

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал
№ 4(22)
Октябрь – декабрь 2014 г.**

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых
должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание
ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов,
С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов,
А. И. Шашкин

Международный совет: Р. Ю. Амензаде (Азербайджан), С. В. Варданын (Армения),
В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж (Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2014

В. Г. Баженов, Н. С. Дюкина

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ ЗАГЛУБЛЕННЫХ СООРУЖЕНИЙ

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского,
г. Н. Новгород*

Аннотация. В работе предложена эффективная численная методика решения трехмерных задач сейсмостойкости заглубленных крупногабаритных сооружений, которая позволяет учесть эффекты контактного взаимодействия стенок сооружения с прилегающим грунтом, влияние поля силы тяжести, неоднородное строение грунтовой среды, а также различные варианты расположения гипоцентра землетрясения. В рамках данной конечно-элементной вариационно-разностной методики проведено обоснование выбора размеров расчетной области примыкающего к сооружению грунта и моделей сплошной среды для описания твердых и мягких грунтовых оснований. Разработана численная методика определения кинематических граничных условий на нижней границе расчетной области грунта по заданной на поверхности грунта экспериментальной акселерограмме. Для исключения влияния краевых эффектов на результаты решения задачи предложены специальные мало отражающие волны граничные условия. Описанные методы и алгоритмы решения задач сейсмостойкости сооружений реализованы в сертифицированном программном комплексе «Динамика-3», проведено распараллеливание разработанного конечно-элементного алгоритма по принципу пространственной декомпозиции расчетной области. Разработанная численная методика позволила корректно поставить задачу о сейсмических вибрациях заглубленного сооружения, сократить вычислительные затраты и повысить эффективность численных исследований сейсмостойкости сооружений. Благодаря этому стал технически возможным многократный пересчет задачи с различными вариантами воздействия – такие расчеты отражают опыт многих землетрясений, что повышает достоверность получаемых оценок. В статье приведены результаты типовых расчетов сейсмостойкости заглубленного сооружения АЭС – взаимные вертикальные и горизонтальные смещения стенок здания и грунта, – которые в дальнейшем могут быть использованы для оценки прочности примыкающих к сооружению подземных трубопроводов.

Ключевые слова: численное моделирование, сейсмостойкость, контактное взаимодействие, грунтовая среда.

УДК: 539.3

Поступила 10.10.2014

Работа выполнена при частичном финансировании гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-593.2014.8 гранта Министерства образования и науки (соглашение № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ от 27.08.2013) и Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 14-01-31113, 14-08-01129).

Введение. Строительные нормы и правила [1] предусматривают расчет сейсмостойкости малозаглубленных сооружений и основываются на упрощенной модели грунтового основания. В [2] предложен приближенный метод, в котором жесткость основания учитывается путем введения совокупности упругих связей, присоединенных к фундаментной плите. Однако динамическая жесткость основания зависит от его размеров, величины нагрузки, типа грунта и так далее, поэтому определение используемых в [2] параметров до сих пор остается недостаточно изученной проблемой. Исследования сейсмостойкости заглубленных сооружений и примыкающих к ним подземных трубопроводов должны включать в рассмотрение достаточно большой массив прилегающего к сооружению грунта, размеры которого обеспечивают минимизацию отраженных от границ грунтового массива волн вблизи сооружения. Необходимость точного описания сооружения и высокочастотных сейсмических осцилляций делает численное моделирование крупногабаритных задач сейсмоки разностными методами крайне трудоемкой задачей. Изложенный в [3] метод моделирования длительного динамического взаимодействия заглубленных сооружений с грунтом существенно сокращает вычислительные затраты и учитывает эффекты контактного взаимодействия стенок сооружения с грунтовым основанием.

Численная методика. В рамках предлагаемой методики массив грунта представляется прямоугольным параллелепипедом, размеры которого в 20 раз превосходят характерные размеры основания сооружения в плане — этого достаточно [3] для исключения влияния краевых эффектов на результаты расчета вблизи сооружения. Достаточно жесткие грунты моделируются однородной или многослойной идеально упругой средой, для мягких грунтов оснований применяется трансверсально-изотропная модель грунта [4], учитывающая изменение механических характеристик грунта с глубиной. Расчетная область находится в поле сил тяжести. В зависимости от расположения гипоцентра землетрясения к нижней или боковой границе грунта прикладывается сейсмическое воздействие в виде компонент вектора скорости v_x, v_y, v_z ; на остальных границах моделируются специальные мало отражающие волны граничные условия. Между сооружением и грунтом моделируется контактное взаимодействие с учетом сухого трения.

Для описания деформирования тел в рамках гипотез механики сплошной среды используется вариационно-разностный подход. Движение сплошных сред в лагранжевых переменных в неподвижной декартовой системе координат описывается уравнениями, следующими из вариационного принципа баланса мощностей:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\sigma_{ij}(\delta \dot{u}_{i,j} + \delta \dot{u}_{j,i})}{2} + \rho \ddot{u}_i \delta \dot{u}_i + \rho f_i \delta \dot{u}_i \right) d\Omega - \int_G p_i \delta \dot{u}_i dS - \int_G q_i \delta \dot{u}_i dS = 0. \quad (1)$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_i — скорости перемещений, p_i, q_i — компоненты поверхностной нагрузки и контактного давления, f_i — компоненты массовых сил, отнесенные к единице массы ($i = x, y, z$). Компоненты контактных усилий q_i в (1) определяются в местном координатном базисе s, ξ , связанном с поверхностью контакта: нормальные компоненты усилий q_ξ находятся из условия непроникания (2), а касательные усилия q_s — в соответствии с законом Амонтона-Кулона (3). Связь контактирующих подобластей полагается односторонней, то есть допускается их отрыв друг от друга и повторное вступление в контакт.

$$q_\xi = \begin{cases} 0 & q_\xi \geq 0 \\ q_\xi & q_\xi < 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$q_s = \begin{cases} q_s & |q_s| \leq k_\xi |q_\xi| \\ k_\xi |q_\xi| \operatorname{sign}(q_s) & |q_s| > k_\xi |q_\xi|. \end{cases} \quad (3)$$

Решение определяющей системы уравнений (1) при заданных начальных и граничных условиях основывается на вариационно-разностном методе дискретизации по пространственным координатам и явной схеме интегрирования по времени [5]. Процесс деформирования сплошной среды во времени разбивается на временные слои $t^0, t^1, \dots, t^k, \dots$ с шагами

$\Delta t^{k+1} = t^{k+1} - t^k$. Схема вычисления скоростей и перемещений по времени представляется в виде:

$$\begin{aligned}(\dot{u}_i)_j^{k+1/2} &= (\dot{u}_i)_j^{k-1/2} + (F_i)_j^k \Delta t^{k+1/2} / (M)_j^k \\(u_i)_j^{k+1} &= (u_i)_j^k + (\dot{u}_i)_j^{k+1/2} \Delta t^{k+1} \\ \Delta t^{k+1/2} &= \frac{\Delta t^{k+1} + \Delta t^k}{2}, (i = x, y, z).\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь F_i – обобщенные силы, действующие на расчетный узел j , M – масса в j -м узле. Выбор шага интегрирования Δt^{k+1} осуществляется из условия устойчивости Куранта. Применение процедуры консервативного сглаживания к разностной схеме второго порядка точности (4) позволяет подавить нефизические осцилляции численного решения.

Для численного исследования сейсмостойкости необходимо иметь кинематические или силовые граничные условия, при задании которых на границе расчетной области массива грунта вблизи сооружения воспроизводилась бы известная акселерограмма. В [3] авторами предложена численная методика определения кинематических граничных условий, основанная на допущении, что приходящие от источника землетрясения к сооружению волны можно считать плоскими и распространяющимися по нормали к дневной поверхности грунта. Поскольку эпицентр землетрясения может быть расположен на существенном удалении от сооружения, в расчетах сейсмостойкости необходимо исследовать несколько вариантов направления распространения сейсмических волн. Вычислительные эксперименты показали, что расположение источника сейсмического воздействия не влияет на раскачивание заглубленного сооружения. Различия в результатах решения для предельных вариантов расположения источника сейсмических волн – существенное удаление по горизонтали и по вертикали – объясняются давлением грунта на стенки здания со стороны подхода горизонтально распространяющихся волн.

Описанные методы решения, алгоритмы моделирования контактного взаимодействия, мало отражающие волны граничных условий и учета поля сил тяжести реализованы в сертифицированном программном комплексе «Динамика-3» [6] (сертификат № РОСС RU.МЕ20.НОО338 Госстандарта России, Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013, выданный Научно-техническим центром по ядерной и радиационной безопасности). С целью повышения эффективности численных исследований сейсмостойкости сооружений проведено распараллеливание алгоритма конечно-элементной методики решения трехмерных нелинейных задач динамики конструкций по принципу пространственной декомпозиции расчетной области [7], в соответствии с которым вычисления в подобластях расчетной области распределяются по узлам кластера. Алгоритм решения задачи на каждом временном слое распадается на две части: последовательную и параллельную. Основной объем вычислений (определение компонент деформаций, напряжений, узловых сил, интегрирование уравнений движения и т.д.) осуществляется параллельно, в последовательной части происходит согласование рассчитанных величин, полученных на разных узлах кластера [8].

Результаты расчетов. Разработанная вычислительная модель динамического взаимодействия сооружения с грунтом применена для оценки сейсмостойкости подземных трубопроводов, примыкающих к ответственным сооружениям АЭС Бушер (Иран), Нововоронежской АЭС-2, Калининской, Ростовской АЭС (Россия), Белорусской АЭС (Белоруссия) по заказу ОАО «НИАЭП» (Н. Новгород). Проведены исследования поведения сооружений и примыкающих подземных трубопроводов в зависимости от параметров сейсмического воздействия и различных геометрических и физических параметров сооружения и грунта [3,9]. Ниже приведены результаты типового расчета.

Задача решалась в трехмерной постановке с использованием программного комплекса «Динамика-3». Сооружение моделировалось упругим параллелепипедом с размерами в плане 51,0 x 121,0м, высотой 43,17м, заглубленным в грунт на 8,1м (рис. 1).

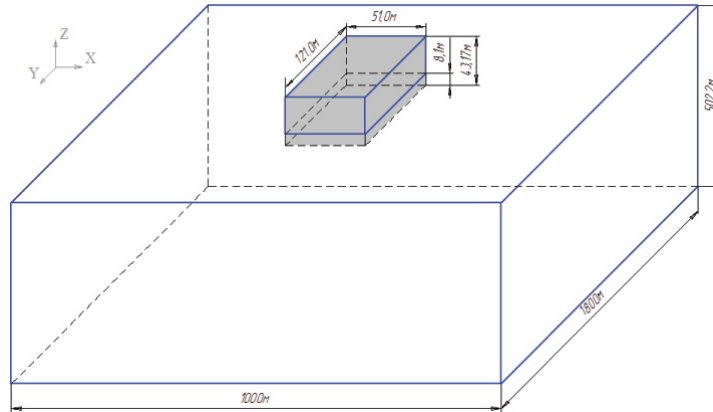


Рис. 1. Вид расчетной области

Механические характеристики сооружения: модуль упругости $E=21$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu=0,25$, плотность $\rho=115,615$ кг/м³, для грунта модуль упругости $E=40$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu=0,35$, плотность $\rho=2250,0$ кг/м³. Между зданием и грунтом допускается контактное взаимодействие с учетом сухого трения (коэффициент трения 0,554). В начальный момент времени система грунт-здание находилась в поле силы тяжести. Задача об определении начального поля перемещений решена методом стационарирования с введением линейной вязкости. По окончании процесса стационарирования расчетной области в поле сил тяжести к нижней границе грунтового массива прикладывается кинематическая нагрузка, восстановленная из экспериментальной акселерограммы 6-балльного землетрясения длительностью 20 секунд (рис. 2, где кривые 1,2,3 соответствуют компонентам вектора скорости v_x, v_y, v_z). Расчетная область здания и грунта покрывается равномерной разностной сеткой с шагом 1,65м по горизонтали, высота ячеек грунта берется в соответствии с численным решением одномерной задачи – 1,62м, высота ячеек здания – 1,66м.

В результате расчета получены временные зависимости относительных горизонтальных и вертикальных смещений боковых стенок сооружения и грунта, которые могут быть использованы для анализа сейсмостойкости примыкающих к сооружению подземных трубопроводов (рис. 3, 4). На рисунках представлены относительные смещения стенок сооружения и грунта по горизонтали (а) и вертикали (б) для точек, расположенных на линиях сечения сооружения плоскостями симметрии $y = 0$ (рис. 3), $x = 0$ (рис. 4), на глубине 1,62м, 3,24м, 4,86м и 6,48м.

Таким образом, на боковой стенке меньшей площади наблюдаются большие взаимные смещения сооружения и грунта. Это объясняется меньшей площадью контактирующих поверхностей и большими деформациями конструкции вдоль более протяженной стенки, вызванными попаданием различных поперечных сечений конструкции в разные фазы сейсмической волны.

Заключение. Разработана вычислительная модель динамического контактного взаимодействия заглубленных сооружений с грунтом, учитывающая поле силы тяжести и сокращающая вычислительные затраты за счет специальных мало отражающих граничных условий. Распараллеливание алгоритма позволило сократить вычислительные затраты и повысить эффективность численных исследований. Благодаря этому стал технически возможным многократный пересчет задачи с различными вариантами воздействия, сформированного вероятностными методами из экспериментальной сейсмограммы. Результаты таких расчетов позволяют отражать опыт многих землетрясений, что повышает их достоверность.

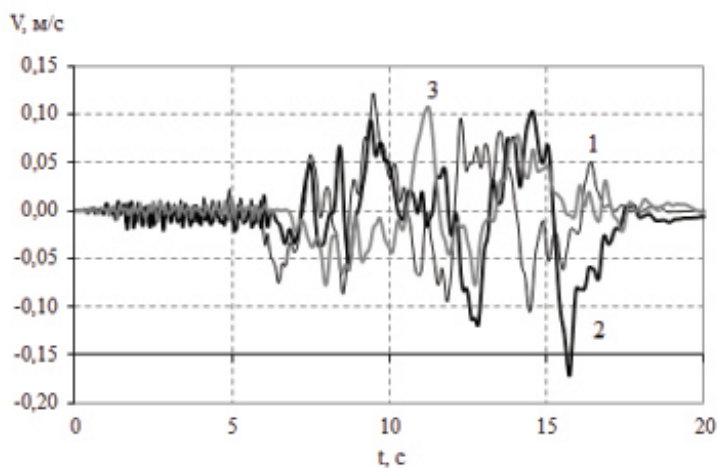


Рис. 2. Экспериментальная сейсмограмма

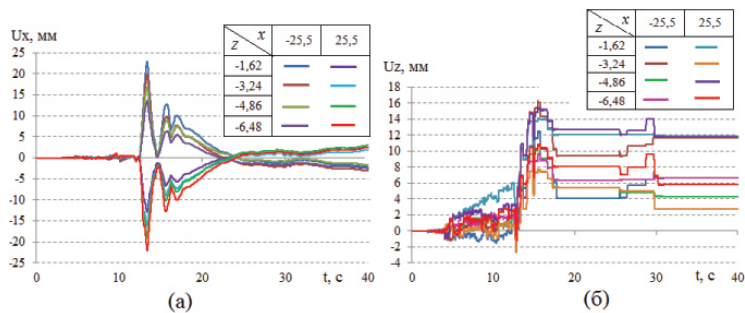


Рис. 3. Взаимные смещения стенок сооружения и грунта в сечении $y = 0$

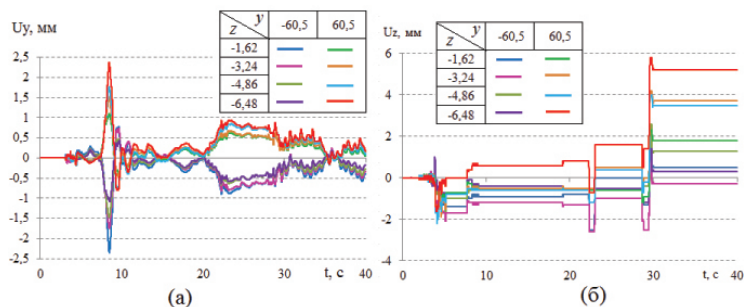


Рис. 4. Взаимные смещения стенок сооружения и грунта в сечении $x = 0$

Исследование поведения сооружений и примыкающих подземных трубопроводов в зависимости от параметров сейсмического воздействия и различных геометрических и физических

параметров сооружения и грунта позволяет сформулировать рекомендации по выбору расчетных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *НП-031-01* Нормы проектирования сейсмостойких атомных станций // Вестник Госатомнадзора России. – 2001. – № 6. – С. 7–31.
- [2] *Бирбраер, А. Н.* Прочность и надежность конструкций АЭС при особых динамических воздействиях / А. Н. Бирбраер, С. Г. Шульман. – М. : Энергоатомиздат. – 1989. – 304 с.
- [3] *Дюкина, Н. С.* Методы численного исследования сейсмостойкости заглубленных сооружений / Н. С. Дюкина, В. Г. Баженов. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. – 2012. – 141 с.
- [4] *Дюкина, Н. С.* Анализ сейсмических колебаний заглубленных сооружений с учетом трансверсально-изотропного основания / Н. С. Дюкина, А. И. Кибец, М. Н. Жестков // Проблемы прочности и пластичности – 2013. – Вып. 75. – Ч. 1. – С. 40–46.
- [5] *Баженов, В. Г.* Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом / В. Г. Баженов, Д. Т. Чекмарев. – Н. Новгород : Изд-во ННГУ. – 2000. – 118 с.
- [6] *Баженов, В. Г.* Численное моделирование трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечных элементов / В. Г. Баженов, А. И. Кибец // Известия РАН. МГТ. – 1994. – № 1. – С. 52–57.
- [7] *Воеводин, В. В.* Параллельные вычисления / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. – СПб : БХВ-Петербург. – 2002. – 609 с.
- [8] *Баженов, В. Г.* Адаптация последовательной методики решения нелинейных задач динамики конструкций для многопроцессорных ЭВМ: материалы IV Междунар. науч.-практ. семинара «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах» / В. Г. Баженов, А. В. Гордиенко, А. И. Кибец, П. В. Лаптев. – Самара. – 2004. – С. 20–25.
- [9] *Баженов, В. Г.* Численное исследование взаимодействия сооружений с грунтовым основанием при сейсмических воздействиях / В. Г. Баженов, Н. С. Дюкина // Выч. мех. сплошных сред. – 2012. – Т. 5. – № 1. – С. 19–24.

Баженов Валентин Георгиевич,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород

e-mail: bazhenov@mech.unn.ru

Дюкина Надежда Сергеевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Н. Новгород

e-mail: ndyukina@inbox.ru

V. G. Baghenov, N. S. Dyukina

NUMERICAL SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF SEISMIC STABILITY OF LARGE STRUCTURES

Research Institute of Mechanics of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

Abstract. The paper presents an efficient numerical technique for seismic stability 3D-modeling of large buried structures. This technique allows to consider the subsoil-structure contact interaction, gravity field effects, the inhomogeneous structure of soil and the variative location of the earthquake hypocenter. As part of this technique is substantiated sizing of the soil-structure computational domain and continuum model for hard and soft soil foundations describing. The numerical technique for determining the kinematic conditions at the lower boundary of the computational domain from the experimental accelerograms at the soil surface is given, offered special non-reflecting waves boundary conditions. The described above methods and algorithms for seismic resistance solving have been implemented in certified software package «Dynamics-3», parallelization of the algorithm have been held according to the spatial domain decomposition principle. The developed numerical technique allows to correctly pose the problem of seismic vibrations of buried structure, reduce computing costs and increase the efficiency of numerical studies of Earthquake Engineering. Through this the multiple conversion tasks with different action scenarios generated by probabilistic methods of experimental seismograms became technically possible. The results of these calculations allow reflecting the experience of many earthquakes, which increases reliability of the estimates. The paper presents the model calculations results of seismic stability of buried NPP structure – mutual vertical and horizontal displacement of soil and building walls – which can then be used to assess strength of adjacent underground pipelines.

Keywords: numerical modeling, seismic resistance, contact interaction, soil ground.

