 — удельный вес воды; b — половина ширины контейнера; L — длина контейнера; δ — ширина кромки контейнера (рис.3).

Для стабилизации системы в вертикальном направлении на периферийной плоскости S_7 задавалось уравнение

$$\sigma_{31}|_{S_7} = -\psi\tau_S \frac{v_{СК}}{|v|}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Где ψ — коэффициент ($\psi = 1000$); $v_{СК}$ — скорость скольжения льда относительно основы; $v_{СК} = v_1|_{S_7} - v_1^{**}$; v^{**} — скорость перемещения основы (в нашем случае $v^{**} = 0$); τ_S — условный предел текучести льда. Как показали расчеты, при принятом значении ψ величина касательных напряжений на плоскости S_7 не превышает 0,1 МПа, величина скорости v_1 вблизи поверхности S_7 не превышает 0,01 мм/сек.

При решении задачи применялся численный метод [10], в соответствии с которым исследуемая область представляется в виде объемных ортогональных ячеек конечных размеров, количество ячеек — 2340 штук. Для каждой ячейки записывается система уравнений в разностном виде в количестве 74820. Расчетное время одной итерации, произведенной на компьютере с процессором INTEL® Core™ i5 CPU 760@2.80GHz составило 48с. Для сходимости решения с установленной точностью 0.001 потребовалось 18 итерации на каждом временном шаге. Решение системы уравнений производится по алгоритму, описанному в работах [11,12], с применением программного продукта [13].

Результаты исследований. Исследованию напряженно-деформированного состояния подвергался ледяной покров толщиной 0.5 м, 0.75 м, 1.0 м, находящийся под воздействием динамической нагрузки в виде ледокольной приставки, движущейся с постоянной скоростью 10 км/ч, 20км/ч, 30км/ч. Длина контейнера принималась равна 4 м, ширина 3 м, причем контейнер подо льдом располагается так, что его длина параллельна движению судна и приставки. Температура окружающей среды принимаем -30°C .

Устойчивость полученных решений проверялась численно при варьировании задаваемых параметров в пределах 0.01%. В результате вычислений решения, полученные при задании параметров с погрешностью, и без нее совпали, соответственно получаемые решения можно считать устойчивыми. При проведении вычислений проводился контроль значений касательных напряжений. Расчетные значения касательных напряжений всегда на порядок были меньше нормальных напряжений, поэтому нормальные напряжения принимались главными.

Рассмотрим более подробно результаты численного решения, и определим возможность разрушения льда данным способом на основании анализа НДС ледяной пластины, находящейся под действием динамической нагрузки.

В данной работе рассматривается НДС ледяной пластины. На рис.4, 5 приведено распределение напряжений в верхних слоях ледяной пластины, при квазипостоянном движении ледяного контейнера подо льдом. Из рис.2, 5 видно, что при исследуемых скоростях передвижения 30 км/ч, 20 км/ч, 10 км/ч в ледяном покрове наибольших значений достигают напряжения в ледяном покрове, расположенном над серединой полости контейнера.

Для льда рассматриваемых толщин характерно распределение напряжений, при котором характер σ_{22} и σ_{33} одинаков. На поверхности льда, контактирующей с воздухом, наблюдаются сжимающие напряжения, а на противоположной поверхности растягивающие. Лед деформируясь провисает в разряженную полость контейнера. Перемещение льда в направлении противоположном оси x_1 у полуметрового льда не