REFERENCES

- [1] *NP-031-01* Design standards for earthquake resistance of nuclear power plants (in Russian) // Vestnik Gosatomnadzora Rossii. – 2001. – № 6. – P. 7–31.(in Russian)
- [2] *Birbraer, A. N.* Durability and reliability of NPP designs in special dynamic effects / A. N. Birbraer, S. G. Shulman. – M. : Energoatomizdat, 1989. – 304 p.
- [3] *Dyukina, N. S.* Numerical methods for the study of seismic stability of buried structures / N. S. Dyukina, V. G. Bazhenov // Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. – 2012. – 141 p.(in Russian)
- [4] *Dyukina, N. S.* Analysis of seismic oscillations of submerged structures, accounting for a transversally-isotropic foundation / N. S. Dyukina, A. I. Kibetz, M. N. Zhestkov // Probl. of strength and plasticity, N.Novgorod University Press. – 2013. – Is. 75. Part. 1. – P. 40–46.(in Russian)
- [5] *Bazhenov, V. G.* Problem solving of unsteady dynamics of plates and shells using variational-difference method / V. G. Bazhenov, D. T. Chekmarev. – N. Novgorod : NNSU, 2000. – 118 p.(in Russian)
- [6] *Bazhenov, V. G.* Numerical simulation of three-dimensional problem of unsteady deformation of elastoplastic structures using finite element / V. G. Bazhenov, A. I. Kibetz // Mechanics of Solids. – 1994. – No. 1. – P. 52–57.(in Russian)
- [7] *Voevodin, V. V.* Parallelnie vichisleniya / V. V. Voevodin, Vl. V. Voevodin // SPb: BHV-Peterburg. – 2002. – 609 p. (in Russian).
- [8] *Bazhenov, V. G.* Adaptaciya posledovatel'noy metodiki resheniya nelineynih zadach dinamiki konstrukciy dlya mnogoprocessornih EVM: Mat. IV Int. sci.-pract. seminar «Visokoproizvoditel'nie

parallel'nie vichisleniya na klasternih sistemah» / V. G. Bazhenov, A. V. Gordienko, A. I. Kibetz, P. V. Laptev. – Samara, 2004. – P. 20-25 (in Russian).

[9] *Bazhenov, V. G.* Numerical study of structure-subsoil interactions under seismic effects / V. G. Bazhenov, N. S. Dyukina // *Comp. continuum mechanics.* – 2012. – Vol. 5. – No. 1. – P. 19-24.

Bazhenov, Valentin Georgievich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Laboratory of Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, N. Novgorod

Dyukina, Nadezhda Sergeevna

Ph.D. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher of Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, N. Novgorod

К. В. Кукуджанов, А. В. Коломиец, А. Л. Левитин

ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ С ДЕФЕКТАМИ ПРИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОМ И ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИЯХ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук

Аннотация. Рассматриваются процессы, протекающие в материале при обработке металлических образцов импульсами электрического тока большой плотности. Исследование электропластического эффекта проводится на основе построенной разномасштабной модели воздействия электромагнитного поля на микротрещины. Задача решается методом прямого численного моделирования в динамической постановке. Прослеживается эволюция микродефектов материала в форме плоских трещин после воздействия на них электрического тока. Изучается влияние размера и пространственной ориентации микротрещин на локализацию электромагнитного поля в области дефекта. Исследование показало, что в окрестности микродефектов возникают очень большие градиенты электромагнитного поля и плотности тока, что приводит к интенсивному нагреву и плавлению материала в кончиках микротрещин. При этом расплавленный материал вытекает в трещину, в то время как сама микротрещина под действием возникающих температурных напряжений стремится закрыться (эффект «залечивания» дефектов).

Ключевые слова: термоэлектропластичность, прямое численное моделирование, материал с дефектами, локализация электромагнитного поля и температуры.

УДК: 539.3

Термоэлектропластичность является сравнительно молодым разделом теории пластичности. Первые экспериментальные работы в этой области появились только во второй половине прошлого века. Они показали, что обработка током металлических заготовок из труднодеформируемых материалов и сплавов облегчает последующую механическую обработку, улучшает пластические свойства изделия [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [11] и имеет преимущества перед традиционными методами термообработки, такими как отжиг и другие.

Хорошо изученным давно применяемым технологическим способом обработки металлов является разогрев заготовки электрическим током небольшой плотности $\mathbf{J} \approx 10 \text{ А/м}^2$ и большим временем действия $\tau \approx 10^3 \text{ с}$. Исследование воздействия электромагнитного поля на механические свойства проводящих материалов показывают, что обработка током плотностью $\mathbf{J} \approx 10^9 \text{ А/м}^2$ и временем действия $\tau \approx 10^{-4} \text{ с}$ существенно увеличивает пластические деформации при разрушении. Принципиально отличным является увеличение предельной пластической деформации за счет нетермических эффектов воздействия электромагнитного поля, не связанных с интегральным разогревом [18], [19]. Это явление было названо электропластическим эффектом. Данный эффект имеет устойчивый остаточный характер, что

Поступила 11.11.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-00807-а.

позволяет применять его как при последовательном, так и одновременном термомеханическом воздействии.

До сих пор отсутствует единое мнение о природе этого явления, а дискуссия о его фундаментальных основах и физическом механизме еще продолжается [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18].

Настоящая работа посвящена исследованию процессов, протекающих при обработке металлических образцов электрическим током, и электропластического эффекта на основе построенной модели воздействия электромагнитного поля на микротрещины.

Постановка задачи. Рассматривается токопроводящий материал с упорядоченной структурой дефектов, который состоит из периодически распределенных представительных элементов, как показано на рис. 1, содержащих дефекты различного типа (плоские микротрещины, цилиндрические микропоры). Материал подвергается воздействию короткоимпульсного высокоэнергетического электрического тока определенной интенсивности (с плотностью тока от 10^7 до 10^{11} А/м²) и продолжительности (от 100 мкс до 1 с). При этом ставится задача исследовать процессы изменения электромагнитного и температурного полей в материале и их влияние на напряженно-деформированное состояние. Для решения поставленной задачи предлагается разномасштабная (во времени) модель воздействия электромагнитного и температурного полей на предварительно поврежденный материал с дефектами. Задача решалась методом конечных элементов в два этапа в динамической постановке (а термомеханическая задача – дополнительно в квазистатической постановке):

На первом этапе решается электротермическая задача для представительных элементов (объемов) материала с дефектами различных форм (трещины, поры), для того чтобы получить поля электрического потенциала и температуры в образце в зависимости от времени.

На втором этапе в той же области интегрирования решается термомеханическая задача с начальным распределением поля температур в материале, полученном на первом этапе. Основной целью на втором этапе является получение полей перемещений, скоростей и напряжений в образце в зависимости от времени.

Основные уравнения электротермомеханической модели.

Электротермическая задача (первый этап). Для расчета электрического потенциала и температуры в токопроводящем материале используются следующие уравнения:

Закон сохранения заряда в совокупности с законом Ома дают уравнения:

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V r_c dV \quad (1)$$

$$\mathbf{J} = \sigma^E \cdot \mathbf{E} = -\sigma^E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{– законом Ома,} \quad (2)$$

где V – произвольный объем с поверхностью S ; \mathbf{n} – внешняя нормаль к S ; \mathbf{J} – плотность тока и r_c – внутренний объемный источник тока на единицу объема, $\mathbf{E}(x)$ – интенсивность электрического поля, определенная как отрицательный градиент электрического потенциала $\mathbf{E} = -\partial\varphi/\partial x$, φ – электрический потенциал, $\sigma^E(\theta)$ – матрица электропроводности, θ – температура.

Закон сохранения энергии в совокупности с законами Ома и Джоуля – Ленца в дает основное уравнение конечно-элементной модели в вариационной форме:

$$\int_V \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \sigma^E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} dV = \int_S \delta \varphi J dS + \int_V \delta \varphi r_c dV, \quad (3)$$

где $J = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ – плотность тока, интегрируемая по поверхности S ; $\delta \varphi$ – вариации электрического потенциала.

На границе области интегрирования для электротермической задачи принимаются следующие условия:

На границах $x = 0, a$ задавались постоянные плотности тока (или разность потенциалов), а также условие периодичности (симметрии) для температуры. На границах $y = 0, b$ потоки плотности тока и температуры считались нулевыми. Начальная температура полагалась постоянной (в частности, комнатной), а потенциал – нулевым.

Термомеханическая задача (второй этап). Для получения поля температуры и напряженно-деформированного состояния материала помимо уравнений баланса импульса используется уравнение баланса энергии:

$$\int_V \rho \dot{U} dV = \int_S q dS + \int_V r dV, \quad (4)$$

где ρ – плотность, \dot{U} – материальная производная внутренней энергии, q – поток тепла на единицу площади и r – тепловая энергия в единице объема в текущей конфигурации тела.

Тепловой поток \mathbf{f} определяется законом Фурье

$$\mathbf{f} = -\mathbf{k} \partial \theta / \partial \mathbf{x}, \quad (5)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\theta)$ – матрица теплопроводности материала.

Вариационная формулировка уравнения баланса энергии (3) применяется в виде слабой формы Бубнова – Галеркина:

$$\int_V \rho \dot{U} \delta \theta dV + \int_V \frac{\partial \delta \theta}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} dV = \int_V \delta \theta r dV + \int_{S_q} \delta \theta q dS, \quad (6)$$

где $\delta \theta$ – вариации поля температур, удовлетворяющие граничным условиям периодичности.

При моделировании учитывается закон Джоуля – Ленца, описывающий интенсивность электрической энергии, рассеиваемой током, который течет по проводнику:

$$P_E = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \sigma^E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (7)$$

Количество электрической энергии, выделяемой в виде внутреннего тепла, равно

$$r = \eta P_E, \quad (8)$$

где η – соответствующий коэффициент Тейлора – Куни преобразования электрической энергии в тепловую.

Количество электрической энергии, высвобождающейся на поверхности тела, имеет вид

$$q_E = f \eta_g P_E, \quad (9)$$

где η_g – поверхностный коэффициент преобразования энергии в тепловую, f – определяет полное распределение тепла между внешними поверхностями.

Тензор полных деформаций образца термопластического материала равен

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} + \varepsilon^{th}, \quad (10)$$

где ε^{el} , ε^{pl} , ε^{th} – тензоры упругих, пластических и температурных деформаций. Температурная деформация в дифференциальной форме имеет вид

$$d\varepsilon^{th} = \alpha(\theta) d\theta, \quad (11)$$

где α – коэффициент термического расширения.

Для упругих и пластических деформаций принимается соответственно закон Гука и ассоциированный закон течения с условием пластичности Мизеса

$$q = \sigma_Y, \quad q = \sqrt{3/2 \mathbf{S} : \mathbf{S}}, \quad (12)$$

где $\sigma_Y = \sigma_Y(\theta)$ – предел текучести, \mathbf{S} – девиатор тензора напряжений.

Тепловая энергия на единицу объема в текущей конфигурации тела за счет диссипации пластической деформации принимается в виде

$$r = \eta \sigma : \dot{\varepsilon}^{pl}, \quad (13)$$

где η – доля неупругой энергии, идущей на образование тепла, $\dot{\varepsilon}^{pl}$ – тензор скорости пластической деформации. Кроме того, связность механической и тепловой задач учитывалась посредством зависимости механических характеристик материала (предела текучести, упругих модулей, коэффициента температурного расширения) от температуры.

При численном решении полученных уравнений стохастический разброс механических свойств материала (упругих модулей, предела текучести, коэффициента линейного расширения, электропроводности, предельной деформации разрушения и т. п.) реализован с помощью штатного датчика случайных чисел, где размах случайных отклонений от среднего значения величины задавался заранее. Абсолютные значения этих отклонений от среднего (для каждого из параметров материала) могут быть определены экспериментально в качестве характеристик материала. В конкретных расчетах эти отклонения принимались в соответствие с имеющимися экспериментальными данными в диапазоне 1,5–2,5% от среднего значения.

Зоны плавления материала рассчитывались сквозным образом без явного выделения границ раздела фаз при достижении в материале температуры $\theta > \theta_{malt}$, где θ_{malt} – температура плавления материала. При этом в узлах, где материал расплавился, полагалось $J = 0$, $\theta = \theta_{malt}$.

При решении термомеханической задачи начальное распределение температуры в образце бралось из решения электротермической задачи, а начальные значения поля перемещений принимались нулевыми. На границах области интегрирования для перемещений и температуры задавались условия периодичности.

Результаты численного моделирования.

Все расчеты выполнялись для случая плоской деформации. Плотность тока или разность потенциалов на границе представительного элемента были постоянными в течение всего времени действия электромагнитного импульса.

При пропускании электрического тока через образец с дефектами (рис. 1) в окрестности дефектов в виде цилиндрических пор или плоских трещин возникают большие градиенты электрического потенциала, приводящие к резким изменениям поля плотности тока, в том числе к существенному увеличению плотности тока в кончиках трещин или краях пор по сравнению с плотностью тока, приложенного к образцу.

Заметим, что плотность тока в образце без дефектов постоянна на расстояниях порядка характерных размеров представительного элемента и равна плотности приложенного тока. Увеличение плотности тока в этих зонах, в свою очередь, приводит к их сильному локальному разогреву: на рис. 1 изображено поле температур $\theta(C)$ при пропускании электрического тока для изолированных представительных элементов и образцов с упорядоченной структурой дефектов.

Для микротрещин размером порядка 10 мкм расчеты по предлагаемой модели показывают, что плотность тока в их кончиках может на порядок превышать плотность тока, приложенного к образцу. На рис. 2а показана зависимость максимальной плотности тока J (А/мм²) в кончике плоской микротрещины с закругленным кончиком от ее длины l (мкм) в образце из цинка, подверженного воздействию импульсом тока величиной $1,5 \cdot 10^2$ А/мм². Расстояние между берегами и радиус кривизны в кончике микротрещин принималось равными 1 мкм. При этом количество дефектов в образце предполагалось постоянным. Заметим, что максимальная плотность тока в кончике трещины также на порядок превышает и плотность тока в образце, рассчитанную для уменьшенной площади поперечного сечения образца в связи с

появлением в нем микротрещин. Это свидетельствует о существенной неоднородности поля плотности тока и, следовательно, температуры в образце с микротрещинами.

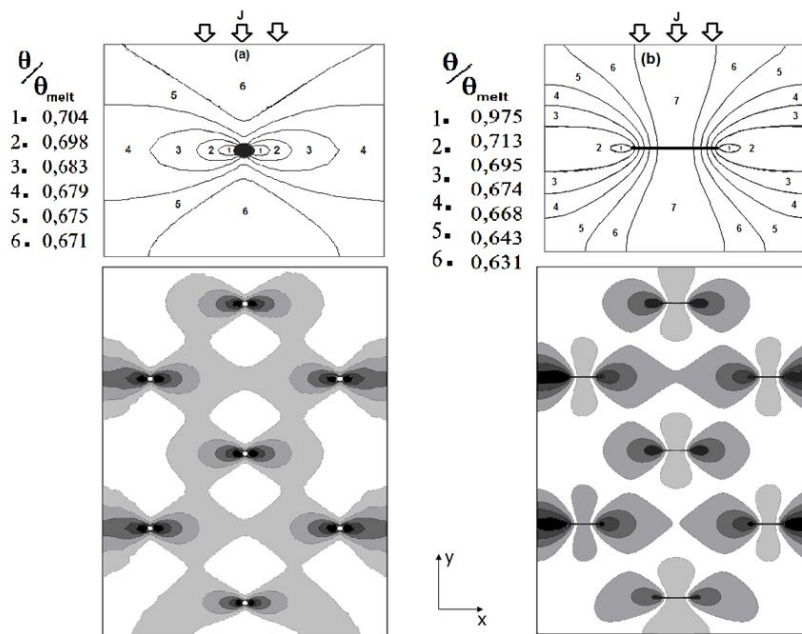


Рис. 1

На рис. 2б показана зависимость максимальной плотности тока J (A/mm^2) в верхнем кончике плоской микротрещины длиной 50 мкм от угла наклона плоскости трещины к оси x в образце из цинка, подверженного воздействию импульсом тока величиной $1,5 \cdot 10^2 A/mm^2$. Расстояние между берегами и радиус кривизны в кончике микротрещин принималось равными 1 мкм. Из графика видно, что максимальная плотность тока в кончике трещины остается практически постоянной в диапазоне углов 0^0-15^0 . При дальнейшем увеличении угла максимальная плотность тока в кончике трещины нелинейно уменьшается.

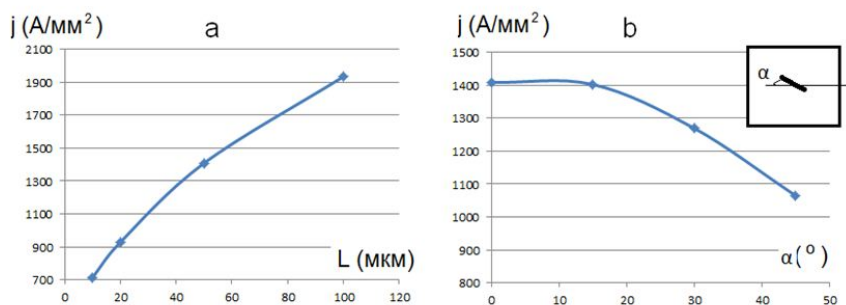


Рис. 2 Ток от (а) размера, от (б) наклона

На рис. 3 показаны соответственно (а) поля плотности тока и (б) температуры (в момент времени $t=49,7$ мкс) в окрестности микротрещины длиной 50 мкм с углом наклона к оси x равным 15^0 для образца из цинка, подверженного воздействию импульсом тока величиной $7,3 \cdot 10^3$ А/мм² и длительностью 100 мкс. Размеры представительного элемента $a=400$ мкм, $b=375$ мкм.

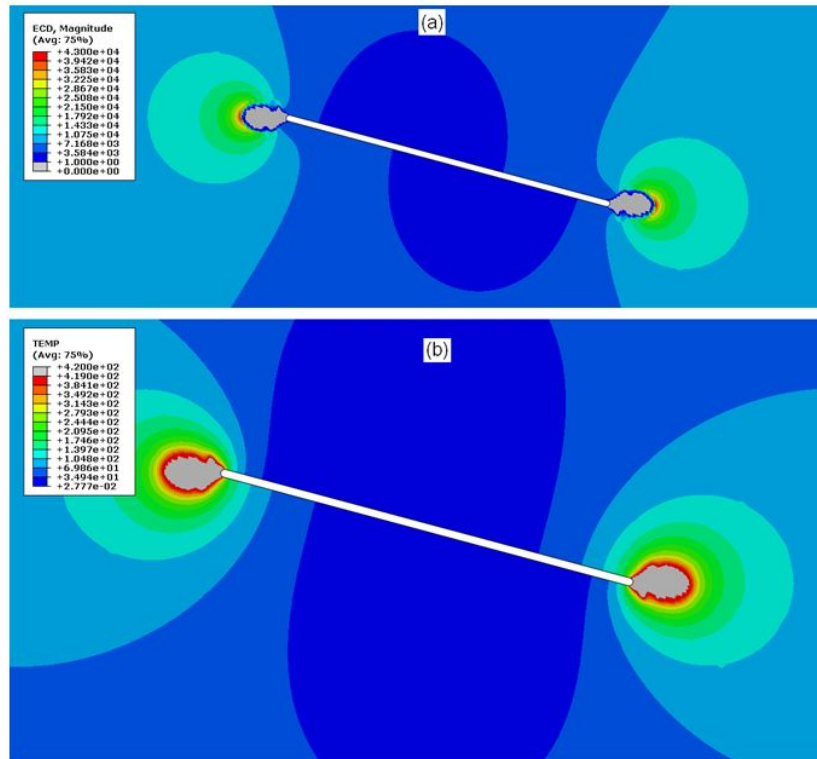


Рис. 3

В результате моделирования получено, что на берегах микротрещины имеются области, в которых плотность тока составляет всего $20-30$ А/мм² (более чем в 100 раз меньше приложенного тока), в то время как в области кончиков микротрещины плотность тока на порядок превышает плотность приложенного тока. Таким образом, возникающие в окрестности микродефектов в результате воздействия очень большие градиенты электромагнитного поля, вызывают изменения плотности тока на микрорасстояниях в 1000 и более раз. Это обстоятельство приводит к быстрому росту температуры и плавлению материала. На рис. 3 зоны, в которых материал расплавился, хорошо видны в кончиках трещины.

При этом необходимо заметить, что воздействие интенсивного тока, быстрый нагрев и плавление материала, сопровождаемые его тепловым расширением, приводят к высоким растягивающим давлениям в зоне кончиков трещин и, как следствие, вытеканию расплавленного материала в трещину. На рис. 4 представлено поле гидростатического давления в кончике трещины через 6 мкс после начала действия тока на образец.

С течением времени происходит дальнейшее оплавление кончиков трещины и вытекание расплавленного материала в микротрещину. На рис. 4б представлено поле температуры в окрестности микротрещины длиной 50 мкм с углом наклона к оси x равным 15^0 для образца из цинка, подверженного воздействию импульсом тока величиной $7,3 \cdot 10^3$ А/мм² после

окончания воздействия тока (момент времени $t=104$ мкс). Таким образом, области, в которых происходит плавление материала, достигают размеров порядка 10 мкм. Наибольший линейный размер образовавшейся поры составляет 21 мкм (на рис.4b).

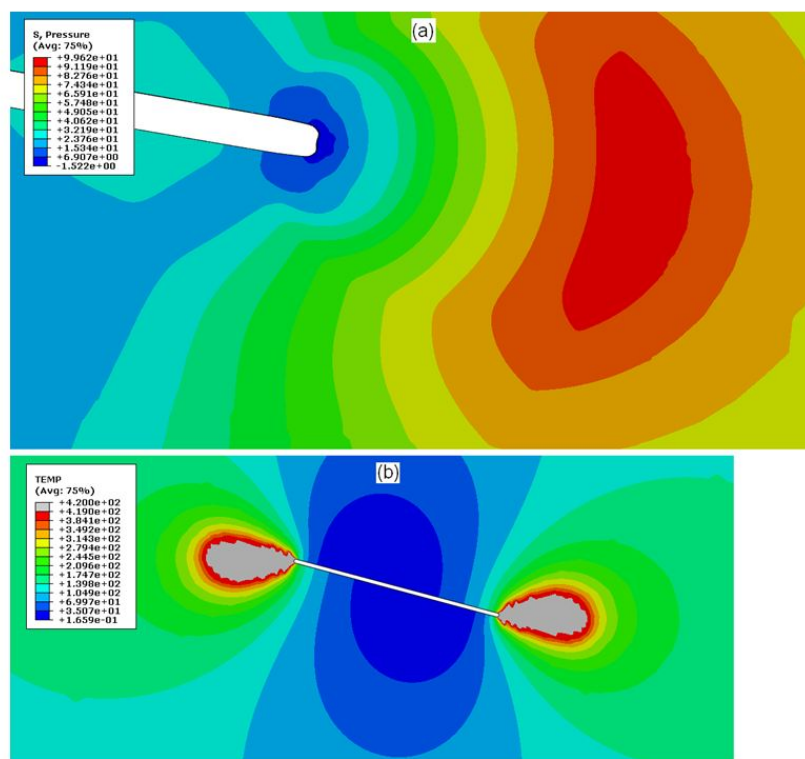


Рис. 4

В результате расчетов установлено, что берега микротрещины в течение всего времени воздействия электрического тока смещаются друг к другу (эффект “залечивания” дефектов). Это согласуется с аналитическими исследованиями по объяснению данного эффекта, проведенными в работах [12], [13], где было показано, что в теле с дефектами в виде дискообразных трещин при стационарном поле температур, которое возникает после воздействия электрическим током, происходит частичное закрытие разрезов (трещин), а также с результатами, полученными при рассмотрении нестационарного поля температур в работах [14], [15], [16], [17], [18], [19], в которых были получены результаты, касающиеся схлопывания дефектов в виде разрезов, а также распределения сжимающих пластических напряжений, приводящих к частичному “залечиванию” цилиндрических дефектов. Настоящее моделирование кратковременного воздействия на материал интенсивным электрическим током на наклонную микротрещину подтверждает в динамической постановке этот эффект “залечивания” микродефектов в материале.

Расчеты показали, что учет стохастического разброса свойств материала в указанных пределах не приводит к какому-либо существенному изменению изучаемых полей и качественно не меняет картину изучаемых явлений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Спицын, В. И.* Электропластическая деформация металлов / В. И. Спицын, О. А. Троицкий. – М. : Наука, 1985. – 160 с.
- [2] *Беклемишев, Н. Н.* Пластичность и прочность металлических материалов с учетом импульсного воздействия высокоэнергетического электромагнитного поля / Н. Н. Беклемишев, В. Н. Кукуджанов, В. А. Порохов. – Препринт №372. – М. : ИПМ АН СССР, 1989. – 56 с.
- [3] *Беклемишев, Н. Н.* Влияние локально-неоднородного импульсного электрического поля на пластичность и прочность проводящих материалов / Н. Н. Беклемишев, Н. И. Корягин, Г. С. Шапиро // Изв. АН СССР. Металлы. – 1984. – № 4. – С. 184–187.
- [4] *Кравченко В. Я.* Воздействие направленного потока электронов на движущиеся дислокации / В. Я. Кравченко // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1966. – Т. 51. – С. 1676–1681.
- [5] *Климов, К. М.* Влияние градиента температуры и электрического тока высокой плотности на пластическую деформацию при растяжении металлических проволок / К. М. Климов, И. И. Новиков // Изв. АН СССР. Металлы. – 1978. – № 6. – С. 175–179.
- [6] *Финкель, В. М.* О возможности торможения быстрых трещин импульсами тока / В. М. Финкель, Ю. И. Головин, А. А. Слетков // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 4. – С. 848–851.
- [7] *Финкель, В. М.* Разрушение вершины трещины силовым электромагнитным полем / В. М. Финкель, Ю. И. Головин, А. А. Слетков // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 237. – № 2. – С. 325–327.
- [8] *Степанов, Г. В.* Нестационарное напряженно-деформированное состояние в длинном стержне, вызванное импульсом электрического тока высокой плотности / Г. В. Степанов, А. И. Бабуцкий, И. А. Мамеев // Пробл. прочности. – 2004. – № 4. – С. 60–67.
- [9] *Дубинко, В. И.* Кинетический механизм электропластичности металлов / В. И. Дубинко, В. Ф. Клепиков // Изв. РАН. Серия физическая. – 2008. – Т. 72. – No. 9. – С. 1257–1258.
- [10] *Стащенко, В. И.* Электропластическое волочение чугунной проволоки / В. И. Стащенко, О. А. Троицкий, Н. Н. Новикова // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 2. – С. 85–88.
- [11] *Троицкий, О. А.* Электропластический эффект в процессах обработки металлов давлением / О. А. Троицкий // Металлургия машиностроения. – 2010. – № 4. – С. 45–48.
- [12] *Салганик, Р. Л.* Термоупругое равновесие тела с трещинами при разогреве, вызванном пропусканием тока перпендикулярно трещинам / Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 5. – С. 141–152.
- [13] *Салганик, Р. Л.* Разогрев материала с эллипсоидальной неоднородностью вследствие электрических потерь / Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. – 1980. – № 6. – С. 98–109.
- [14] *Клюшников, В. Д.* Плоская задача о воздействии мгновенного точечного источника тепла / В. Д. Клюшников, И. В. Овчинников // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – № 4. – С. 118–122.
- [15] *Овчинников, И. В.* Влияние воздействия электротока на пластичность металлов. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.м.н. М. – 1969. – 123 с.
- [16] *Кукуджанов, В. Н.* Квазистатическое одноосное разупрочнение некоторых металлических материалов в условиях жесткого закрепления под действием электромагнитного поля / В. Н. Кукуджанов, Н. Н. Беклемишев, В. А. Порохов // Вестник Нижегородского университета им. Лобачевского. Серия Механика. – 2003. – Вып. 1 (4). – С. 129–141.
- [17] *Кукуджанов, В. Н.* Некоторые особенности влияния импульсов тока на пластичность металлов при высоких скоростях деформации / В. Н. Кукуджанов, В. А. Порохов // Проблемы прочности и пластичности. – 2005. – Вып. 67. – С. 132–142.
- [18] *Кукуджанов, В. Н.* Исследование влияния динамического воздействия электрического тока на механические свойства материалов с упорядоченной структурой дефектов / В. Н. Кукуджанов, А. В. Коломиец-Романенко // Известия РАН. МТТ. – 2010. – No. 3. – С. 188–199.

[19] *Кукуджанов, В. Н.* Модель термоэлектропластичности изменения механических свойств металлов на основе реорганизации структуры дефектов под воздействием импульсного электрического тока / В. Н. Кукуджанов, А. В. Коломиец-Романенко // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – No. 6. – С. 6–21.

Кукуджанов Константин Владимирович,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики и оптимизации конструкций Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН), г. Москва

Коломиец Андрей Валерьевич,

кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН), г. Москва

Левитин Александр Леонидович,

младший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН), г. Москва

K. V. Kukudzhanov, A. V. Kolomiets, A. L. Levitin

**PROCESSES OF DEFORMATION AND FRACTURE STOCHASTICALLY
INHOMOGENEOUS ELASTOPLASTIC MATERIALS WITH DEFECTS UNDER
ELECTRODYNAMIC AND THERMOMECHANICAL LOADING**

Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences

Abstract. The processes occurring in the metallic samples under the impact of electrical current of high density are considered. Investigation electroplastic effect is based on the constructed multiscale models of the impact of electromagnetic fields on microcracks. The dynamic problem is solved by direct numerical simulation. The evolution of microdefects of material in the form of flat cracks under action of electrical current are investigated. The influence of the size and orientation of microcracks on the localization of the electromagnetic field in the region of the defect are examined. Research has shown, that in the vicinity of the microdefects very large gradients electromagnetic field and current are arise, which leads to intensive heating and melting the material in the tips of the microcracks. The molten material flows into the microcrack, whereas microcrack are closing under the action of thermal stresses (the effect of "healing" of defects).

Keywords: thermal electroplasticity, direct numerical modeling, defective material, electromagnetic field and temperature localization.

REFERENCES

- [1] *Spitsyn, V. I.* Electroplastic deformation of metals / V. I. Spitsyn, O. A. Troicky. – M. : Nauka, 1985. – 160 p.
- [2] *Beklemishev, N. N.* Plasticity and durability of metal materials taking into account the pulse influences of a high-energy electromagnetic field / N. N. Beklemishev, V. N. Kukudzhanov, V. A. Porohov. – Preprint № 372. – M. : IPM of academy of sciences of the USSR, 1989. – 56 p.
- [3] *Beklemishev, N. N.* Influence of local and non-uniform pulse electric field on plasticity and durability of the carrying-out materials / N. N. Beklemishev, N. I. Корягин, G. S. Shapiro // News of Academy of Sciences of the USSR. Metals. – 1984. – № 4. – P. 184–187.
- [4] *Kravchenko, V. Ya.* Impact of the directed stream of electrons on moving dislocations / V. Ya. Kravchenko // Magazine of experimental and theoretical physics. – 1966. – Vol. 51. – P. 1676–1681.
- [5] *Klimov, K. M.* Influence of a gradient of temperature and electric current of high density on plastic deformation at stretching metal a provolok / K. M. Klimov, I. I. Novikov // News of Academy of Sciences of the USSR. Metals. – 1978. – № 6. – P. 175–179.
- [6] *Finkel, V. M.* About possibility of braking of fast cracks current impulses / V. M. Finkel, Yu. I. Golovin, A. A. Sletkov // Reports of Academy of Sciences of the USSR. – 1976. – Vol. 227. – № 4. – P. 848–851.
- [7] *Finkel, V. M.* Destruction of top of a crack force electromagnetic field / V. M. Finkel, Yu. I. Golovin, A. A. Sletkov // Reports of Academy of Sciences of the USSR. – 1977. – Vol. 237. – № 2. – P. 325–327.
- [8] *Stepanov, G. V.* The non-stationary intense deformed state in a long core, caused by an impulse of electric current of high density / G. V. Stepanov, A. I. Babutsky, I. A. Mameev // Durability problems. – 2004. – № 4. – P. 60–67.
- [9] *Dubinko, V. I.* Kinetic mechanism of electro plasticity of metals / V. I. Dubinko, V. F. Klepikov // News of the Russian Academy of Sciences. Series physical. – 2008. – Vol. 72. – No. 9. – P. 1257–1258.

- [10] *Stashenko, V. I.* Electro plastic drawing of a pig-iron wire / V. I. Stashenko, O. A. Troitsky, N. N. Novikova // Problems of mechanical engineering and reliability of cars. – 2009. – № 2. – P. 85–88.
- [11] *Troitsky, O. A.* Electro plastic effect in processing of metals pressure / O. A. Troitsky // Mechanical engineering metallurgy. – 2010. – № 4. – P. 45–48.
- [12] *Salganik, R. L.* Thermo elastic balance of a body with cracks at the warming up caused current transmission perpendicular to cracks / R. L. Salganik // News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of a solid body. – 1978. – № 5. – P. 141–152.
- [13] *Salganik, R. L.* Material warming up with ellipsoidal heterogeneity owing to electric losses / R. L. Salganik // News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of a solid body. – 1980. – № 6. – P. 98–109.
- [14] *Klyushnikov, V. D.* Flat task about influence of an instant dot source of heat / V. D. Klyushnikov, I. V. Ovchinnikov // News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of a solid body. – 1988. – № 4. – P. 118–122.
- [15] *Ovchinnikov, I. V.* Influence of influence of a current on plasticity of metals. The thesis on competition of an academic degree ph.d. – M. – 1969. – 123 p.
- [16] *Kukudzhанov, V. N.* Quasistatic monoaxial time hardening of some metal materials in the conditions of rigid fixing under the influence of an electromagnetic field / V. N. Kukudzhанov, N. N. Beklemishev, V. A. Porohov // Vestnik Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. Mechanics series. – 2003. – Issue 1 (4). – P. 129–141.
- [17] *Kukudzhанov, V. N.* Some features of influence of impulses of current on plasticity of metals at high speeds of deformation / V. N. Kukudzhанov, V. A. Porohov // Problems of durability and plasticity. – 2005. – Issue 67. – P. 132–142.
- [18] *Kukudzhанov, V. N.* Research of influence of dynamic influence of electric current on mechanical properties of materials with the ordered structure of defects / V. N. Kukudzhанov, A. V. Kolomiets-Romanenko // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2010. – No. 3. – P. 188–199.
- [19] *Kukudzhанov, V. N.* Model of thermo electro plasticity of change of mechanical properties of metals on to basis of reorganization of structure of defects under the influence of the pulse electric current / V. N. Kukudzhанov, A. V. Kolomiets-Romanenko // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – No. 6. – P. 6–21.

Kukudzhанov, Konstantin Vladimirovich

Ph.D., Senior Research Scientist at the Department of Mechanics and Optimization of Structures, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), Moscow

Kolomiets, Andrey Valer'evich

Ph.D., Junior Research Scientist at the Department of Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), Moscow

Levitin Alexander Leonidovich

Junior Research Scientist at the Department of Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), Moscow

К. А. Матвеев, Д. В. Моховнев, Ю. В. Немировский

ПРЕДЕЛЬНОЕ УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ СЖИМАЕМЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СТРУКТУРАХ АРМИРОВАНИЯ

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Новосибирский государственный технический университет

Аннотация. Рассматривается предельное упругое состояние кольцевых криволинейно армированных пластин при различных структурах армирования: радиально-окружных, спиральных и комбинированных. Сформулированы условия предельного упругого состояния. Получены постановки плоской задачи теории упругости и задачи устойчивости в полярной системе координат. Определены предельные нагрузки для различных законов армирования и даны оценки эффективности разных структур.

Ключевые слова: устойчивость, композитные пластины, структуры армирования, полярная ортотропия.

УДК: 539.401

1. Введение. При росте внешней нагрузки напряженно-деформированное состояние в композитной пластине изменяется пропорционально этой нагрузке только до определенного предельного значения. В этом случае пластина переходит в предельное упругое состояние. Это связано с тем, что либо материалы связующего или волокна входят в зону пластичности, либо пластина выпучивается из своей плоскости, то есть теряет устойчивость. В первом случае композитная структура претерпевает необратимые изменения, а во втором – резко падает жесткость пластины как элемента конструкции. Для большинства конструкций недопустимы как первый, так и второй варианты состояния пластины, и внешняя нагрузка не должна превышать предельную. Возникает очевидный вопрос: какова должна быть структура армирования, которая бы обеспечивала максимальную предельную нагрузку при одном и том же расходе материалов арматуры и связующего. Представленная задача оптимизации требует максимально возможного упрощения постановки задачи для конкретного расчетного случая, чтобы время машинного счета было минимальным.

В данной работе рассматривается предельное упругое состояние кольцевой пластины с непрерывным армированием, нагруженной нормальным давлением q_1 и q_2 (рис. 1). Считается, что арматура равномерно распределена по толщине пластины. Используя модели структурной механики, определены эффективные упругие характеристики пластины a_{ijkl} и b_{ijkl} : $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, $\varepsilon_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl}$ (по повторяющимся в выражениях индексам i, j, k, l ведется суммирование от 1 до 2). Величины a_{ijkl} и b_{ijkl} изменяются лишь в радиальном направлении $a_{ijkl} = a_{ijkl}(r)$, $b_{ijkl} = b_{ijkl}(r)$, благодаря чему двумерная задача сводится к одномерной.

Поступила 08.10.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102) и Министерства образования и науки РФ по государственному заданию №2014/138 (проект № 435).

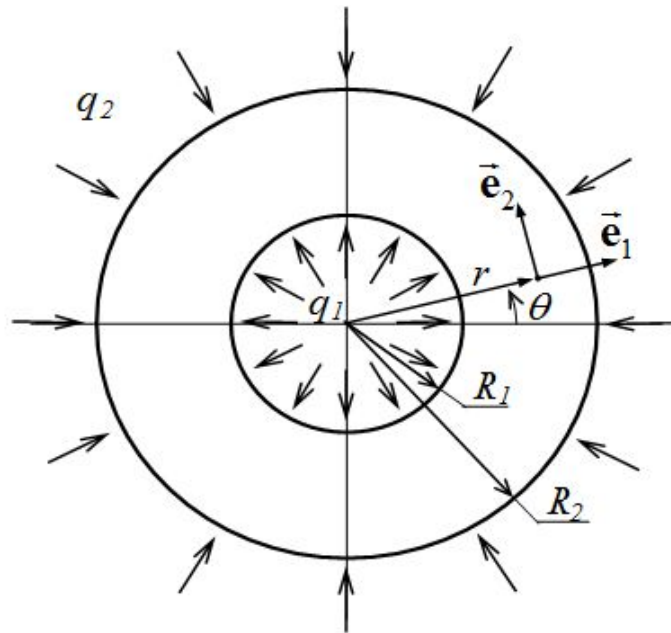


Рис. 1. Расчетная схема

При изменении структуры армирования и сохранении общей доли волокон и связующего предельная нагрузка будет изменяться. Область упругого состояния пластины будет нижней гранью графиков зависимости трех различных предельных состояний (рис. 2). На рис. 2 α – некоторый параметр армирования, изменяющийся от α_1 до α_2 , q – предельная нагрузка. Пластические деформации в связующем появятся, когда максимальное напряжение по Мизесу в связующем достигнет предела текучести: $\max_{R_1 \leq r \leq R_2} \sigma_{\text{экв}}^c = \sigma_T^c$. В условиях плоского напряженного состояния с учетом отсутствия касательных напряжений, что имеет место в данной задаче, эквивалентные напряжения по Мизесу вычисляются по формуле $\sigma_{\text{экв}}^c = \sqrt{(\sigma_{11}^c)^2 - \sigma_{11}^c \sigma_{22}^c + (\sigma_{22}^c)^2}$. Здесь σ_{ij}^c – напряжения в связующем. Эти напряжения, а следовательно и эквивалентное напряжение, являются функциями радиальной координаты r . Решая экстремальную задачу для функции $\sigma_{\text{экв}}^c(r)$ при значениях параметра армирования $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$, получим кривую 1 на рис. 2. Аналогично строится кривая 2, соответствующая появлению пластических деформаций в арматуре. Это произойдет, когда максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении арматуры по модулю достигнет предела текучести материала арматуры: $\max_{R_1 \leq r \leq R_2} \sigma^a = \sigma_T^a$. Кривая 3 соответствует выпучиванию пластины из своей плоскости.

Если пластина достаточно тонкая, то выпучивание произойдет значительно раньше, чем возникнут пластические деформации в арматуре и связующем, а область упругой устойчивости будет ограничена сверху только кривой 3. В дальнейшем ограничимся рассмотрением тонких пластин и предельное упругое состояние свяжем именно с потерей устойчивости их плоской формы равновесия.