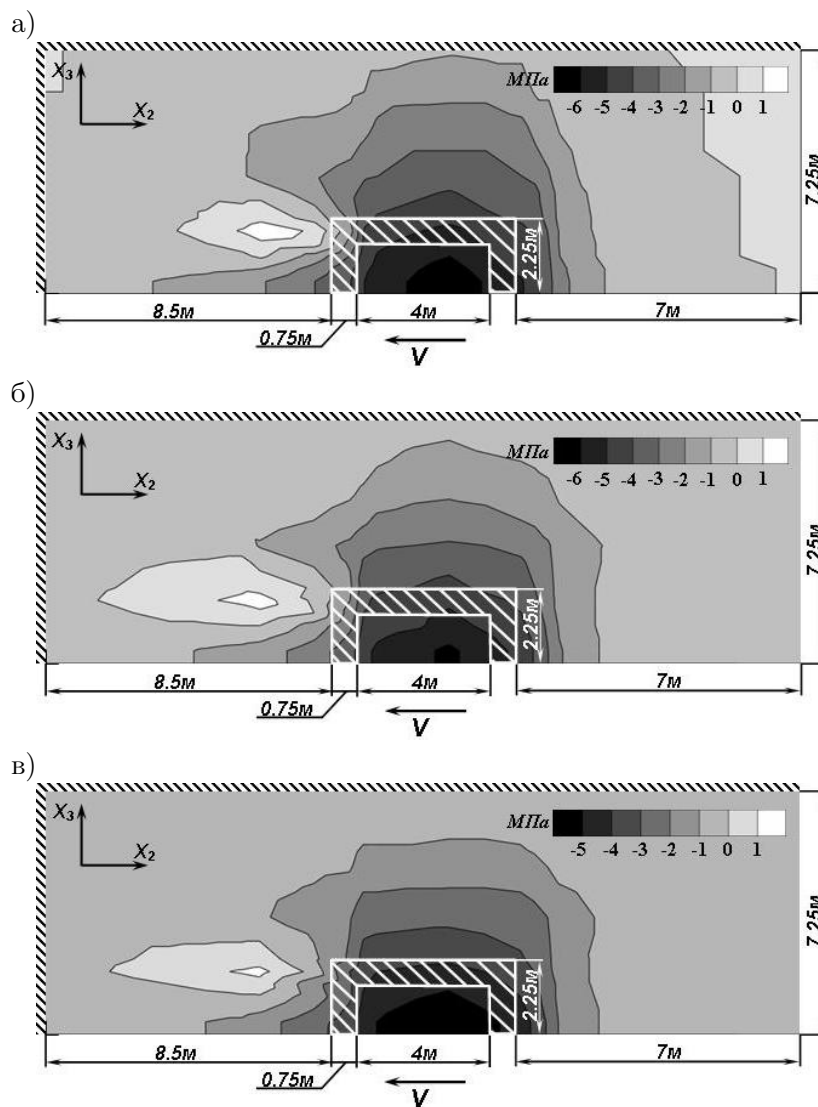


Рис. 4. Схема распределения напряжений σ_{22} в приповерхностных слоях ледяного покрова, находящегося под действием системы нагрузок при скорости движения ледокольной приставки а) — 30 км/ч; б) — 20 км/ч; в) — 10 км/ч.

превышает 2.8 см, а у метрового 0.4 см, для льда толщиной 0.75 м провисание не превышает 1.2 см.

У льда толщиной 0.5 м наибольшие растягивающие напряжения достигают $\sigma_{33} = 6.9$ МПа, а сжимающие $\sigma_{33} = -7.1$ МПа в том же сечении при скорости движения ледокольной приставки $v = 30$ км/час. Напряжения при $v = 20$ км/час и $v = 10$ км/час меньше по своим численным значениям напряжений при $v = 30$ км/час.

Рассматривая лед толщиной 0.75 м наибольшие, установлено, что растягивающие напряжения достигают $\sigma_{33} = 4.7$ МПа, а сжимающие $\sigma_{33} = -5.2$ МПа в том же сечении при скорости движения ледокольной приставки $v = 30$ км/час. Напряжения при