2. Докритическое напряженное состояние. Для решения задачи устойчивости необходимо предварительно найти докритические плоские напряжения. Решим плоскую задачу теории упругости с помощью функционала дополнительной работы [1]. В случае статических граничных условий функционал можно записать в виде



Рис. 2. Область упругого состояния

$$\Psi [\sigma_{ij}^0] = h \iint_{\Omega} \Lambda (\sigma_{ij}^0) d\Omega, \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь $\Lambda (\sigma_{ij}^0) = \frac{1}{2} b_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0$, $i, j, k, l = 1, 2$ – удельная дополнительная работа. Деформации определяются по формуле: $\varepsilon_{ij}^0 = \frac{\partial \Lambda (\sigma_{11}^0, \sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0, \sigma_{22}^0)}{\partial \sigma_{ij}^0} = b_{ijkl} \sigma_{kl}^0$. Компоненты тензоров b_{ijkl} , σ_{ij}^0 , ε_{ij}^0 записаны в базе полярной системы координат (\tilde{e}_1 имеет радиальное направление, \tilde{e}_2 – окружное). Функционал (1) задан на множестве статически допустимых напряжений, то есть напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{r} + \rho F_1 = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{12}^0 + \rho F_2 = 0 \quad (2)$$

и статическим граничным условиям

$$r = R_1 : \sigma_{11}^0 = -q_1, \quad \sigma_{12}^0 = 0; \quad r = R_2 : \sigma_{11}^0 = -q_2, \quad \sigma_{12}^0 = 0. \quad (3)$$

В случае отсутствия массовых сил ($F_1 = F_2 = 0$) уравнения равновесия будут выполнены, если ввести функцию напряжений

$$\sigma_{11}^0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right); \quad \sigma_{22}^0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}. \quad (4)$$

Так как задача обладает круговой симметрией и ее решение единственно, то напряжения в докритическом состоянии, а следовательно и функция напряжений, не зависят от окружной координаты θ . Тогда (4) и (3) примут вид

$$\sigma_{11}^0 = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}; \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = 0; \quad \sigma_{22}^0 = \frac{d^2 \phi}{dr^2}, \quad (5)$$

$$\sigma_{11}^0(R_1) = \frac{1}{R_1} \frac{d\phi(R_1)}{dr} = -q_1, \quad \sigma_{11}^0(R_2) = \frac{1}{R_2} \frac{d\phi(R_2)}{dr} = -q_2. \quad (6)$$

Из формул (5) видно, что функция напряжений определяется с точностью до константы. Поэтому можно принять, что

$$\phi(R_1) = 0. \quad (7)$$

В итоге, функционал (1) переписется в виде

$$\Psi[\phi(r)] = \pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl}(r) \sigma_{ij}^0(r) \sigma_{kl}^0(r) r dr. \quad (8)$$

Из вариационного уравнения $\delta\Psi=0$ следуют уравнение совместности деформаций и дополнительное условие к уравнению, возникающее вследствие неодносвязности области пластины:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\varepsilon_{22}^0) - \frac{d\varepsilon_{11}^0}{dr} = 0, \quad r = R_1 : \varepsilon_{11}^0 - \frac{d}{dr} (r\varepsilon_{22}^0) = 0. \quad (9)$$

Условия интегрируемости деформаций (9) можно записать через функцию напряжений:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(b_{1122} \frac{d\phi}{dr} \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left(r b_{2222} \frac{d^2\phi}{dr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} b_{1111} \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{d}{dr} \left(b_{1122} \frac{d^2\phi}{dr^2} \right) = 0, \quad (10)$$

$$r = R_1 : b_{1111} \frac{1}{R_1} \frac{d\phi}{dr} + b_{1122} \frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left(b_{2211} \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{d}{dr} \left(r b_{2222} \frac{d^2\phi}{dr^2} \right) = 0. \quad (11)$$

Добавляя к (10) и (11) условия (6) и (7), выраженные через ϕ

$$\frac{d\phi(R_1)}{dr} = -q_1 R_1; \quad \frac{d\phi(R_2)}{dr} = -q_2 R_2; \quad \phi(R_1) = 0, \quad (12)$$

получаем полную постановку плоской задачи теории упругости для кольцевой армированной пластины. В общем случае задача (10)–(12) не имеет аналитического решения и поэтому докритические напряжения проще определять численно из вариационной задачи для функционала (8). Искомые напряжения в докритическом состоянии удобно представить в виде суммы $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^+$, где σ_{ij}^s – напряжения аналогичной изотропной пластины: $\sigma_{11}^s(r) = p_1 + \frac{p_2}{r^2}$; $\sigma_{12}^s = \sigma_{21}^s = 0$; $\sigma_{22}^s(r) = p_1 - \frac{p_2}{r^2}$; $p_1 = \frac{q_1 R_1^2 - q_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$; $p_2 = (q_2 - q_1) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$; σ_{ij}^+ – дополняющие напряжения, удовлетворяющие однородным граничным условиям: $\sigma_{11}^+(R_1) = 0$; $\sigma_{11}^+(R_2) = 0$; $\phi^+(R_1) = 0$. Тогда от функционала (8) переходим к функционалу

$$\Psi^+[\phi^+] = \pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl}(r) \sigma_{ij}^+(r) \sigma_{kl}^+(r) r dr + 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl}(r) \sigma_{ij}^s(r) \sigma_{kl}^+(r) r dr, \quad (13)$$

где ϕ^+ – функция напряжений, определяющая напряженное состояние σ_{ij}^+ . Задаем функцию ϕ^+ в виде ряда, удовлетворяющего однородным граничным условиям:

$$\tilde{\phi}^+(\rho) = C \left[1 - 3 \left(\frac{\rho-1}{s-1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\rho-1}{s-1} \right)^3 \right] + \sum_{\mu=-m_1}^{m_1} C_\mu (\rho-1) (\rho^{-1}-1) (\rho-s) (\rho^{-1}-s^{-1}) \rho^\mu, \quad (14)$$

где $\rho = \frac{r}{R_1}$; $s = \frac{R_2}{R_1}$; $\tilde{\phi}^+(\rho) = \frac{1}{q R_1^2} \phi^+(r)$; $q_1 = \xi_1 q$; $q_2 = \xi_2 q$.

Решая полученную задачу методом Ритца, определяем коэффициенты ряда (14) и таким образом определяем докритическое напряженное состояние.

3. Задача устойчивости. Рассмотрим функционал Брайана [2], [4], [5]:

$$I[u_3] = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} D_{ijkl} v_{ij} v_{kl} d\Omega + \frac{qh}{2} \iint_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij}^0 w_i w_j d\Omega, \quad (15)$$

где $D_{ijkl} = \frac{h^3}{12} a_{ijkl}$, u_3 – прогиб пластины, $\tilde{\sigma}_{ij}^0 = \frac{1}{q} \sigma_{ij}^0$. В цилиндрической системе координат $v_{11} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}$; $v_{12} = v_{21} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right)$; $v_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2}$; $w_1 = \frac{\partial u_3}{\partial r}$; $w_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta}$. Функционал (15) задан на множестве кинематически допустимых прогибов u_3 . Ненулевые экстремали функционала (15) определяют формы потери устойчивости. Им соответствуют собственные значения задачи устойчивости, нагрузки $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$, \dots . В действительности пластина выпучивается при наименьшем $q^{(i)}$ по соответствующей этой нагрузке форме, а сама нагрузка называется критической. Цель расчета на устойчивость – определение критической нагрузки.

Из вариационного уравнения $\delta I = 0$ следуют дифференциальное уравнение устойчивости

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r D_{ij11} v_{ij}) + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r D_{ij12} v_{ij}) - \frac{\partial}{\partial r} (r D_{ij22} v_{ij}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D_{ij22} v_{ij}) - qhr \tilde{\sigma}_{ij}^0 v_{ij} = 0 \quad (16)$$

и граничные условия

$$r = R_1; R_2 : \quad u_3 = 0 \text{ или } Q_r^* = 0, \quad (17)$$

$$r = R_1; R_2 : \quad \frac{\partial u_3}{\partial r} = 0 \text{ или } M_r = 0, \quad (18)$$

где $Q_r^* = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r D_{ij11} v_{ij}) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} (D_{ij12} v_{ij}) - D_{ij22} v_{ij} \right] + hq \tilde{\sigma}_{i1}^0 w_i$, $M_r = -D_{ij11} v_{ij}$.

Формулы (16)–(18) дают полную постановку задачи устойчивости армированной кольцевой пластины в полярной системе координат.

Разложим функцию прогибов u_3 в тригонометрический ряд по координате θ :

$$u_3(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [w_n^c(r) \cos(n\theta) + w_n^s(r) \sin(n\theta)]. \quad (19)$$

Подставив ряд (19) в дифференциальное уравнение (16), получим:

$$\begin{aligned} L_0^{(1)} [w_0^c(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ L_n^{(1)} [w_n^c(r)] + L_n^{(2)} [w_n^s(r)] \right\} \cos(n\theta) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ L_n^{(1)} [w_n^s(r)] - L_n^{(2)} [w_n^c(r)] \right\} \sin(n\theta) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $L_n^{(1)}$ и $L_n^{(2)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – дифференциальные операторы. Так как система функций $1, \cos(n\theta), \sin(n\theta)$ является линейно независимой, то равенство (20) возможно только тогда, когда каждое из его слагаемых равно нулю:

$$L_0^{(1)} [w_0^c(r)] = 0, \quad (21)$$

$$L_n^{(1)} [w_n^c(r)] + L_n^{(2)} [w_n^s(r)] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

$$L_n^{(1)} [w_n^s(r)] - L_n^{(2)} [w_n^c(r)] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Из уравнения (21) определяется функция $w_0^c(r)$, а функции $w_n^c(r)$ и $w_n^s(r)$ – из системы двух уравнений (22) и (23) при одинаковых n . Аналогично можно показать, что после подстановки ряда (19) в граничные условия (17) и (18) они распадутся так, что в каждое из них будут входить функции $w_n^c(r)$ и $w_n^s(r)$ только с одинаковыми номерами n . Отсюда следует, что армированная кольцевая пластина, нагруженная на кромках нормальным давлением q_1 и q_2 , теряет устойчивость по одной из следующих форм: $w_0(r)$, $w_n^c(r) \cos(n\theta) + w_n^s(r) \sin(n\theta)$, $n=1$,

2, 3, ... А в случае полярной ортотропии ($D_{1112} = D_{2221} = 0$) оператор $L_n^{(2)} \equiv 0$ и вид форм потери устойчивости упрощается: $w_0(r)$, $w_n(r) \cos(n\theta)$, $w_n(r) \sin(n\theta)$, $n=1, 2, 3, \dots$, причем одному критическому параметру нагрузки q_n будут соответствовать две формы: $w_n(r) \cos(n\theta)$ и $w_n(r) \sin(n\theta)$. В силу этого, можно рассматривать только следующие варианты форм потери устойчивости: $w_n(r) \cos(n\theta)$, $n=0, 1, 2, \dots$. При рассматриваемых структурах армирования материал пластины будет полярно ортотропным и неоднородным. Функционал (15) в этом случае примет вид:

$$I_n [w_n] = \int_{R_1}^{R_2} D_{ijkl} v_{nij} v_{nkl} r dr + \frac{qh}{2} \int_{R_1}^{R_2} \tilde{\sigma}_{ij}^0 w_{ni} w_{nj} r dr, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

где $v_{n11} = \frac{d^2 w_n}{dr^2}$; $v_{n12} = v_{n21} = -n \frac{d}{dr} \left(\frac{w_n}{r} \right)$; $v_{n22} = \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n$; $w_{n1} = \frac{dw_n}{dr}$; $w_{n2} = -\frac{n}{r} w_n$. Для решения задачи методом Ритца необходимо представить функции $w_n(r)$ в виде рядов, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Пусть пластина закреплена на обоих контурах. Тогда граничные условия примут вид $w_n(R_1) = 0$; $w_n(R_2) = 0$; $\frac{dw_n(R_1)}{dr} = 0$, $\frac{dw_n(R_2)}{dr} = 0$, а функции $w_n(r)$ можно задать в виде рядов:

$$\tilde{w}_n(\rho) = \sum_{\alpha=-m_2}^{m_2} A_\alpha^n f(\rho) \rho^\alpha, \quad (25)$$

где $w_n(r) = R_1 \tilde{w}_n(\rho)$, $f(\rho) = (\rho - 1)(\rho^{-1} - 1)(\rho - s)(\rho^{-1} - s^{-1})$. Можно рассмотреть и другие варианты закрепления пластины. Например, шарнирное опирание на двух краях $w_n(R_1) = 0$; $w_n(R_2) = 0$; $f(\rho) = (\rho - 1)(\rho - s)$. Или внутренняя кромка закреплена, внешняя свободна $w_n(R_1) = 0$; $\frac{dw_n(R_1)}{dr} = 0$; $f(\rho) = (\rho - 1)(\rho^{-1} - 1)$. Либо внутренняя кромка свободна, внешняя закреплена $w_n(R_2) = 0$; $\frac{dw_n(R_2)}{dr} = 0$; $f(\rho) = (\rho - s)(\rho^{-1} - s^{-1})$. Подставляя (25) в (24) получаем системы уравнений для задач о собственных значениях:

$$\mathbf{T}^{(n)} \mathbf{A}^{(n)} + q \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Здесь $\mathbf{T}^{(n)}$ и $\mathbf{P}^{(n)}$ – симметричные матрицы, причем $\mathbf{T}^{(n)}$ положительно определена, $\mathbf{A}^{(n)}$ – вектор, составленный из коэффициентов ряда (25). Решаем каждую из систем (26), находим наименьшие положительные $q_{сж}^{(n)}$ и наибольшие отрицательные $q_{раст}^{(n)}$ собственные значения каждой из систем, а затем определяем $q_{сж} = \min_n \left(q_{сж}^{(n)} \right)$ – критическая нагрузка при “сжатии” (как показано на рис. 1) и $q_{раст} = \max_n \left(q_{раст}^{(n)} \right)$ – критическая нагрузка при “растяжении” (противоположно направлению на рис. 1). Соответствующие критическим нагрузкам $q_{сж}$ и $q_{раст}$ собственные векторы определяют формы потери устойчивости при “сжатии” и “растяжении”.

4. Упругие характеристики армированных пластин. Полагаем, что кольцевые изотропные пластины армированы так, как показано, к примеру, на рис. 3 и рис. 4. Это структурно неоднородные и ортотропные конструкции. Наша цель – определить упругие характеристики материала конструкции, эквивалентной – в некотором смысле – заданной. Здесь используется модель, предложенная Ю. В. Немировским (“мягкий вариант”) [3]. В дополнение, предложен “жесткий вариант”. Суть в следующем: упругий потенциал эквивалентной сплошной среды представляется в виде следующих сумм:

(“мягкий вариант”)

$$W_1^э = \frac{1}{2} a_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (1 - \omega) a_{ijkl}^c \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \omega_k E^a (\varepsilon_k^a)^2; \quad (27)$$

(“жесткий вариант”)

$$W_2^3 = \frac{1}{2} a_{ijkl}^{(2)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} a_{ijkl}^c \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \omega_k (E_k^a - E) (\varepsilon_k^a)^2. \quad (28)$$

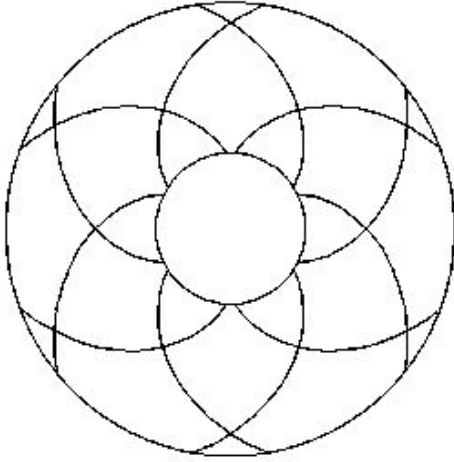


Рис. 3. Спиральное Архимеда

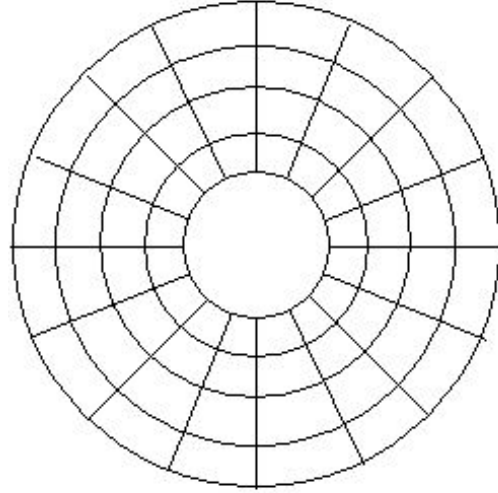


Рис. 4. Радиально-окружное армирование

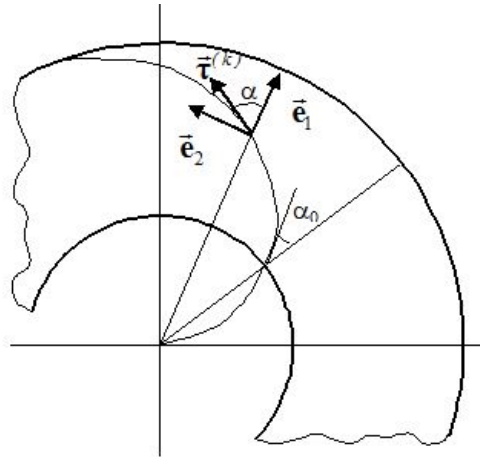


Рис. 5. Параметры армирования

В этих формулах a_{ijkl}^c – тензор упругих постоянных для изотропной среды (связующего); $\omega = \omega_1 + \omega_2 < 1$, ω_k ($k = 1, 2$) – удельная плотность упаковки k -го семейства арматуры; $\varepsilon_k^a = \varepsilon_{ij} t_i^{(k)} t_j^{(k)}$, где $t_i^{(k)} = \tilde{r}^{(k)} \cdot \tilde{e}_i$ – направляющие косинусы k -го семейства арматуры в базисе полярной системы координат; E_k^a – модули Юнга k -го семейства арматуры. Для армирования по спиралям (рис. 3) примем, что оба семейства арматуры выполнены из одного материала с модулем упругости $E_k^a = E^a$, причем считается, что они имеют взаимно обратные направления, то есть $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$, и кроме того $\omega_1 = \omega_2$. В случае радиально-окружного армирования (рис. 3) параметры радиального и окружного семейств арматуры задаются независимо друг от друга. Для указанных на рис. 3 схем непрерывного армирования должны

выполняться и условия постоянства сечений волокон арматуры (кроме окружных волокон): $\rho\omega_k(\rho)t_1^{(k)}(\rho) = \omega_k(1)t_1^{(k)}(1)$. Относительный объём арматуры в пластине может быть вычислен по формуле: $\Omega = \frac{2}{s^2-1} \int_1^s \omega(\rho)\rho d\rho$. Применяв формулу Грина [1] $\sigma_{ij} = \partial W/\partial \varepsilon_{ij}$ к выражениям (27) и (28), определяем a_{ijkl} , а затем и b_{ijkl} . При указанных ограничениях в обоих вариантах эквивалентный материал получается полярно ортотропным, и упругие характеристики меняются только в радиальном направлении. Были рассмотрены четыре закона армирования волокон: спираль Архимеда, логарифмическая спираль, радиальное и окружное армирование.

Спираль Архимеда ($\rho = D\theta$):

$$\omega(\rho) = 2\omega_1(\rho) = 2\omega_1^0 \text{Cos}\alpha_o / (\rho \text{Cos}\alpha); \quad \text{Cos}^2\alpha(\rho) = 1 / (1 + \rho^2 \text{tg}^2\alpha_o); \quad D = 1/\text{tg}\alpha_o.$$

Логарифмическая спираль ($\rho = e^{b\theta}$):

$$\cos\alpha = \cos\alpha_o; \quad \alpha = \alpha_o = \text{const}; \quad \omega(\rho) = 2\omega_1(\rho); \quad \omega_1(\rho) = \omega_1^0/\rho; \quad b = \text{ctg}\alpha_o.$$

Радиально-окружное армирование:

пусть 1 – семейство радиальной арматуры, 2 – семейство окружной арматуры, $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi/2$; $\omega_1(\rho) = \omega_1^0/\rho$; $\omega_1^0 = \frac{s+1}{2}\Omega_1$; где Ω_1 – относительный объём радиальной арматуры. Функция $\omega_2(\rho)$ может быть задана независимо, но так, чтобы выполнялось условие $\omega_1 + \omega_2 < 1$. Для расчетов выберем линейный закон распределения плотности окружной арматуры $\omega_2 = k_1\rho + k_2$. Относительный объём, коэффициенты k_1 и k_2 окружной арматуры связаны соотношением $\Omega_2 = \frac{2}{3}k_1\frac{s^3-1}{s^2-1} + k_2$.

Здесь α_0 и ω_k^0 – направление траектории армирования и удельная плотность одного слоя арматуры, соответственно, на входе в пластину (при $\rho=1$).

Решив плоскую задачу теории упругости, определяем осредненные напряжения в композитной пластине σ_{ij}^0 , а затем осредненные деформации ε_{ij}^0 , совпадающие с деформациями в связующем ε_{ij}^c и волокне ε_k^a :

$$\varepsilon_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^0 = b_{ijkl}\sigma_{kl}^0; \quad \varepsilon_k^a = \varepsilon_{ij}^0 t_i^{(k)} t_j^{(k)}.$$

Затем можно выразить напряжения в связующем и волокне через осредненные напряжения композитной пластины:

$$\sigma_{ij}^c = a_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}^c = a_{ijkl}^c b_{klmn} \sigma_{mn}^0 = (a_{ij11}^c b_{11mn} + 2a_{ij12}^c b_{12mn} + a_{ij22}^c b_{22mn}) \sigma_{mn}^0,$$

$$\sigma_k^a = E^a \varepsilon_k^a = E^a \varepsilon_{ij}^0 t_i^{(k)} t_j^{(k)} = E^a b_{ijmn} \sigma_{mn}^0 t_i^{(k)} t_j^{(k)},$$

где b_{ijkl} – упругие характеристики эквивалентного материала.

5. Результаты. На рис. 6, 7, 8 и 9 представлены графики зависимости безразмерного параметра критической нагрузки $\lambda = q_{кр}^3/q_{кр}^H$ от угла армирования волокон на входе в пластину, содержащей 20% арматуры ($\Omega=0,2$). Материал связующего – алюминий, материал волокна – бор. Здесь $q_{кр}^H$ – критическое значение нагрузки изотропной пластины, изготовленной из материала связующего, $q_{кр}^3$ – критическое значение нагрузки композитной пластины. Нагрузка приложена на отверстия ($q_1 = q; q_2=0$), пластина закреплена на обоих контурах. Отношение внешнего радиуса пластины к внутреннему $s=3$. На рис. 6 и 7 в качестве законов армирования были выбраны спираль Архимеда и логарифмическая спираль. Как видно из рисунков, для “сжатия” наиболее оптимальным является армирование с начальным углом армирования, равным 0; что соответствует радиальному армированию, а для “растяжения” наиболее выгодно армирование по логарифмической спирали с начальным углом армирования, равным 90; что соответствует окружному армированию. На рис. 8 и 9 представлены результаты для радиально-окружного армирования. Причем в пределах

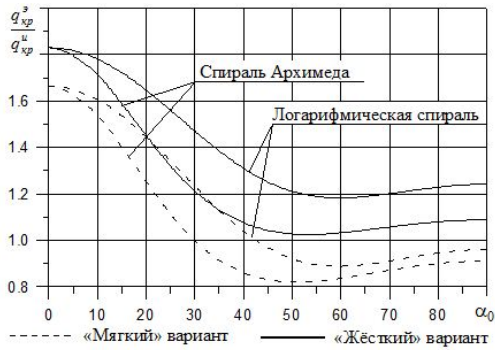


Рис. 6. “Сжатие”

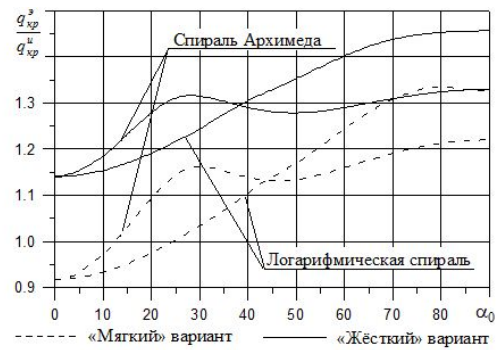


Рис. 7. “Растяжение”

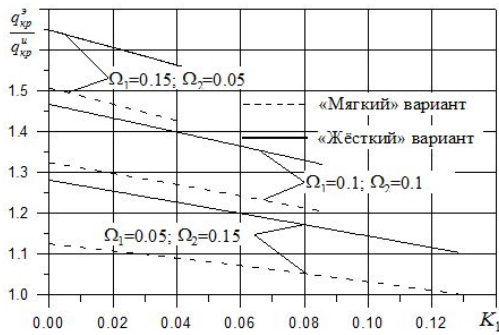


Рис. 8. Радиально-окружное армирование “Сжатие”

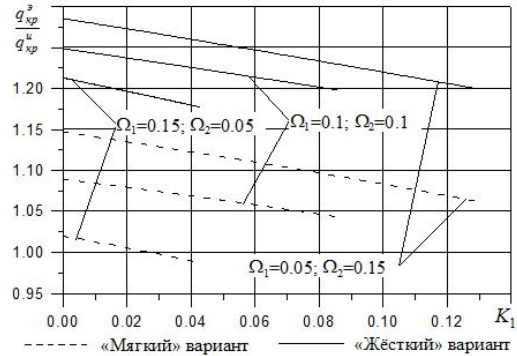


Рис. 9. Радиально-окружное армирование “Растяжение”

одного графика относительный объем радиальной Ω_1 и окружной Ω_2 арматуры не меняется. Из рисунков видно, что с увеличением коэффициента k_1 (когда удельная плотность окружной арматуры увеличивается от центра к периферии) критическая нагрузка падает как для “сжатия”, так и для “растяжения”. Значит, наиболее оптимальное с точки зрения устойчивости распределение окружной арматуры, когда она концентрируется ближе к центру. Для “сжатия” более выгодно радиальное армирование, для “растяжения” – окружное.

6. Заключение. Основным результатом данной работы является сведение двумерной задачи устойчивости к одномерной и ее решение. Проведен анализ устойчивости композитных пластин для различных структур армирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Демидов, С. П. Теория упругости / С. П. Демидов. – М. : Высшая школа, 1979. – 432 с.
- [2] Матвеев, К. А. К исследованию общей и локальной устойчивости ортотропных пластин / К. А. Матвеев, Д. В. Моховнев, А. В. Савельев // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1998. – № 2. – С. 127–139.
- [3] Немировский, Ю. В. Прочность элементов конструкций из композиционных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. – Новосибирск: Наука, 1986. – 165 с.
- [4] Немировский, Ю. В. Устойчивость композитных кольцевых пластин при различных структурах армирования / Ю. В. Немировский, К. А. Матвеев, Д. В. Моховнев // Сборник научных трудов Sworld. – 2014. – Т. 30. – № 1. – С. 55–63.

[5] *Пустовой, Н. В.* Устойчивость кольцевых ортотропных пластин / Н. В. Пустовой, К. А. Матвеев, Д. В. Моховнев // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – № 2. – С. 165–170.

Немировский Юрий Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Матвеев Константин Александрович,

доктор технических наук, профессор, декан факультета летательных аппаратов, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск

e-mail: matveev@craft.nstu.ru

Моховнев Дмитрий Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск

e-mail: mohovnov@yandex.ru

Y. V. Nemirovsky, K. A. Matveev, D. V. Mokhovnev

LIMITING ELASTIC STATE OF COMPRESSED RING PLATES WITH VARIOUS STRUCTURES OF REINFORCING

Institute of Theoretical and Applied Mechanics. SA Christianovich SB RAS

Novosibirsk State Technical University

Abstract. Limiting elastic state of ring curvilinear reinforced plates with various structures of reinforcing such as radial-peripheral, spiral and mixed one is considered. Conditions of limiting elastic state are formulated. Statements of flat stresses problem and buckling problem in terms of polar coordinate system are presented. The critical loads are determined for various laws of reinforcement and estimations of efficiency for various structures are presented.

Keywords: buckling, composite plate, structures of reinforcement, radial orthotropy.

REFERENCES

- [1] *Demidov, S. P.* Theory of elasticity / S. P. Demidov. – M. : The higher school, 1979. – 432 p.
- [2] *Matveev, K. A.* To research of the general and local stability ortotropnykh of plates / K. A. Matveev, D. V. Mokhovnev, A. V. Savelyev // Siberian magazine of industrial mathematics. – 1998. – № 2. – P. 127–139.
- [3] *Nemirovsky, Yu. V.* Durability of elements of designs from composite materials / Yu. V. Nemirovsky, B. S. Reznikov. – Novosibirsk : Nauka, 1986. – 165 p.
- [4] *Nemirovsky, Yu. V.* Stability of composite ring plates at various structures of reinforcing / Yu. V. Nemirovsky, K. A. Matveev, D. V. Mokhovnev // Collection of scientific works Sworld. – 2014. – Vol. 30. – № 1. – P. 55–63.
- [5] *Pustovoy, N. V.* Stability ring ortotropnykh of plates / N. V. Pustovoy, K. A. Matveev, D. V. Mokhovnev // Applied mechanics and technical physics. – 2000. – № 2. – P. 165–170.

Nemirovsky, Yuri Vladimirovich

Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics. SA Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Matveev, Konsantin Alexandrovich

Doctor of Technical Science, professor, dean of faculty of flighing objects, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk

Mokhovnev, Dmitri Vladimirovich,

Candidate of Physical Science, associate professor, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk

А. Н. Васильев¹, Е. Б. Кузнецов², С. С. Леонов²

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

¹ Санкт-Петербургский государственный политехнический университет (национальный исследовательский университет)

² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Аннотация. Рассматривается применение методов нейросетевого моделирования для решения задачи идентификации параметров модели ползучести и разрушения образцов из анизотропного титанового сплава ЗВ, описываемой системой дифференциальных уравнений энергетического варианта теории ползучести. Разработан процесс построения нейросетевого решения для данной задачи, при использовании которого найдены параметры модели. Решение, соответствующее данным параметрам, хорошо согласуется с теоретическими деформационно-прочностными характеристиками конструкции, экспериментом и результатами других авторов.

Ключевые слова: ползучесть, разрушение, параметр поврежденности, нейронные сети, идентификация параметров, системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

УДК: 539.376

Введение. В последние десятилетия в машиностроении, авиационной и космической отраслях возникает все большая потребность в описании процессов деформирования и разрушения в условиях сложных температурно-силовых режимов для материалов со сложными реологическими свойствами, такими как вязкость. Для металлических и композитных конструкций особое внимание уделяется возможности учета ползучести материала в области высоких и умеренных температур. Однако на сегодняшний день не выработано общего подхода к описанию этого явления, и существуют десятки различных теорий ползучести и их модификаций (теория старения, теория упрочнения, теория наследственности, теория структурных параметров Ю. Н. Работнова и т. д.). Не всегда можно надежно определить, какую из теорий лучше использовать в том или ином случае. Применение же уравнений какой-либо из теорий осложнено тем, что все они, как правило, содержат несколько материальных констант (характеристик ползучести), которые необходимо определять на основании информации о протекании процесса деформирования, основным источником которой является эксперимент. Учитывая то, что характеристики ползучести могут зависеть от вида используемого материала и его состояния, режима нагружения, температуры, коэффициента анизотропии и других факторов, задача их идентификации имеет весьма сложный характер. Все вышесказанное говорит о необходимости разработки единого подхода к определению параметров моделей для

Поступила 15.10.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проекты 13-08-00473, 14-01-00660 и 14-01-00733.

уравнений различного вида. В данной работе представлен унифицированный метод идентификации параметров модели, описывающий процессы ползучести и разрушения конструкций по результатам эксперимента. В качестве основы для разрабатываемого подхода приняты принципы и методы нейросетевого моделирования.

Методы нейросетевого моделирования. По аналогии с работой [1], рассмотрим построение нейронной сети для систем m обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) r -ого порядка с p неизвестными скалярными параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = 0, \quad t \in [t_0, t_*] \quad (1)$$

и начальными условиями

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{y}'(t_0) = \mathbf{y}_1, \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(r-1)}(t_0) = \mathbf{y}_{r-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = (f_1(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p), f_2(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p), \dots, f_m(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p))^T$ – вектор-функция векторных аргументов; $f_i(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, $i = 1, \dots, m$ – скалярная функция векторных аргументов; $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ – искомое решение, вектор-функция скалярного аргумента, в общем случае неявно зависящая от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$; t_0 – начальная точка; t_* – правый конец рассматриваемого интервала изменения аргумента t ; $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})^T$, $i = 0, \dots, r-1$ – m -мерные числовые векторы значений $\mathbf{y}(t)$ и ее $r-1$ первых производных в точке t_0 ; $\mathbf{y}^{(i)}(t) = \frac{d^i \mathbf{y}(t)}{dt^i}$, $i = 0, \dots, r-1$; $\mathbf{y}^{(0)}(t) = \mathbf{y}(t)$.

При описании физических процессов на области изменения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ могут накладываться ограничения вида

$$\alpha_i \in A_i \subseteq \mathbb{R}. \quad (3)$$

Пусть для задачи (1)–(2) также выполнены условия теоремы Коши о существовании и единственности решения начальной задачи. Кроме того, имеется набор дополнительных данных о поведении функции $\mathbf{y}(t)$ в точках t_1, t_2, \dots, t_l

$$\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}_i^e, \quad t_i \in (t_0, t_*], \quad i = 1, \dots, l, \quad (4)$$

где $\mathbf{y}_i^e = (y_{i1}^e, y_{i2}^e, \dots, y_{im}^e)^T$, $i = 1, \dots, l$ – m -мерные числовые векторы значений $\mathbf{y}(t)$ в точках t_1, t_2, \dots, t_l соответственно.

Для решения начальной задачи (1)–(2) будем использовать методы нейросетевого моделирования, согласно которым каждую компоненту вектор-функции $\mathbf{y}(t)$ разложим по нейросетевому базису

$$\hat{y}_i(t, \mathbf{w}_i) = \sum_{j=1}^{N_i} c_{ij} \nu_j(t, \mathbf{a}_{ij}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{w}_{ij} = (c_{ij}, \mathbf{a}_{ij})$ – вектор настраиваемых параметров (нейросетевых коэффициентов); $\mathbf{a}_{ij} = (a_{ij}^1, a_{ij}^2)$; $\mathbf{w}_i = (\mathbf{w}_{i1}, \mathbf{w}_{i2}, \dots, \mathbf{w}_{iN_i})$. Тип базисного нейроэлемента $c_{ij} \nu_j(t, \mathbf{a}_{ij})$ определяется скалярной функцией скалярного аргумента, называемой активационной: $\nu_j(t, \mathbf{a}_{ij}) = \varphi_j(x)$, $x = \psi(t, \mathbf{a}_{ij})$, $\psi(\cdot)$ – заданная функция (к примеру, $\psi(t, \mathbf{a}_{ij}) = a_{ij}^1 \cdot t + a_{ij}^2$). Функция активации может быть выбрана, например, в форме гиперболического тангенса $\varphi(x) = \text{th}(x)$, радиальной базисной функции $\varphi(x) = \exp\{-|x|\}$ или ином виде [1].

Используя соотношения задачи (1)–(2), нейросетевое разложение (5) и дополнительные данные (4), составим нормированный функционал ошибки

$$J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot (t_* - t_0) + \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot r + \sum_{j=1}^m \delta_j \cdot l} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^m \beta_i \int_{t_0}^{t_*} \left| f_i(\xi, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}', \dots, \hat{\mathbf{y}}^{(n)}, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \right|^2 d\xi + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_{i=0}^{r-1} \left| \hat{y}_j^{(i)}(t_0, \mathbf{w}_j) - y_{ij} \right|^2 + \sum_{j=1}^m \delta_j \sum_{i=1}^l \left| \hat{y}_j(t_i, \mathbf{w}_j) - y_{ij}^e \right|^2 \right],$$

где $\hat{\mathbf{y}}(t, \mathbf{w}) = (\hat{y}_1(t, \mathbf{w}_1), \hat{y}_2(t, \mathbf{w}_2), \dots, \hat{y}_m(t, \mathbf{w}_m))^T$ – вектор нейросетевых разложений; $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_m)$; $\beta_i, \gamma_j, \delta_j, i = 1, \dots, m$ – штрафные множители.

На практике часто используется дискретное представление функционала ошибки (6) [1]

$$J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot M + \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot r + \sum_{j=1}^m \delta_j \cdot l} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^m \beta_i \sum_{j=1}^M \left| f_i(\xi_j, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}', \dots, \hat{\mathbf{y}}^{(n)}, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \right|^2 + \right. \quad (7)$$

$$\left. + \sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_{i=0}^{r-1} \left| \hat{y}_j^{(i)}(t_0, \mathbf{w}_j) - y_{ij} \right|^2 + \sum_{j=1}^m \delta_j \sum_{i=1}^l \left| \hat{y}_j(t_i, \mathbf{w}_j) - y_{ij}^e \right|^2 \right].$$

В данной формуле компоненты вектор-функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \dots, \mathbf{y}^{(r)}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ вычисляются на множестве пробных (или тестовых) точек $\{\xi_i\}_{i=1}^M$, генерируемых случайным образом, например, по равномерному закону распределения на интервале (t_0, t_*) [1].

Для нахождения вектор-функции $\mathbf{y}(t)$, удовлетворяющей задаче (1)–(2) и данным (4) на $t \in [t_0, t_*]$, решается задача минимизации функционала ошибки (7) (или (6)) по переменным $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ с учетом ограничений (3)

$$J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) \xrightarrow[\alpha_i \in A_i]{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m} \min, \quad i = \overline{1, p}. \quad (8)$$

В результате решения задачи (8) получим значения параметров $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_p^*$ и векторы нейросетевых коэффициентов $\mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_2^*, \dots, \mathbf{w}_m^*$, которые доставляют минимум функционалу (7). Нейросетевое решение задачи запишется в виде

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{y}}(t, \mathbf{w}^*), \quad \mathbf{w}^* = (\mathbf{w}_1^* \mathbf{w}_2^* \dots \mathbf{w}_m^*), \quad t \in [t_0, t_*]. \quad (9)$$

Отметим, что минимизация функционала ошибки (7) ведется не до глобального минимума, а до момента, когда его значение становится меньше наперед заданного значения точности η , т.е. $J < \eta$. И именно это значение функционала принимается за приближенное минимальное J_* . Для того чтобы избежать остановки процесса минимизации в точке локального минимума, производится периодическая (после нескольких итераций алгоритма минимизации) регенерация пробных точек $\{\xi_i\}_{i=1}^M$ [1].

Для иллюстрации описанного подхода рассмотрим задачу идентификации параметров модели одноосного растяжения прямоугольных образцов толщиной 20 мм из анизотропного титанового сплава ЗВ, широко используемого в авиации, ракетостроении и космической технике (изготовление обшивки, деталей крепления, силового набора, деталей шасси, различных агрегатов и т. д.), при постоянной температуре $T = 20^\circ\text{C}$.

Растяжение образцов из титанового сплава ЗВ. Для описания поведения металлов в условиях ползучести вплоть до разрушения будем применять уравнения энергетического варианта теории ползучести в виде системы двух ОДУ [2], [3], [4]:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = f(\sigma, T)\Psi(A, T), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dA}{dt}, \end{cases} \quad (10)$$

где A – удельная энергия рассеяния; ε – деформация ползучести; σ – действующее напряжение; t – время; T – температура; функциональные зависимости, входящие в первое уравнение, определяются по результатам эксперимента.

Функция $\Psi(A, T)$ может быть выбрана в виде [2], [3]

$$\Psi(A, T) = A^{-\alpha} (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^{-m}, \quad (11)$$

где α и m – параметры модели, зависящие в общем случае от температуры T , A_* – критическое значение удельной энергии рассеяния.

Таким образом, подставляя соотношение (11) в систему (10), получим:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{f(\sigma, T)}{A^\alpha (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dA}{dt}. \end{cases} \quad (12)$$

Функцию $f(\sigma, T)$ для титанового сплава ЗВ выберем в виде [2], [3]

$$f(\sigma, T) = B (\sigma - \sigma_c)^n,$$

где B , n – характеристики ползучести материала, зависящие в общем случае от температуры T ; σ_c – предел ползучести.

Таким образом, окончательно получим систему

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{B(\sigma - \sigma_c)^n}{A^\alpha (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dA}{dt}. \end{cases} \quad (13)$$

Проведем обезразмеривание системы (13), полагая

$$\omega = \frac{A}{A_*}, \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_c}. \quad (14)$$

Здесь ω – безразмерный параметр поврежденности, $\bar{\sigma}$ – безразмерное напряжение, $A_* = 6,7 \text{ кг} \cdot \text{мм}/\text{мм}^3$, $\sigma_c = 48 \text{ кг}/\text{мм}^2$ [3].

Применяя соотношения (14), приходим к безразмерной системе

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega (\bar{\sigma} - 1)^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A_*}{\bar{\sigma} \cdot \sigma_c} \cdot \frac{d\omega}{dt}, \end{cases} \quad (15)$$

где $B_\omega = \frac{B\sigma_c^n}{A_*^{(\alpha+1)(m+1)}}$.

В качестве начальных условий для системы ОДУ (15) берутся однородные

$$t = 0 : \omega(0) = 0, \varepsilon(0) = 0. \quad (16)$$

При постоянном безразмерном напряжении $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 = \text{const}$ задача (15)–(16) распадается на дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega (\bar{\sigma}_0 - 1)^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \quad (17)$$

с начальным условием

$$t = 0 : \omega(0) = 0 \quad (18)$$

и соотношением для определения деформации ползучести

$$\varepsilon(t) = \frac{A_*}{\bar{\sigma} \cdot \sigma_c} \cdot \omega(t). \quad (19)$$

Аналитическое решение задачи Коши (17), (18) можно записать в виде [5]

$$\omega(t) = \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega (\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (20)$$

Используя соотношения (14), (19) также найдем $\varepsilon(t)$ и $A(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{A_*}{\sigma} \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega (\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (21)$$

$$A(t) = A_* \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega (\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (22)$$

Учитывая, что при разрушении параметр поврежденности принимает значение, равное единице, из выражения (20) получим значение длительной прочности t_* данной конструкции

$$t_* = [(m + 1)(\alpha + 1)B_\omega (\bar{\sigma}_0 - 1)^n]^{-1}. \quad (23)$$

Идентификация параметров. Для определения напряженно-деформированного состояния конструкции и ее прочностных характеристик в рассматриваемой задаче достаточно получить параметры начальной задачи (17)–(18), т. е. найти выражение для $\omega(t)$. Для этих целей будем использовать аналитическое решение (20).

Обозначим $f(\omega, B_\omega, \alpha, m, n) = \omega(t) - \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega (\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Можно увидеть, что рассматриваемая задача по структуре схожа с задачей (1)–(2) в случае вырождения системы ОДУ в одно нелинейное алгебраическое уравнение ($m = 1, r = 0, p = 4, y(t) = \omega(t)$). Поэтому, будем проводить идентификацию параметров, используя подход, описанный в разделе 1. В качестве дополнительных данных будем использовать результаты эксперимента по одноосному растяжению прямоугольных образцов из анизотропного сплава ЗВ для некоторого уровня безразмерного напряжения $\bar{\sigma}_0$ [2]

$$\omega(t_i) = \omega_i, \quad t_i \in (0, t_*], \quad i = 1, \dots, l, \quad (24)$$

где t_i – момент времени снятия i -ого экспериментального значения, ω_i – экспериментальное значение безразмерного параметра поврежденности в момент времени t_i , l – количество экспериментальных точек.