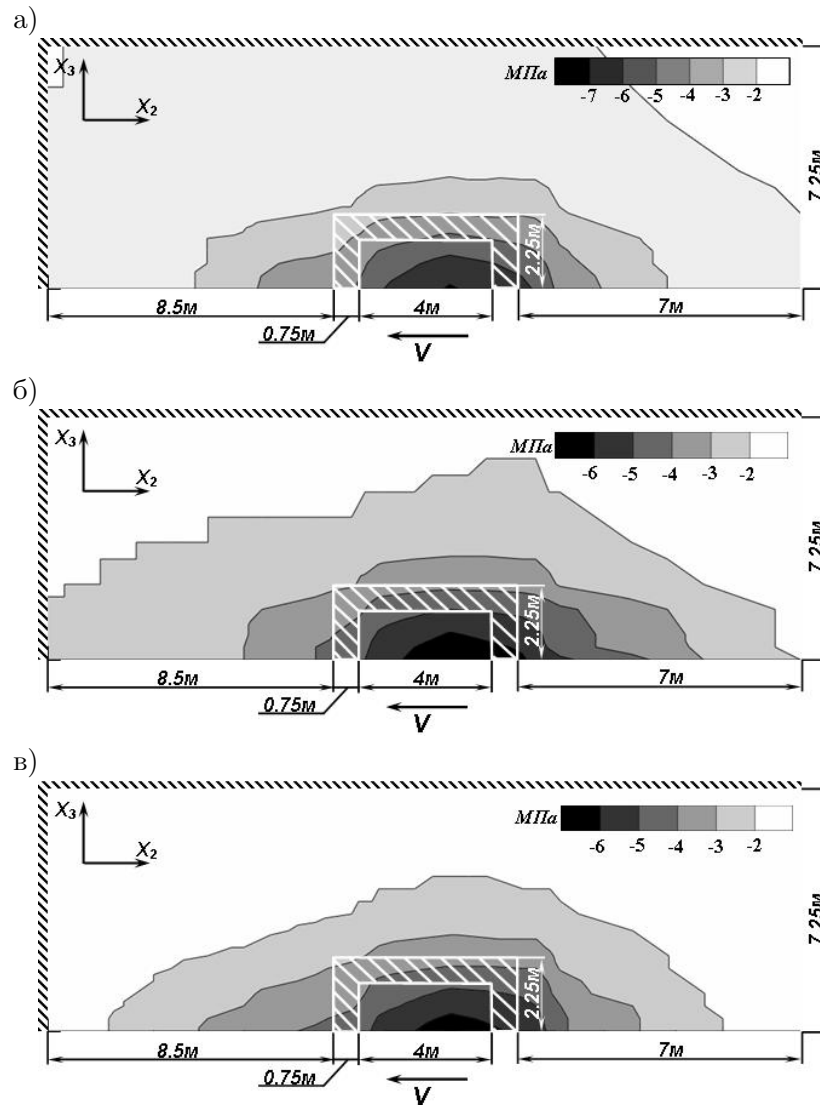


Рис. 5. Схема распределения напряжений σ_{33} в приповерхностных слоях ледяного покрова, находящегося под действием системы нагрузок при скорости движения ледокольной приставки а) — 30 км/ч; б) — 20 км/ч; в) — 10 км/ч.

$v = 20$ км/час и $v = 10$ км/час меньше по своим численным значениям напряжений при $v = 30$ км/час.

Во льду толщиной 1 м максимальные растягивающие и сжимающие напряжения равны соответственно $\sigma_{33} = 1.9$ МПа и $\sigma_{33} = -1.6$ МПа. Напряжения, возникающие в толще метрового льда, в 3.8 раза меньше напряжений возникающих в полуметровом ледяном покрове при тех же параметрах контейнера. Наибольшие значения напряжений в толще метрового льда отмечены также при $v = 30$ км/час.

В сечении, проходящем по задней стенке контейнера на расстоянии $k = 2.5$ м перед контейнером, наблюдается изменение характера распределения напряжения. На

поверхности льда и на нижней его части имеют место растягивающие напряжения равные, соответственно, у льда толщиной 0.5 м. 1.7 МПа и 0.5 МПа, у льда толщиной 0.75 м 1.1 МПа и 0.3 МПа, а у метрового - 0.5 МПа и 0.1 МПа.