Разложение по нейросетевому базису для данной задачи запишем в виде

$$\hat{\omega}(t, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^N c_j (a_{j1}t + a_{j2} + 1)^{-1} \text{th}(a_{j3}t + a_{j4}) \sqrt{a_{j5}t + a_{j6} + 1}, \quad (25)$$

где $\mathbf{c} = \{c_j\}$; $\mathbf{a} = \{a_{ji}\}$; $i = 1, \dots, 6$; $j = 1, \dots, N$ – вектор и прямоугольная матрица нейросетевых коэффициентов.

Используя нейросетевое разложение (25), выражение для безразмерного параметра поврежденности (20) и экспериментальные данные для некоторого значения безразмерного напряжения $\bar{\sigma}_0$ (24), запишем нормированный функционал ошибки (7) в виде

$$J(B_\omega, n, \alpha, m, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \frac{1}{\delta \cdot M + \delta_1 \cdot N} \times \\ \times \left\{ \delta \sum_{k=1}^M \left[\hat{\omega}(t, \mathbf{c}, \mathbf{a}) - \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega(\bar{\sigma}_0 - 1)^n t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right]^2 \right\}_{t=\xi_k} + \\ + \delta_1 \sum_{i=0}^l |\hat{\omega}(t_i, \mathbf{c}, \mathbf{a}) - \omega_i|^2 \}. \quad (26)$$

Здесь $\{\xi_k\}_{k=1}^M$ – набор пробных точек, равномерно распределенных на интервале $(0, t_*)$; выражение под знаком первой суммы берется в точке $t = \xi_k$, M – количество пробных точек.

Для идентификации параметров B_ω, n, α, m решается задача минимизации

$$J(B_\omega, n, \alpha, m, \mathbf{c}, \mathbf{a}) \xrightarrow[\mathbf{c}, \mathbf{a}]{B_\omega, n, \alpha, m} \min. \quad (27)$$

Учитывая особенности протекания процесса деформирования, на параметры модели необходимо наложить следующие ограничения:

$$\begin{cases} B_\omega > 0, \\ n > 1, \\ \alpha > 1, \\ m > 1. \end{cases} \quad (28)$$

Получим задачу минимизации с ограничениями типа неравенств (27)–(28), в результате решения которой найдем значения параметров B_ω, n, α, m и коэффициенты нейросетевого разложения $\mathbf{c}^*, \mathbf{a}^*$, доставляющие минимум функционалу (26). Подставляя полученные коэффициенты в (25), найдем нейросетевое решение задачи.

Параметры нейросети и результаты эксперимента. Рассматривается одноосное растяжение прямоугольных образцов из анизотропного титанового сплава 3В. При расчете используются образцы двух типов [2], [3]:

- (1) Вырезанные в направлении прокатки листа (продольные образцы).
- (2) Вырезанные в направлении перпендикулярном к направлению прокатки (поперечные образцы).

Идентификация параметров ОДУ (17) проводится для трех начальных значений безразмерных напряжений $\bar{\sigma}_0 = 1,25; 1,28; 1,31$ в случае продольных образцов и для $\bar{\sigma}_0 = 1,35$ в случае поперечных образцов. Число базисных функций в нейросетевом разложении, количество пробных и экспериментальных точек, значения штрафных множителей, а также другие параметры нейросети приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры нейросети						
$\bar{\sigma}_0$, МПа	δ	δ_1	N	M	l	η
Продольные образцы						
1,25	10^5	10^6	4	1000	20	$5 \cdot 10^{-4}$
1,27	10^5	10^6	4	1000	10	$5 \cdot 10^{-4}$
1,31	10^5	10^6	4	1000	17	$5 \cdot 10^{-4}$
Поперечные образцы						
1,35	10^5	10^6	4	1000	26	$5 \cdot 10^{-4}$

Все данные экспериментов приводятся в табл. 2–5.

Таблица 2
Экспериментальные данные для продольных образцов, $\bar{\sigma}_0 = 1,25$

	1	2	3	4	5	6	7
t , ч	182,4	700,8	1315,2	2150,4	2812,8	3801,6	4996,8
ω	0,216496	0,276476	0,314874	0,353796	0,378632	0,394564	0,433458
	8	9	10	11	12	13	14
t , ч	6060,024	7121,248	8116,635	9115,679	10070,4	11003,824	12889,952
ω	0,436739	0,463918	0,490159	0,512652	0,527773	0,551078	0,586692
	15	16	17	18	19	20	
t , ч	13899,522	14898,204	15846,707	16081,437	16134,132	16167,246	
ω	0,622306	0,672915	0,737113	0,7895	0,910965	0,998	

Таблица 3
Экспериментальные данные для продольных образцов, $\bar{\sigma}_0 = 1,28$

	1	2	3	4	5
t , ч	86,747	443,374	1050,602	1792,771	2149,398
ω	0,266167	0,343018	0,388941	0,444236	0,48841
	6	7	8	9	10
t , ч	2631,325	2949,398	3363,855	3412,048	3450,602
ω	0,527647	0,572634	0,661668	0,737582	0,809746

Таблица 4
Экспериментальные данные для продольных образцов, $\bar{\sigma}_0 = 1,31$

	1	2	3	4	5	6	7
t , ч	9,412	35,765	96	159,059	256	358,588	492,235
ω	0,177570	0,233645	0,298131	0,336449	0,374766	0,4	0,43178
	8	9	10	11	12	13	14
t , ч	602,353	714,824	836,706	1015,529	1105,882	1203,765	1251,765
ω	0,465421	0,504673	0,537383	0,61215	0,640187	0,699065	0,753271
	15	16	17				
t , ч	1298,824	1303,529	1303,529				
ω	0,845794	0,929907	0,991589				

Таблица 5
Экспериментальные данные для поперечных образцов, $\bar{\sigma}_0 = 1,35$

	1	2	3	4	5	6	7
t , ч	23,529	47,059	106,353	173,176	298,353	384	400
ω	0,103738	0,160748	0,218692	0,245794	0,278505	0,280225	0,293458
	8	9	10	11	12	13	14
t , ч	489,412	634,353	751,059	787,2	928	1091,765	1233,882
ω	0,300935	0,309346	0,313084	0,328972	0,331771	0,339318	0,347664
	15	16	17	18	19	20	21
t , ч	1356,235	1459,2	1485,176	1581,176	2568	3340,8	4003,2
ω	0,357944	0,366093	0,371701	0,379569	0,43907	0,48093	0,52386
	22	23	24	25	26		
t , ч	4684,8	5404,8	5827,2	5904	5952		
ω	0,569303	0,604721	0,668094	0,715207	0,847512		

Результаты вычислений. Задача минимизации (27)–(28) решалась в вычислительной среде Mathcad 14 методом сопряженных градиентов [6]. Расчет проводился на персональном компьютере Intel Core i5 – 2410M CPU 2,30 ГГц; 4,00 ГБ ОЗУ; видеокарта NVIDIA GeForce GT540M 2 ГБ; 64 – разрядная операционная система Windows 7 Домашняя базовая Service

Риск 1. Параметры, входящие в уравнение (17), полученные в результате решения задачи (27)–(28) и приведенные в работе [2], представлены в табл. 6. В табл. 7 приведены основные данные о процессе деформирования, где ω_* – расчетное значение безразмерного параметра поврежденности в момент разрушения, ε_* – расчетное значение деформации ползучести в момент разрушения.

Таблица 6

Характеристики ползучести

$\bar{\sigma}_0$	B_ω	n	α	m
Результаты, полученные в работе [2]				
Продольные образцы				
1,25; 1,28; 1,31	37	12	2,5	7
Поперечные образцы				
1,35	1,35	12	2,5	7
Решение задачи (27)–(28)				
Продольные образцы				
1,25	39,074	12	2,499	6,592
1,28	12,945	12	3,505	20,402
1,31	26,725	12	2,83	8,549
Продольные образцы				
1,35	0,537	12	3,437	19,934

Таблица 7

Основные сведения о процессе деформирования

$\bar{\sigma}_0$, МПа	t_* , ч	ε_*	ω_*	A_* , кг · мм/мм ³	J_*
Результаты, полученные в работе [2]					
1,25	16194,224	0,11167	1	6,7	–
1,28	4156,654	0,10905	1	6,7	–
1,31	1225,462	0,10655	1	6,7	–
1,35	7828,736	0,1034	1	6,7	–
Результаты, полученные при решении задачи (27)–(28)					
1,25	16159,843	0,11167	1	6,7	$1,283 \cdot 10^{-4}$
1,28	3450,083	0,10905	1	6,7	$4,329 \cdot 10^{-5}$
1,31	1299,196	0,10655	1	6,7	$6,663 \cdot 10^{-5}$
1,35	5935,868	0,1034	1	6,7	$3,781 \cdot 10^{-5}$

Графики зависимости безразмерного параметра поврежденности от времени показаны на рис. 1–4, где точками обозначены результаты эксперимента, непрерывная линия – зависимость, построенная по результатам работы [2], пунктирная линия – результаты полученные при решении задачи (27)–(28).

Ниже приводятся коэффициенты нейросетевого разложения (25).
Для продольных образцов, $\bar{\sigma}_0 = 1,25$:

$$\mathbf{c}^* = (-0,021 \quad 0,028 \quad 0,082 \quad 2,659 \cdot 10^{-3})^T,$$

$$\mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} 6,226 \cdot 10^{-4} & 0,038 & 1,135 \cdot 10^{-3} & 0,029 & 0,069 & 0,019 \\ -5,632 \cdot 10^{-5} & 1,121 & 0,202 & 0,044 & 0,037 & 0,063 \\ 3,068 \cdot 10^{-4} & 0,09 & 0,176 & 0,059 & 0,02 & 0,123 \\ -1,987 \cdot 10^{-4} & 2,222 & 0,03 & 0,201 & -1,039 \cdot 10^{-5} & 0,072 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Для продольных образцов, $\bar{\sigma}_0 = 1,28$:

$$\mathbf{c}^* = (0,121 \quad 0,055 \quad -0,066 \quad 3,827 \cdot 10^{-3})^T,$$

$$\mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} -2,45 \cdot 10^{-4} & 0,064 & 0,02 & 0,576 & -4,727 \cdot 10^{-4} & 1,05 \\ 5,544 \cdot 10^{-4} & 2,489 & 0,344 & 0,096 & 0,243 & 0,371 \\ 8,185 & 0,146 & 0,852 & 2,268 & 0,241 & 1,256 \\ -2,539 \cdot 10^{-3} & 7,82 & 0,161 & 0,814 & 1,182 \cdot 10^{-3} & 0,254 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Для продольных образцов, $\bar{\sigma}_0 = 1,31$:

$$\mathbf{c}^* = (0,314 \quad 0,033 \quad 0,015 \quad 2,325 \cdot 10^{-3})^T,$$

$$\mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} 8,913 \cdot 10^{-4} & 4,194 & 0,152 & 0,21 & 0,059 & 3,032 \\ -4,781 \cdot 10^{-4} & -0,3 & 0,013 & 0,287 & -3,522 \cdot 10^{-3} & 4,137 \\ 0,449 & 1,811 & 1,294 & -0,067 & 0,199 & 0,534 \\ -3,074 \cdot 10^{-3} & 3,018 & 0,173 & 0,81 & -9,638 \cdot 10^{-5} & 0,133 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Для поперечных образцов, $\bar{\sigma}_0 = 1,35$:

$$\mathbf{c}^* = (0,012 \quad 0,012 \quad 0,135 \quad -6,481 \cdot 10^{-3})^T,$$

$$\mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} -1,918 \cdot 10^{-4} & 0,147 & 2,784 \cdot 10^{-5} & -0,128 & 5,411 \cdot 10^{-4} & 0,019 \\ -1,526 \cdot 10^{-4} & 0,262 & 1,235 & -0,029 & 0,466 & -5,588 \cdot 10^{-4} \\ 4,915 \cdot 10^{-3} & 6,911 \cdot 10^{-3} & 1,717 \cdot 10^{-4} & 0,137 & 2,034 & -0,304 \\ -8,068 \cdot 10^{-5} & -0,334 & 0,797 & -13,253 & 0,353 & 0,17 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

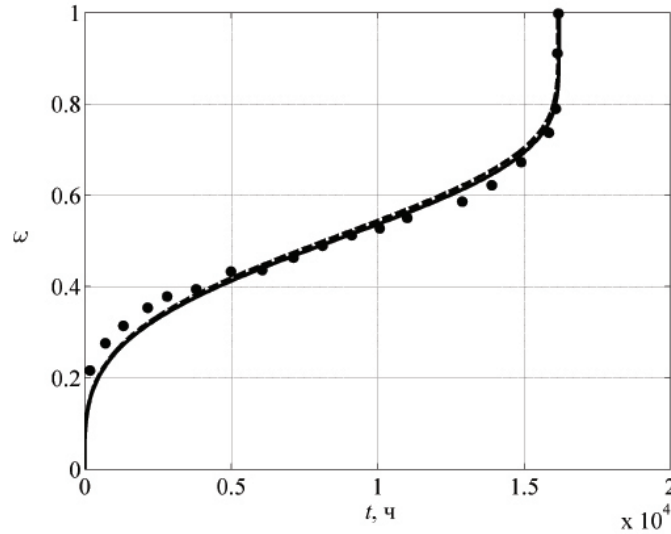


Рис. 1. Зависимость безразмерного параметра поврежденности от времени, $\bar{\sigma}_0 = 1,25$

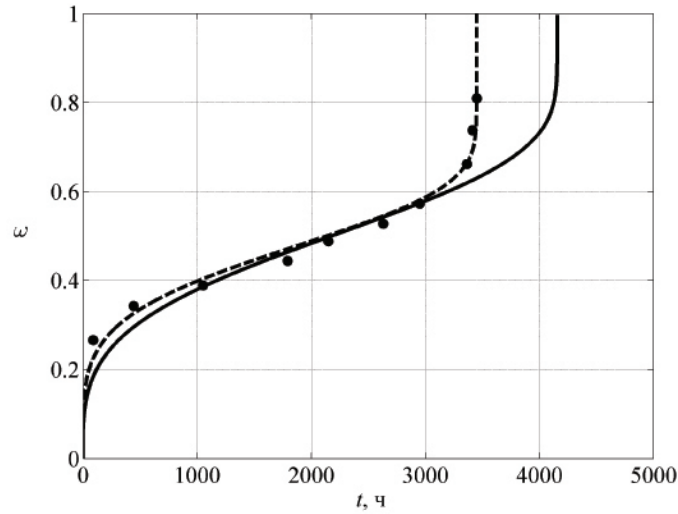


Рис. 2. Зависимость безразмерного параметра поврежденности от времени, $\bar{\sigma}_0 = 1,28$

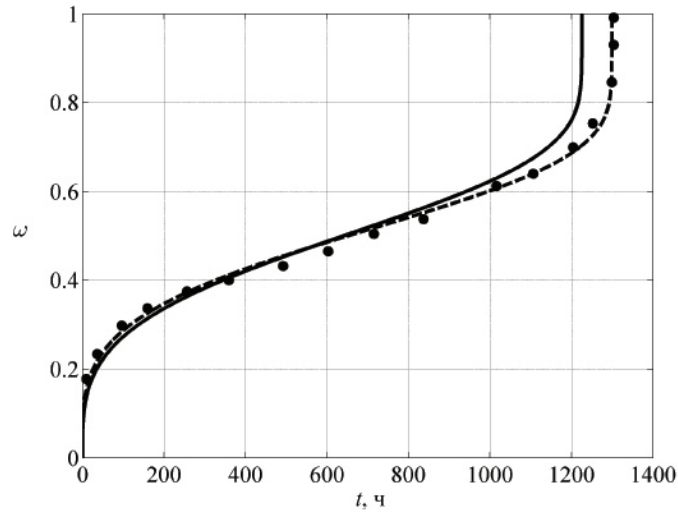


Рис. 3. Зависимость безразмерного параметра поврежденности от времени, $\bar{\sigma}_0 = 1,31$

Нейросетевые решения, соответствующие полученным коэффициентам, имеют вид, аналогичный аналитическим зависимостям представленным на рис. 1–4.

Выводы и замечания. В качестве основных результатов данной работы можно выделить:

1. Описан процесс построения решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений r -ого порядка с неизвестными скалярными параметрами и набором дополнительных данных с использованием методов нейросетевого моделирования.
2. Данный подход использован при решении задачи идентификации параметров модели ползучести и разрушения образцов из анизотропного титанового сплава ЗВ при постоянных напряжении и температуре, описываемой ОДУ первого порядка энергетического варианта теории ползучести.

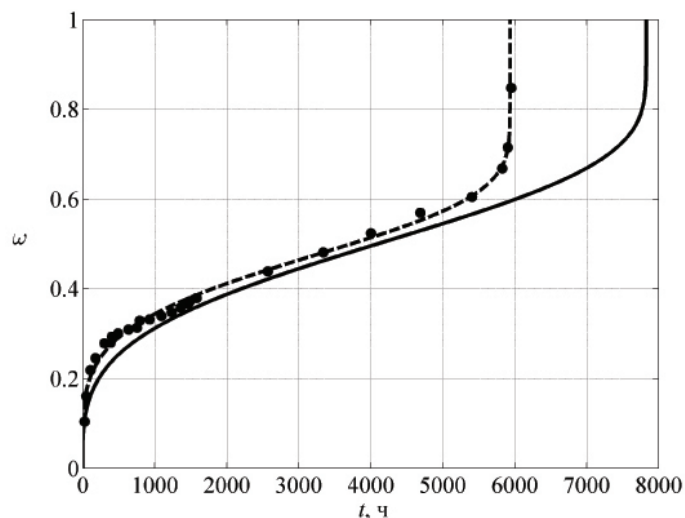


Рис. 4. Зависимость безразмерного параметра поврежденности от времени, $\bar{\sigma}_0 = 1,35$

3. Получены параметры и нейросетевые решения для рассматриваемой модели для трех начальных значений безразмерных напряжений $\bar{\sigma}_0 = 1,25; 1,28; 1,31$ в случае продольных образцов и для $\bar{\sigma}_0 = 1,35$ в случае поперечных образцов. Результаты расчетов показывают хорошее качественное и количественное согласование с результатами эксперимента (табл. 6–7, рис. 1–4), что говорит об эффективной применимости нейросетевого подхода к решению поставленных задач.

Стоит отметить, что, хотя для конкретного уровня напряжения можно получить параметры модели по результатам эксперимента, но, как правило, не всегда есть экспериментальные данные для всех интересующим нас значений $\bar{\sigma}_0$, поэтому в дальнейших исследованиях предполагается рассмотреть следующие задачи:

1. Идентификация параметров модели, пригодных для описания процесса ползучести и разрушения в некотором интервале напряжений.
2. Определение минимального объема экспериментальных данных, необходимых для идентификации параметров модели.
3. Получение ограничений на параметры модели, отражающие физическую сторону процессов ползучести и разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Васильев, А. Н.* Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения / А. Н. Васильев, Д. А. Тархов. – СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2009. – 528 с.
- [2] *Соснин, О. В.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 2. Ползучесть и разрушение материалов с начальным упрочнением / О. В. Соснин, И. К. Шокало // Проблемы прочности. – 1974. – № 1. – С. 43–48.
- [3] *Соснин, О. В.* Энергетический вариант теории ползучести / О. В. Соснин, Б. В. Горев, А. Ф. Никитенко. – Новосибирск : Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. – 96 с.
- [4] *Соснин, О. В.* К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов / О. В. Соснин, А. Ф. Никитенко, Б. В. Горев // ПМТФ. – 2010. – Т. 51. – № 4. – С. 188–197.

[5] *Горев, Б.В.* Высокотемпературная ползучесть конструкционных сплавов и ее приложение к формообразованию крупногабаритных деталей: Дис. ... д-ра техн. наук: 01.02.04 / Б.В.Горев. – Новосибирск, 2003. – 426 с.

[6] *Полак, Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход / Э.Полак. – М. : Мир, 1974. – 376 с.

Васильев Александр Николаевич,

доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет (национальный исследовательский университет), г. Санкт-Петербург

e-mail: a.n.vasilyev@gmail.com

Кузнецов Евгений Борисович,

доктор физико-математических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва

e-mail: kuznetsov@mai.ru

Леонов Сергей Сергеевич,

аспирант, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва

e-mail: powerandglory@yandex.ru

A. N. Vasilyev¹, E. B. Kuznetsov², S. S. Leonov²

PARAMETER IDENTIFICATION FOR ANISOTROPIC CONSTRUCTION FRACTURE MODEL

¹*St. Petersburg State Polytechnic University (National Research University)*

²*Moscow Aviation Institute (National Research University)*

Abstract. The application of neural network modeling methods to solve the creep and fracture model parameters identification problem of anisotropic titanium alloy 3V specimens described by energy variant of creep theory system of differential equations is considered. The process of neural network solution constructing for this problem is developed. By using of this process the model parameters are found. Solution corresponding to these parameters is in good agreement with the theoretical deformation-strength characteristics, the experiment and the results of other authors.

Keywords: creep, fracture, damage parameter, neural networks, parameter identification, systems of ordinary differential equations.

REFERENCES

- [1] *Vasilyev, A. N.* Neural Network Modeling. Principles. Algorithms. Applications / A. N. Vasilyev, D. A. Tarkhov. – St. Petersburg : St. Petersburg state polytechnic university publ., 2009. – 528 p.
- [2] *Sosnin, O. V.* Energy Variant of Creep and Long-Term Strength Theory. Report 2. Creep and Fracture of Materials with Initial Hardening / O. V. Sosnin, I. K. Shokalo // Strength problems. – 1974. – № 1. – P. 43–48.
- [3] *Sosnin, O. V.* Energy Variant of Creep Theory / O. V. Sosnin, B. V. Gorev, A. Ph. Nikitenko. – Novosibirsk : Institute of Hydrodynamics Siberian Branch of the Sciences Academy of the USSR, 1986. – 96 p.
- [4] *Sosnin, O. V.* Justification of the Energy Variant of the Theory of Creep and Long-Term Strength of Metals / O. V. Sosnin, A. Ph. Nikitenko, B. V. Gorev // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2010. – V. 51. – № 4. – P. 608–614.
- [5] *Gorev, B. V.* High-Temperature Creep of Structural Alloys and Its Application to the Shaping of Large Parts: Dis. ... Dr. Sci. Tech.: 01.02.04 / B. V. Gorev. – Novosibirsk, 2003. – 426 p.
- [6] *Polak, E.* Computational Methods in Optimization: A Unified Approach / E. Polak. – New York : Academic Press, – 1971.

Vasilyev Alexander Nikolaevich

Dr. Sci. Tech., Professor, St. Petersburg state polytechnic university (national research university), St. Petersburg

Kuznetsov Evgenii Borisovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow aviation institute (national research university), Moscow

Leonov Sergey Sergeevich

Postgraduate student, Moscow aviation institute (national research university), Moscow

Ю. А. Пузино

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПРИ ГОРЯЧЕЙ ДЕФОРМАЦИИ СТАЛИ AISI304 ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ НА СЖАТИЕ

Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики»

Аннотация. Для повышения эффективности технологических режимов производства изделий требуется проведение имитационного моделирования формоизменения металлов в процессе деформирования. Для получения корректных результатов необходимо правильно задать начальные и граничные условия, в том числе механические свойства материалов, которые представляют собой зависимость напряжения от деформации и скорости деформации при поддерживаемой температуре.

При проведении экспериментов выявляют зависимости механических свойств и констант сталей от деформации, скорости, заданной температуры и химического состава. При этом тип испытания, как правило, зависит от технологии процесса, при моделировании которого будет использоваться полученная информация. Можно обозначить четыре основных вида испытаний, используемых при горячей деформации: испытание на сжатие, растяжение, кручение и разрыв. Наиболее простыми для проведения считаются тесты на одноосное сжатие или растяжение. Результатами данных тестов являются кривые «напряжение течения – степень деформации».

В представленной работе описана методика аппроксимации результатов испытаний на одноосное сжатие цилиндрических образцов из стали AISI304 (аналог 08X18H10).

В ходе исследования была описана математическая модель зависимости «напряжение – деформация». Был разработан алгоритм, определяющий необходимые численные коэффициенты для данной модели. В результате были получены уравнения состояния данного материала, которые характеризуют зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформации, скорости деформации (0.15, 0.5, 1.5, 5 и 15 обратных секунд) и температуры (800, 950, 1080 и 1200 градусов Цельсия). Также было проведено сравнение полученной аппроксимации с результатами экспериментов.

Ключевые слова: горячая деформация, напряжение, аппроксимация, математическое моделирование, aisi304, сжатие.

УДК: 539.58

Математическое моделирование – неотъемлемая часть развития науки и технологий в области обработки металлов давлением, без него сегодня совершенно невозможно представить освоение ни одного производственного процесса. В настоящее время существуют различные подходы для прогнозирования структуры и механических свойств сталей и сплавов в процессе горячей деформации.

Увеличение количества и качества математических моделей горячей деформации обусловлено резким развитием физического моделирования в последние два десятилетия, ведь его

Поступила 09.11.2014

результаты служат как основой для создания, так и для проверки их адекватности и совершенствования существующих [1].

Из стали AISI 304 изготавливают промышленное оборудование в горнодобывающей, химической, криогенной, пищевой, молочной и фармацевтической отраслях промышленности. В процессе производства изделий такого рода эти стали подвергаются горячей обработке. Поэтому важно знать и уметь предсказывать их деформационное поведение в различных температурно-скоростных режимах.

Цель настоящей работы – исследовать процессы горячей деформации стали AISI304 и получить константы, описывающие механические свойства, необходимые для определения оптимальных технологических режимов производства.

Проведение испытаний. Для определения механических свойств исследуемой стали были проведены эксперименты на одноосное сжатие цилиндрических образцов в диапазоне температур 800 – 1200 °С при скоростях деформации 0.15, 0.5, 1.5, 5 и 15 сек⁻¹. Эксперименты проводились на установке Gleeble 3800 с использованием модуля Hydrawedge II. Образцы имели цилиндрическую форму, диаметр – 10 мм, высота – 15 мм. Погрешность измерения ±0.025 мм. Образцы нагревались до 1200 °С и выдерживались 1 минуту при данной температуре. Далее производилось охлаждение до температуры деформации (со скоростью 5 °С в сек.), деформирование с соответствующей скоростью и охлаждение в воде. Логарифм деформации равен 1.03. В ходе экспериментов размеры заготовок изменились и стали следующими: средний максимальный диаметр – 18 мм, средняя высота – 5 мм. Всего было произведено 34 испытания.

После проведения испытаний и анализа полученных результатов в некоторых из них было обнаружено падение напряжений после достижения ими пиковых значений с последующим выходом на постоянное установившееся значение. Такое поведение свидетельствует о протекании динамической рекристаллизации [2], начинающейся при некоторой критической степени деформации ε_c (см. рис. 1).

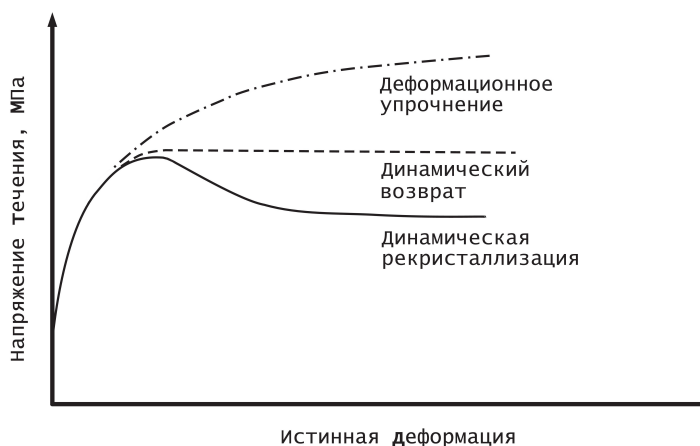


Рис. 1. Различные виды напряжения течения

Математическая модель. Зависимость напряжения от деформации, учитывающая динамическую рекристаллизацию, описывается [3] уравнениями:

$$\sigma = \sigma^{drv} - X_D(\sigma^{drv} - \sigma_{ss}^{drx}), \quad (1)$$

$$\sigma^{drv} = \sigma_{ss}^{drv} (1 - \exp[-\Omega\varepsilon])^m, \quad (2)$$

где X_D – отношение объема рекристаллизованной структуры к начальному объему, которое варьируется от 0 до 1; Ω, m – константы материала; ε – деформация, а параметры σ_{ss}^{drv} , σ_{ss}^{drx} – напряжения динамического возврата и динамической рекристаллизации. Соответственно, при $X_D = 0$ напряжение $\sigma = \sigma_{ss}^{drv}(1 - \exp[-\Omega\varepsilon])^m$, а при $X_D = 1$ получим $\sigma = \sigma_{ss}^{drx}$.

Для моделирования поведения динамической рекристаллизации используют следующие соотношения для параметра X_D [4]:

$$X_D = \begin{cases} 1 - \exp(-a[\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon_c}]^n) & \varepsilon > \varepsilon_c \\ 0 & \varepsilon \leq \varepsilon_c. \end{cases} \quad (3)$$

Соответствующие параметры: ε_c – критическая деформация, a и n – константы материала. Таким образом, для описания кривой напряжения-деформации необходимо определить 4 неизвестных параметра: Ω, m, a, n , которые не зависят от температуры и скорости деформации. При этом критическая деформация ε_c описывается так:

$$\varepsilon_c = k \left(\dot{\varepsilon} \exp \left(\frac{Q}{RT} \right) \right)^d, \quad (4)$$

где $\dot{\varepsilon}$ – скорость деформации, Q, k, d – константы материала, R – универсальная газовая постоянная, T – температура в Кельвинах.

Зависимости σ_{ss}^{drv} , σ_{ss}^{drx} от температуры и скорости деформации определяются на основании уравнения [5]:

$$\sigma_{ss}^i = \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{arcsinh} \left(A_i \left(\dot{\varepsilon} \exp \left(\frac{Q_i}{RT} \right) \right)^{n_i} \right), \quad (i = drx, drv). \quad (5)$$

Вынесем σ_{drv} в формуле (1) за скобки. Подставляя выражения (3) (с учетом $\varepsilon > \varepsilon_c$) и (2) в выражение (1), получим:

$$\sigma = \sigma_{ss}^{drv} \cdot (1 - \exp[-\Omega\varepsilon])^m \cdot \exp \left(-\alpha \left[\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon_c} \right]^n \right) + \sigma_{ss}^{drx} \cdot \left(1 - \exp \left(-\alpha \left[\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon_c} \right]^n \right) \right). \quad (6)$$

После подстановки выражений (4) и (5) в (6) получится полная модель зависимости напряжения от деформации, скорости деформации и температуры. Всего же в данной модели необходимо определить 13 неизвестных параметров: $\Omega, m, a, n, k, d, Q, Q_{drx, drv}, \alpha_{drx, drv}, A_{drx, drv}$. По экспериментальным зависимостям напряжения от деформации эти параметры были определены методом деформируемого многогранника (он же метод Нелдера-Мида). Для этого был написан скрипт (на языке VBA), обрабатывающий полученные пары напряжение–деформация для конкретных скоростей и температур.

Алгоритм определения параметров. Полученные путем экспериментов зависимости напряжений от деформаций при соответствующих температурах и скоростях деформаций были аппроксимированы с учетом уравнений (1–6). Все данные были разбиты на группы по скоростям деформации. Для каждой такой группы процесс аппроксимации проходил в пять этапов:

- (1) вариация 7-и параметров ($\sigma_{ss}^{drv}, \sigma_{ss}^{drx}, \varepsilon_c, \Omega, m, a, n$) для аппроксимации экспериментальных зависимостей (см. рис. 2);
- (2) нахождение 4-х констант для параметров X_D и σ^{drv} из соотношений (2), (3);
- (3) определение Q, k, d согласно формуле (4) для критической деформации;
- (4) обобщение найденных параметров;
- (5) вычисление оставшихся 4-х параметров для выражений коэффициентов напряжений σ_{ss}^{drv} и σ_{ss}^{drx} по формуле (5).

Последним пунктом являлось обобщение получившихся аппроксимаций для всех имеющихся экспериментальных данных.

Численные значения.

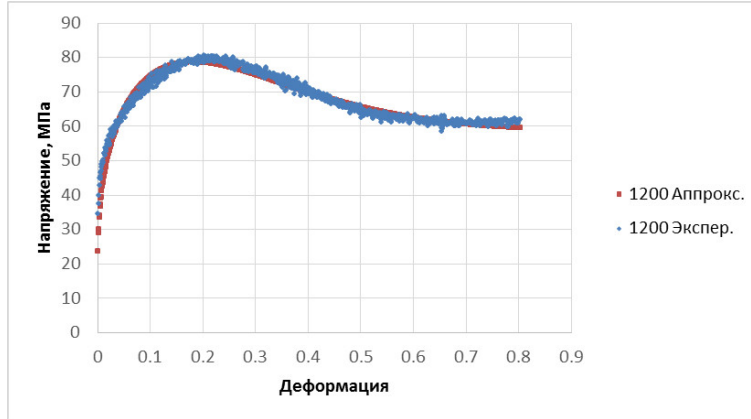


Рис. 2. Аппроксимация экспериментальных данных при скорости деформации 0.15 сек^{-1} и температуре $1200 \text{ }^\circ\text{C}$

В результате нахождения аппроксимаций было установлено, что напряжение при одноосном сжатии может быть описано следующими соотношениями с найденными коэффициентами:

$$\sigma^{drv} = \sigma_{ss}^{drv} (1 - \exp[-1.151002\varepsilon])^{0.232577}, \quad (7)$$

$$X_D = 1 - \exp\left(-0.049631 \left[\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon_c}\right]^{1.211736}\right), \quad (8)$$

$$\varepsilon_c = 1.187460 \left(\dot{\varepsilon} \exp\left(\frac{3.277031}{RT}\right)\right)^{2.218090}. \quad (9)$$

Параметры для напряжений:

$$\sigma_{ss}^{drv} = 33.968422 \cdot \operatorname{arcsinh}\left(1.11 \cdot 10^{-9} \left(\dot{\varepsilon} \exp\left(\frac{437139.79}{RT}\right)\right)^{0.666757}\right), \quad (10)$$

$$\sigma_{ss}^{drx} = 26.690747 \cdot \operatorname{arcsinh}\left(7.74 \cdot 10^{-11} \left(\dot{\varepsilon} \exp\left(\frac{177217.14}{RT}\right)\right)^{1.980361}\right). \quad (11)$$

Сравнение с экспериментальными данными. Сравнение экспериментальных данных для одноосного сжатия с полученной аппроксимацией изображено на рисунках 3 и 4 для соответствующих скоростей деформаций: 0.15 и 0.5 сек^{-1} для всех представленных температур.

При обобщении результатов точность аппроксимаций существенно снизилась. Среднее абсолютное отклонение от экспериментальных данных в зависимости от температуры и скорости деформации при данном способе выражения $\sigma_{ss}^{drv}(\dot{\varepsilon}, T)$ и $\sigma_{ss}^{drx}(\dot{\varepsilon}, T)$ составляет от 4.7 до 19 МПа. Например, при скорости деформации, равной 0.15 сек^{-1} , интервал отклонений находится в пределах 4.7 – 10.5 МПа (см. рис. 3), а при скорости в 0.5 сек^{-1} – отклонения в пределах 11.0 – 18.2 МПа (см. рис. 4). Максимальное отклонение по всем – 25 МПа.

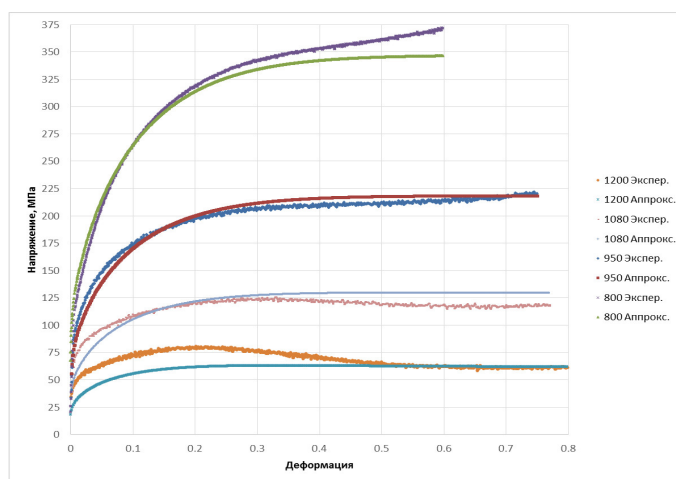


Рис. 3. Аппроксимация экспериментальных данных при скорости деформации 0.15 сек^{-1}

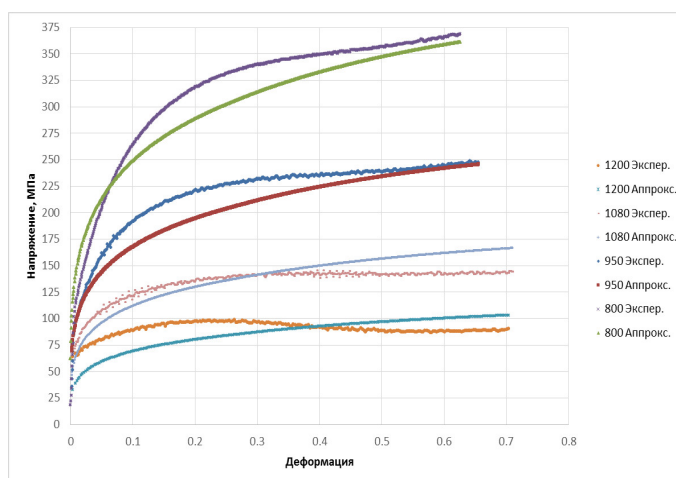


Рис. 4. Аппроксимация экспериментальных данных при скорости деформации 0.5 сек^{-1}

Результаты. В ходе проделанной работы были проведены исследования горячей деформации одноосным сжатием с помощью установки Gleeble для стали AISI304. Построена математическая модель зависимости напряжения от деформации, скорости деформации и температуры с учетом динамической рекристаллизации. Были вычислены константы материала, проведен сравнительный анализ экспериментальных и аппроксимированных данных. Полученные данные упрощают прогнозирование поведения материала при обработке, что является необходимым условием для нахождения оптимальных технологических режимов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чумаченко, Е. Н. Сверхпластичность: материалы, теория, технология / О. М. Смирнов, М. А. Цепин, Е. Н. Чумаченко – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ» – 2009. – 320 с.

[2] *Ахмедьянов, А. М.* Исследование деформационного поведения стали 20x13 в условиях горячей осадки / А. М. Ахмедьянов, С. М. Антонов, С. В. Рушиц // Вестник ЮУрГУ – 2012. – № 39. – С. 89–93.

[3] *Liu, Y.* Experimental Study on Constitutive Equation of AZ31 Magnesium Alloy Plastic Deformation at Elevated Temperature [Электронный ресурс] / Y. Liu, W. Shi // Transactions of „ICPNS’ 2007“ – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) – 2007. – Zhengzhou, China.

[4] *Maccagno, T. M.* Spreadsheet modeling of grain size evolution during rod rolling / T. M. Maccagno, J. J. Jonas, P. D. Hodgson // ISIJ International. – 1996. – № 6(36). – С. 720–728.

[5] *Kuziak, R.* Modeling of the microstructure and mechanical properties of steel during thermomechanical processing / R. Kuziak, Y. Chen, M. Glowacki, M. Pietrzyk // NIST Technical note 1393. – 1997 (November). – 80 с.

Пузино Юрий Алексеевич,

аспирант кафедры механики и математического моделирования, Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики», г. Москва

e-mail: puzino.y.a@gmail.com

Y. A. Puzino

THE DETERMINATION OF THE MODEL PARAMETERS DURING HOT DEFORMATION OF AISI304 STEEL BASED ON THE COMPRESSION TESTS RESULTS

National Research University «Higher School of Economics»

Abstract. The increasing of the efficiency of technological modes of steel products manufacturing requires simulation of metal forming during hot deformation. To obtain correct results, one should set the correct initial and boundary conditions, including the mechanical properties of materials, which represent the dependence of the stress-strain and strain rate at maintained temperature.

In the experiments one must reveal the mechanical properties and constants of the steels according to strain rate, predetermined temperature and chemical composition. So, the type of test is usually depends on the technology process, which simulation will be using the obtained information. One can identify four main types of tests used in the hot deformation: compression, tension, torsion and rupture tests. The simplest tests are considered as uniaxial compression or tension tests. The results of these tests are the curves of «flow stress – strain».

The present study describes an approximation method of test results for uniaxial compression of cylindrical samples made from AISI304 steel.

During this work a mathematical model of the «stress – strain» relation has been described. An algorithm that determines the necessary numerical coefficients for this model was developed. As a result, the equation of the material state, which is characterized by the stress relation on the strain, strain rate (0.15, 0.5, 1.5, 5 and 15 inverse seconds) and temperature (800, 950, 1080 and 1200 degree Celsius) was found. Also the approximation comparison with the experimental results were obtained.

Keywords: hot deformation, stress, approximation, mathematical simulation, aisi304, compression.