Если в качестве критерия разрушения принять напряжение растяжения $\sigma_{\text{пр.раст.}} = 1$ МПа, а напряжение сжатия $\sigma_{\text{пр.сжим}} = -2.7$ МПа, то, в данном случае, можно с уверенностью утверждать, что лед толщиной 0.5 м будет полностью разрушаться при всех рассматриваемых скоростях передвижения ледокольной приставки. Если скорость движения контейнера $v = 10$ км/час, то начальные разрушения будут наблюдаться уже на расстоянии 6 метров перед контейнером, при $v = 20$ км/час — 5 м, при $v = 30$ км/час — 4 м. В окрестности контейнера разрушение полуметрового льда будет полным. При таких параметрах контейнера у метрового льда характер распределения напряженного состояния будет несколько иным. Сжимающие напряжения, в отличие от растягивающих, не превышают принятого критерия разрушения. Вероятнее всего у льда толщиной 1 м будет иметь место только начальное разрушение, возникающее над полостью контейнера. В этом случае, необходимо доламывание льда, которое может быть осуществлено обводами судна движущего приставку. Ледяной покров толщиной 0.75 м будет разрушен частично, а именно, будет иметь место начальное нарушение сплошности с вероятностью его эволюционирования до разрушения.

Рассмотрим второй вариант расположения ледокольной приставки подо льдом, когда контейнер вытянут в направлении перпендикулярном движению судна. В этом случае параметры будут следующими $L = 3$ м, $2b = 4$ м, $e = 2.4$ м, $r = 4$ м. Характер распределения напряжения во льду толщиной 0.5 м при скоростях $v = 10$ км/час, $v = 20$ км/час и $v = 30$ км/час по сравнению с ранее рассмотренным случаем остается практически без изменений. Изменение конфигурации контейнера привело к росту численных значений напряжений σ_{22} у полуметрового льда в интервале от 0.5–0.6 МПа, а σ_{33} — от 0.1–0.2 МПа. У льда толщиной 0.75 м — σ_{22} от 0.2–0.3 МПа, а σ_{33} — от 0.05–0.1 МПа, у метрового льда увеличение σ_{22} колеблется в интервале от 0.1–0.2 МПа, а σ_{33} — от 0.03–0.05 МПа. Безусловно, малое изменение напряжений не может оказать значительного влияния на изменение распределения напряжений в исследуемой области деформирования.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что движущаяся подо льдом ледокольная приставка вызывает значительные деформации ледяного покрова толщиной 0.5 м, 0.75 м и 1 м. Различные варианты расположения контейнера под метровым льдом не вызывают изменений в характере распределения напряжения в толще льда на всем интервале задания скоростей. Полное разрушение льда над полостью контейнера будет происходить при толщине льда 0.5 м.

Вывод. Проведенные в работе исследования ледяного покрова, находящегося под действием движущейся нагрузоки, с применением разработанной математической модели однородной изотропной пластины конечной толщины, находящейся под действием системы нагрузок, показали пригодность разработанной модели для проведения исследований напряженно-деформированного состояния нагруженных пластин.

Результаты численных исследований показали, что данное ледокольное устройство может быть использовано для разрушения ледяного покрова толщиной 0.5 м, причем оптимальная скорость устройства равна 30 км/ч.

Предложенная математическая модель деформирования системой нагрузок однородной изотропной пластины конечной толщины и результаты исследования

напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, могут быть использованы для разработок инновационных способов разрушения льда и прокладывания судоходных каналов в зимние периоды на реках северных регионов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лосет С., Шхинек К., Гудместад О., Хойланд К. Воздействие льда на морские и береговые сооружения. СПб. : Издательство «Лань», 2010. 272 с.
- [2] Козин В. М., Онищук А. В., Марьин Б. Н., Иванов Ю. Л., Повзык Н. Г., Шпорт В. П. Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов. Владивосток: Дальнаука, 2005. 191 с.
- [3] Сергеева А. М. Моделирование разрушения ледяного покрова // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. №1. С.131–137.
- [4] Марченко О. В., Сергеева А. М. Об особенностях деформирования тяжелой упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки применительно к изучению прочности ледяного покрова // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С.61–72.
- [5] Одинок В. И., Сергеева А. М., Марченко О. В. Устройство для разрушения ледяного покрова. Патент РФ № 2360825. / Бюл. № 19. Оpubл. 10.07.2009.
- [6] Богородский В. В., Гаврило В. П. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л. : Гидрометеиздат, 1980.
- [7] Богородский В. В., Гаврило В. П., Недошивин О. А. Разрушение льда. Методы, технические средства. Л.: Гидрометеиздат, 1983.
- [8] Сергеева А. М., Одинок В. И., Марченко О. В. Математическое моделирование процессов деформирования пластины конечной толщины, находящейся под действием системы нагрузок // Приоритеты и научное обеспечение технологического прогресса: сборник статей международной научно-практической конференции 10октября2016г., г.НижнийНовгород. Уфа: Аэтерна, 2016. С.100–102.
- [9] Сергеева А. М., Марченко О. В. Применение математической модели деформирования пластины конечной толщины для исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова. // Инновационные исследования: Проблемы и направления развития: сборник статей международной научно-практической конференции 13октября2016г., г.Омск. В 2 ч. Уфа: МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2016. Ч.1. С.8–11.
- [10] Одинок В. И. Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом. Владивосток : Дальнаука, 1995. 168 с.
- [11] Сергеева А. М., Одинок В. И., Марченко О. В. Определение напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при движении под ним ледокольной приставки [Текст] // Математическое моделирование. 2009. №10. С.47–57.
- [12] Сергеева А. М., Марченко О. В. Деформация ледяного покрова под действием атмосферного давления и собственного веса льда [Текст] // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Нижний Новгород: НГТУ им. Р.Е.Алексеева.2010. №4(83). С.157–165.
- [13] Одинок В. И., Сергеева А. М., Захарова Е. А. Моделирование процесса разрушения ледяного покрова с помощью ледокольной приставки. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2007614584. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 31 октября 2007.Заявка №2007612232.

O. V. Marchenko, M. A. Sergeeva

THE MATHEMATICAL MODEL OF ELASTIC ISOTROPIC PLATE OF FINITE THICKNESS INTENDED FOR STUDYING THE STRESS-STRAIN STATE OF THE ICE COVER UNDER THE INFLUENCE OF A DYNAMIC LOAD.

Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amure, Russia

Abstract. The mathematical model has been made with the applying of theory of small elastic strains and well-tested numerical method for research of stress-strain state of elastic isotropic plate of finite thickness, under the influence of the dynamic load. The practicability of using this mathematical model to study the bearing capacity of the ice cover was shown.

Keywords: mathematical model, numerical simulation, complex loading, elasticity theory, deformation, stresses, ice cover.

REFERENCES

- [1] Loset S., SHkhinek K., Gudmestad O., Hojland K. *Vozdejstvie l'da na morskije i beregovye sooruzheniya*. SPb . : Izdatel'stvo «Lan'», 2010. 272 s. (in Russian)
- [2] Kozin V. M., Onishchuk A. V., Mar'in B. N., Ivanov YU. L., Povzyk N. G., SHport V. P. *Ledorazrushayushchaya sposobnost' izgibno-gravitacionnyh voln ot dvizheniya ob"ektov*. Vladivostok: Dal'nauka, 2005. 191 s. (in Russian)
- [3] Sergeeva A. M. *Modelirovanie razrusheniya ledyanogo pokrova // Vestnik CHGPU im. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2007. №1. S.131–137. (in Russian)
- [4] Marchenko O. V., Sergeeva A. M. *Ob osobennostyah deformirovaniya tyazheloj uprugoj plastiny konechnoj tolshchiny pod dejstviem podvizhnoj nagruzki primenitel'no k izucheniyu prochnosti ledyanogo pokrova // Vestnik CHGPU im. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2016. № 4(30). S.61–72. (in Russian)
- [5] Odinkov V. I., Sergeeva A. M., Marchenko O. V. *Ustrojstvo dlya razrusheniya ledyanogo pokrova*. Patent RF № 2360825. / Byul. № 19. Opubl. 10.07.2009. (in Russian)
- [6] Bogorodskij V. V., Gavriilo V. P. *Fizicheskie svojstva. Sovremennye metody glyaciologii*. L . : Gidrometeoizdat, 1980. (in Russian)
- [7] Bogorodskij V. V., Gavriilo V. P., Nedoshivin O. A. *Razrushenie l'da. Metody, tekhnicheskie sredstva*. L.: Gidrometeoizdat, 1983. (in Russian)
- [8] Sergeeva A. M., Odinkov V. I, Marchenko O. V. *Matematicheskoe modelirovanie processov deformirovaniya plastiny konechnoj tolshchiny, nahodyashchejsya pod dejstviem sistemy nagruzok // Prioritety i nauchnoe obespechenie tekhnologicheskogo*

Marchenko Olesya Vladimirovna

e-mail: olemarchenko@yandex.ru, Postgraduate student, Federal State budget institution of Science Institute of machinery and metallurgy of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amure, Russia.

Sergeeva Anastasiya Mikhailovna

e-mail: serg-nasty@mail.ru, Ph. D., Senior Research Fellow, Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amure, Russia.

progressa: sbornik statej mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii 10oktyabrya2016g., g.NizhnijNovgorod. Ufa: Aehterna, 2016. S.100–102. (in Russian)

[9] Sergeeva A. M., Marchenko O. V. Primenenie matematicheskoy modeli deformirovaniya plastiny konechnoj tolshchiny dlya issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya ledyanogo pokrova. // Innovacionnye issledovaniya: Problemy i napravleniya razvitiya: sbornik statej mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii 13oktyabrya2016g., g.Omsk. V 2 ch. Ufa: MCH OMEGA SAJNS, 2016. CH.1. S.8–11. (in Russian)

[10] Odinkov V. I. CHislennoe issledovanie processa deformacii materialov beskoordinatnym metodom. Vladivostok : Dal'nauka, 1995. 168 s. (in Russian)

[11] Sergeeva A. M., Odinkov V. I., Marchenko O. V. Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya ledyanogo pokrova pri dvizhenii pod nim ledokol'noj pristavki [Tekst] // Matematicheskoe modelirovanie. 2009. №10. S.47–57. (in Russian)

[12] Sergeeva A. M., Marchenko O. V. Deformaciya ledyanogo pokrova pod dejstviem atmosfernogo davleniya i sobstvennogo vesa l'da [Tekst] // Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva. Nizhnij Novgorod: NGTU im. R.E.Alekseeva.2010. №4(83). S.157–165. (in Russian)

[13] Odinkov V. I., Sergeeva A. M., Zaharova E. A. Modelirovanie processa razrusheniya ledyanogo pokrova s pomoshch'yu ledokol'noj pristavki. Svidetel'stvo ob oficial'noj registracii programmy dlya EHVM №2007614584. Zaregistrirvano v Reestre programm dlya EHVM 31 oktyabrya 2007.Zayavka №2007612232. (in Russian)

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chgpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Немировский Ю. В.</i> Предельное состояние круглых и кольцевых пластин из разносопротивляющихся материалов.....	3
<i>Кадымов В. А.</i> Контактная краевая задача о растекании кусочно-однородного пластического слоя на плоскости.....	12
<i>Непершин Р. И.</i> Сдавливание жесткопластической сферы плоскими штампами	26
<i>Артемов М. А., Барановский Е. С., Сёмка Э. В., Третьякова Ю. Н.</i> О некоторых аспектах теории пластичности.....	39
<i>Минаева Н. В., Сабынин Д. В.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния неоднородной упругопластической трубы методом малого параметра	47
<i>Микишанина Е. А.</i> Решение задачи фильтрации жидкости в упруго-пористой среде с переменной проницаемостью	57
<i>Прокудин А. Н., Фирсов С. В.</i> Расчет ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами	63
<i>Марченко О. В., Сергеева А. М.</i> Математическая модель упругой изотропной пластины конечной толщины для исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, находящегося под действием динамической нагрузки	74
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	87
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	90
СОДЕРЖАНИЕ	92

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2018. № 1 (35)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 30.03.2018. Выход в свет 31.03.2018.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 12,75.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе ФГБОУ ВО «Чувашский
государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38