REFERENCES

- [1] *Chumachenko, E. N.* Superplasticity: materials, theory, technology / O. M. Smirnov, M. A. Cepin, E. N. Chumachenko – 2-nd edit., extended – M. : «Librokom» – 2009. – 320 p.
- [2] *Ahmedyanov, A. M.* Study of the deformation behavior of 20x13 steel in hot precipitation / A. M. Ahmedyanov, C. M. Antonov, S. V. Rushin // Bulletin of South Ural State University – 2012. – № 39. – P. 89–93.
- [3] *Liu, Y.* Experimental Study on Constitutive Equation of AZ31 Magnesium Alloy Plastic Deformation at Elevated Temperature [Электронный ресурс] / Y. Liu, W. Shi // Transactions of „ICPNS’ 2007“ – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) – 2007. – Zhengzhou, China.
- [4] *Maccagno, T. M.* Spreadsheet modeling of grain size evolution during rod rolling / T. M. Maccagno, J. J. Jonas, P. D. Hodgson // ISIJ International. – 1996. – № 6(36). – P. 720–728.
- [5] *Kuziak, R.* Modeling of the microstructure and mechanical properties of steel during thermomechanical processing / R. Kuziak, Y. Chen, M. Glowacki, M. Pietrzyk // NIST Technical note 1393. – 1997 (November). – 80 p.

Puzino, Yury Alekseevich

Postgraduated student, department of mechanics and mathematical simulation, National Research University «Higher School of Economics», Moscow

ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БИСИММЕТРИЧНОГО ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ КАК СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ПЛАСТИН

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет

Аннотация. Методом конечных элементов в «MSC Nastran» изучаются динамические характеристики стального тонкостенного горячекатаного двутавра. Предложена математическая модель, рассматривающая стержень как пространственную конструкцию, выполненную из сопряженных между собой пластин. Полученные численные результаты сопоставляются с известным теоретическим решением В. З. Власова и решением, учитывающим деформации сдвига в срединной поверхности. Обнаружено, что переход к пространственной конструкции стержня в ряде случаев сопровождается появлением новых частот. Увеличение номера профиля двутавра ведет к сгущению частотного спектра. Выявленные эффекты не отражаются в балочной теории тонкостенных стержней.

Ключевые слова: изгибно-крутильные колебания тонкостенного стержня, системы связанных пластин, пространственная конструкция, пластинчатые свойства.

УДК: 539.3:534.1

Введение. Тонкостенные стержни находят широкое применение во многих отраслях промышленности и строительства. Условия эксплуатации стержневых конструкций выдвигают высокие требования к прочностным характеристикам, что побуждает искать, либо новые технические решения [1], [2], [3], либо более точные математические модели и методики расчета [4], [5], [6], [7]. Проектируемые в современных пакетах конечно-элементного анализа колонны, балки, ригеля моделируются в виде стержневых элементов, которые рассчитываются с помощью балочных теорий, состоящих из различных гипотез. В настоящей работе предлагается иной подход к построению математической модели.

Математическая модель. В отличие от традиционной модели, будем рассматривать стержень, как не одноосную систему (балочная идеализация), а как пространственную конструкцию, выполненную из сопряженных между собой пластин [8] [9].

Численное исследование динамического поведения двутавра МКЭ в MSC «Nastran». Рассматриваются свободные колебания двутавра стального горячекатаного с параллельными гранями полок № 20Б1. При моделировании и разбиении стержня на конечные элементы (КЭ) использовались двумерные (плоские) КЭ прямоугольной формы – Plate, учитывающие все внутренние силовые факторы и геометрию. Элементы воспринимают тангенциальные, сдвиговые, поперечные и изгибные нагрузки. Результаты численного расчета новой математической модели и расчеты, выполненные с использованием теории В. З. Власова [10] и уточненной теории, учитывающей деформации сдвига [7], сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Частоты изгибно-крутильных колебаний тонкостенного стержня

Порядковый номер частоты в спектре	Новая мат. модель (система связанных пластин), $\omega_{\text{МКЭ}}$, Гц	По В. З.Власову [10], ω_i , Гц	С учетом деформаций сдвига [7], ω_i , Гц
1	39	43	42
2	60	62	61
3	132	163	162
4	149	176	166
5	199	205	196
6	267	363	366
7	353	444	415
8	382	515	589

Рис. 1 демонстрирует безразмерную частоту $\Omega_n = \omega_i / \omega_{\text{МКЭ}}$, где ω_i – частота колебаний стержня, определенная теоретически (по теории В. З. Власова или по теории, учитывающей деформации сдвига), $\omega_{\text{МКЭ}}$ – частота, определенная МКЭ, согласно новой математической модели. Синим цветом представлено новое решение, взятое за эталон. Красным цветом – решение по В. З. Власову. Зеленым – решение с учетом деформаций сдвига.

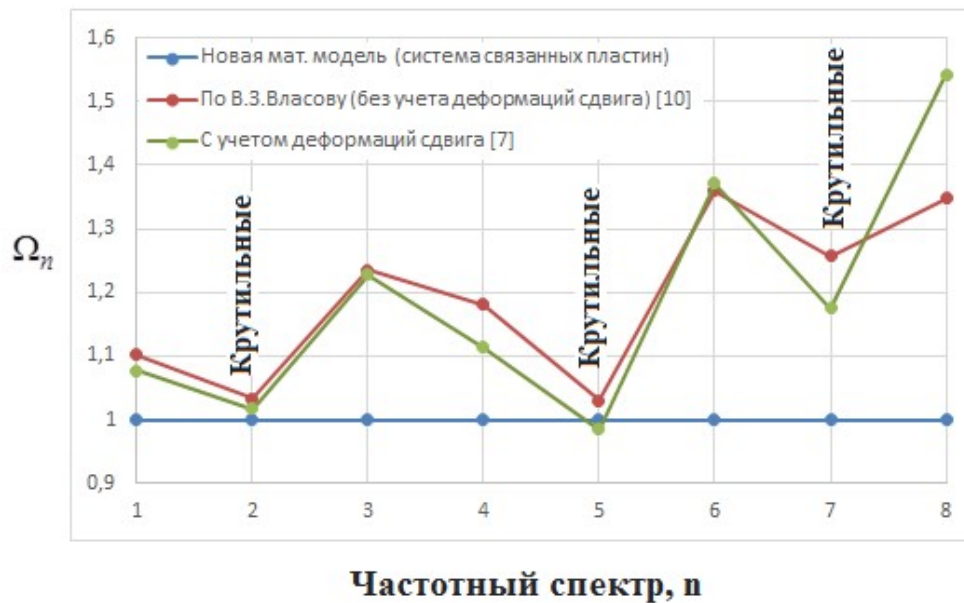


Рис. 1. Безразмерная частота изгибно-крутильных колебаний двутавра № 20Б1

Видно, что частоты колебаний двутавра, смоделированного системой связанных пластин, ниже, чем по теоретическим решениям, причем рассогласования в частотах изгибных колебаний значительны. Крутильные колебания при $n = 2, n = 5$ практически одного значения. И, как показано в работе [8], величина рассогласования зависит от геометрических параметров стержня.

На рис. 2 представлены частоты свободных колебаний двутавра: а) № 35Б1; б) № 80Б1. Обозначения сохранены.

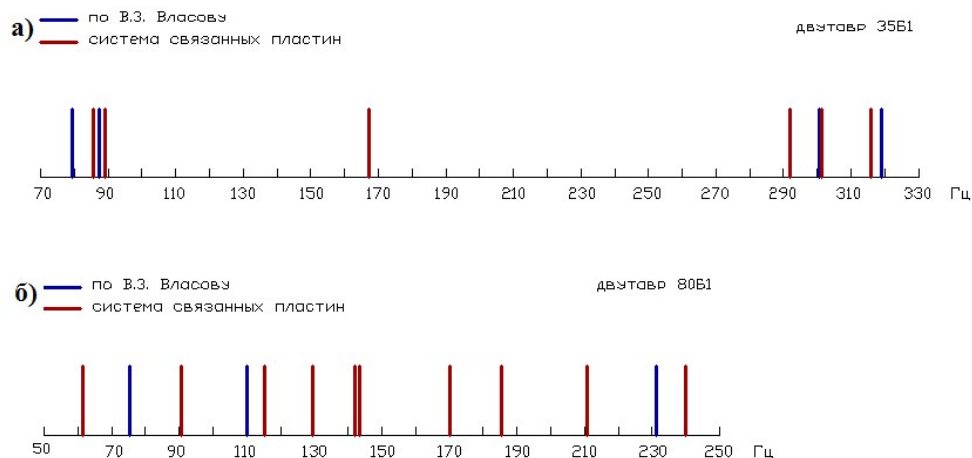


Рис. 2. Частотный спектр свободных колебаний двутавра: а) № 35Б1; б) № 80Б1

Выявлено, что в спектре присутствуют частоты, которые не отражаются в теоретическом решении [7], [10]. Причем увеличение номера двутавра, то есть относительное увеличение стенки и полок профиля, сгущает частотный спектр свободных колебаний стержня, смоделированного системой связанных пластин. Отмечается и близость частот (рис. 2б).

В условиях эксплуатации в конструкциях из тонкостенных стержневых элементов данное обстоятельство может привести к аварийным последствиям.

Основные выводы. Как показывают расчеты, балочная идеализация, используемая в конечно-элементном анализе современных расчетных программ, может привести к значительным погрешностям при определении собственных динамических характеристик тонкостенных стержней. Необходимо учитывать пространственную работу тонкостенного стержня, предложенную в настоящей работе и в [8], [9].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Серегин, С. В. Патент на изобретение № 2531980 РОСПАТЕНТ / С. В. Серегин // Предварительно – напряженная ферма оболочечного типа из легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК); заявл. № 2013134682/03 зарег. 23.07. 2013 г.
- [2] Серегин, С. В. Патент на полезную модель № 131028 РОСПАТЕНТ / С. В. Серегин // Вертикальная пластинчатая связь; заявл. № 2013112311 зарег. от 10.08.2013; приоритет от 19.03. 2013 г.
- [3] Лейзерович, Г. С. Патент на полезную модель № 137311 РОСПАТЕНТ / Г. С. Лейзерович, С. В. Серегин // Предварительно-напряженная ферма из легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК); заявл. № 2013134780 зарег. от 10.02.2014; приоритет от 23.07. 2013.

- [4] Тимошенко, С. П. Теория колебаний в инженерном деле / С. П. Тимошенко., 1932. – 220 с.
- [5] Корбут, Б. А. О динамической теории тонкостенных криволинейных стержней / Б. А. Корбут, Г. В. Лазарева, Г. В. Куча // Прикл. механика. – 1982. Т. XXIII – № 5. – С. 98–104. 117–120.
- [6] Бейлин, Е. А. Определение частот свободных изгибно-крутильных колебаний тонкостенных криволинейных стержней с учетом деформации вращения сечений / Е. А. Бейлин, Г. В. Лазарева, Г. В. Куча // Ленингр. инж. строит. инст. – Л., – 1985. 13 с. Деп. ВИНТИ, 20.08.85 № 6143-85 ДЕП.
- [7] Мещеряков, В. Б. Статика, динамика и устойчивость тонкостенных стержней с учетом деформаций сдвига / В. Б. Мещеряков. – М. : Изд-во АСВ, 2014. – 264 с.
- [8] Серегин, С. В. Влияние пластинчатых свойств тонкостенных стержней, смоделированных системой связанных пластин, на частоты и формы собственных колебаний / С. В. Серегин // Вестник МГСУ. – 2014. – № 3. – С. 92–98.
- [9] Серегин, С. В. О собственных крутильных колебаниях тонкостенных стержней открытого профиля / С. В. Серегин // Известия высших учебных заведений: Строительство. – 2014. – № 1. – С. 101–107.
- [10] Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни / В. З. Власов. – М. : Физматгиз, 1959. – 568 с.

Серегин Сергей Валерьевич,
старший преподаватель кафедры "Строительство и архитектура", Комсомольский-на-Амуре
государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре
e-mail: Seregin-komsHome@yandex.ru

S. V. Seregin

FLEXURAL-TORSIONAL VIBRATIONS OF THIN-WALLED BEAM, AS THE A SYSTEM OF CONNECTED PLATES

Komsomolsk-na-Amure State Technical University

Abstract. Finite element method in «MSC Nastran» study the dynamic characteristics of the hot-rolled thin-walled steel I-beam. A mathematical model that considers the rod as the spatial construction made of a of articulated plates are offer. The obtained numerical results are compared with the known theoretical solution V.Z. Vlasov and decisions considering shear deformation in the middle plane. It is found that the transition to the spatial design of the rod, in some cases, accompanied by the appearance of new frequencies. Increasing numbers I-beam profile leads to thicken the frequency spectrum. Identified effects are not reflected in the theory of thin-walled beam.

Keywords: flexural-torsional vibrations of thin-walled beam, as the a system of connected plates, spatial construction, plate properties.

REFERENCES

- [1] *Seregin, S. V.* The patent for invention № 2,531,980 ROSPATENT / S. V. Seregin // Previously – voltage farm shell type of light steel thin-walled structures; Appl. № 2013134682/03 eV. 23.07. 2013
- [2] *Seregin, S. V.* A utility model patent № 131028 ROSPATENT / S. V. Seregin // Vertical plate connection; Appl. № 2013112311 eV. from 08.10.2013; priority of 19.03. 2013
- [3] *Leizerovich, G. S.* A utility model patent № 137,311 ROSPATENT / G. S. Leizerovich, S. V. Seregin // Previously - Voltage farm of light steel thin-walled structures (LSTC); appl. № 2013134780 eV. from 02.10.2014; priority of 23.07. 2013.
- [4] *Tymoshenko, S. N.* Theory of oscillations in engineering / S. N. Tymoshenko, 1932. – 220 p.
- [5] *Korbut, B. A.* On the dynamical theory of thin-walled curved rods / B. A. Korbut, G. Lazarev, G. Bunch // Applied. mechanics. – 1982. – Vol. XXIII. – № 5. – S. 98–104.
- [6] *Beilin, E. A.* Determining the frequency of free flexural-torsional vibrations of thin-walled curved rods considering deformation rotation of sections / E. A. Beilin, G. Lazarev, G. Heap // Leningrad. Ing. builds. inst. L. – 1985. – 13 p. Dep. VINITI, 20.08.85 № 6143–85 Dep.
- [7] *Mescheryakov, V. B.* Statics, dynamics and stability of thin-walled bars considering shear deformation / V. B. Mesheryakov. – M. : Univ DIA, 2014. – 264 p.
- [8] *Seregin, S. V.* The influence properties of thin-walled plate, modeled a system of coupled plates on the frequency and forms of natural vibrations / S. V. Seregin // Bulletin MGSU. – 2014. – № 3. – S. 92–98.
- [9] *Seregin, S. V.* On free torsional vibrations of thin-walled rods open profile / S. V. Seregin // News of higher educational institutions: Building. – 2014. – № 1. – S. 101–107.
- [10] *Vlasov, V. W.* Thin-walled elastic rods / V. W. Vlasov. – M. : Fizmatgiz, 1959. – 568 p.

Seregin, Sergei Valerevich

Senior lecturer in "Building and Architecture", *Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur*

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматривается многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами анизотропии, сохраняющими значение предела текучести постоянным вдоль параллельных прямых. Разработан алгоритм определения предельного напряженного состояния для произвольного числа слоев. В работе [2] исследовано предельное состояние слоистых круговых цилиндров. Понятие трансляционной анизотропии рассматривалась в работах [3]–[7]. В работе [8] исследовано упругопластическое состояние двухслойной трансляционно-анизотропной трубы. Предельное состояние слоистой трубы при наличии трансляционной анизотропии исследовалось также в [11]. В [10] авторами изучено упругопластическое состояние трубы, предел текучести которой сохраняет постоянное значение вдоль параллельных прямых. Случай, когда предел текучести сохраняет постоянное значение вдоль концентрических эллипсов, рассмотрен в [12].

Ключевые слова: напряжение, пластичность, анизотропия по Мизесу – Хиллу, труба, слой.

УДК: 539.375

Рассмотрим многослойную толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления p (рис. 1).

Обозначим через r_1 , r_2 внутренний и внешний радиусы 1-го слоя, через r_2 , r_3 – внутренний и внешний радиусы 2-го слоя, через r_n , r_{n+1} – внутренний и внешний радиусы n -го слоя.

Условие предельного состояния для n -го слоя примем в виде [2]

$$A_n (\sigma_{xn} - \sigma_{yn})^2 + 4B_n \tau_{xyn}^2 = 4k_n^2, \quad A_n, B_n - const, \quad n = 1, 2, \dots, t,$$
$$k_n = k_0 + \delta (c_n x + d_n y), \quad (1)$$

где σ_{xn} , σ_{yn} , τ_{xyn} – компоненты напряжения в n -ом слое в декартовой системе координат x , y ; $k_0 - const$.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x , y и напряжениями в полярной системе координат ρ , θ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Поступила 10.11.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-01-97029) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

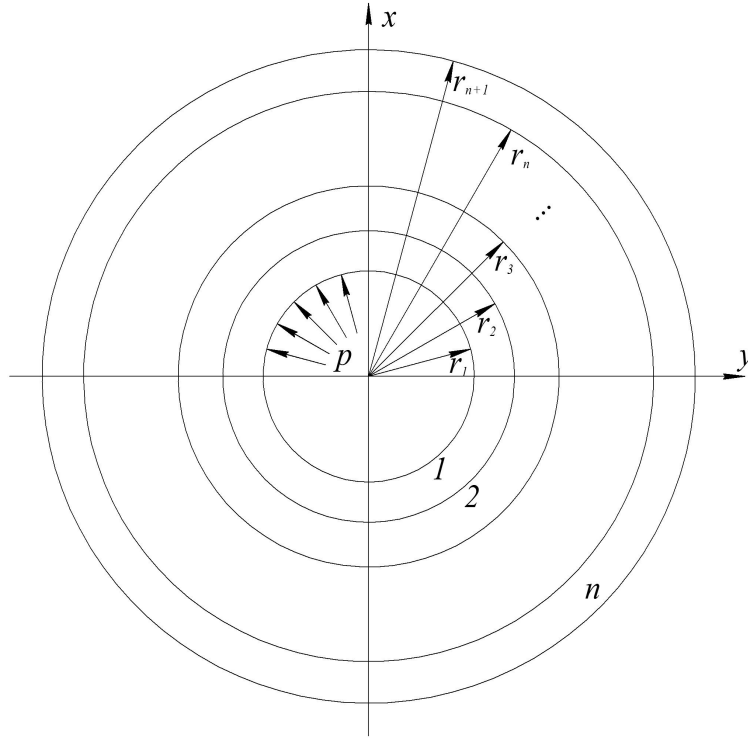


Рис. 1. Многослойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам: все компоненты напряжения отнесем к величине предела текучести k_0 и обозначим

$$\frac{k_n}{k_0} = \chi_n, \quad \frac{p}{k_0} = q; \quad (3)$$

все величины, имеющие размерность длины отнесем к некоторой характерной величине r_0 и обозначим

$$\frac{r_n}{r_0} = \alpha_n, \quad \frac{r}{r_0} = \rho. \quad (4)$$

Согласно (1)–(4) запишем условие пластичности (1) в виде

$$A_n [(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \cos 2\theta - 2\tau_{\rho\theta n} \sin 2\theta]^2 + B_n [(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \sin 2\theta + 2\tau_{\rho\theta n} \cos 2\theta]^2 = 4\chi_n^2 \quad (5)$$

или

$$(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n})^2 [A_n \cos^2 2\theta + B_n \sin^2 2\theta] + 4\tau_{\rho\theta}^2 [A_n \sin^2 2\theta + B_n \cos^2 2\theta] - 2(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \tau_{\rho\theta n} (A_n - B_n) \sin 4\theta = 4(1 + \delta\rho(c_n \cos \theta + d_n \sin \theta))^2. \quad (6)$$

Положим, что искомое решение во всех n слоях пластической области зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде

$$\sigma_{ijn} = \sigma_{ijn}^{(0)} + \delta\sigma_{ijn}^{(1)}, \quad A_n = 1 + \delta a_n, \quad B_n = 1 + \delta b_n. \quad (7)$$

Положим, что нулевое, исходное напряженное состояние является осесимметричным

$$\tau_{\rho\theta n}^{(0)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Компоненты напряжений в нулевом приближении в первом слое трубы находятся аналогично [1].

Из условия сопряжения решений

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)} = \sigma_{\rho 2}^{(0)} \text{ при } \rho = \alpha_2 \quad (9)$$

имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(0)} &= -q + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} + 2 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\ \sigma_{\theta 2}^{(0)} &= -q + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_2} \right) + 2 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично, используя условие сопряжения компонент напряжений на границе n -го слоя трубы

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \sigma_{\rho n-1}^{(0)p}, \quad \tau_{\rho \theta n}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha_n} = \tau_{\rho \theta n-1}^{(0)p}, \quad (11)$$

можно найти предельное состояние в n -ом слое в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(0)p} &= -q + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha_n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \\ \sigma_{\theta n}^{(0)p} &= -q + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Линеаризуя соотношения (6), получим

$$\sigma_{\theta n}^{(1)} - \sigma_{\rho n}^{(1)} = 2\rho [c_n \cos \theta + d_n \sin \theta] + \left[\frac{a_n + b_n}{2} + \frac{a_n - b_n}{2} \cos 4\theta \right]. \quad (13)$$

Уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho n}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho \theta n}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho n}^{(1)} - \sigma_{\theta n}^{(1)}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho \theta n}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta n}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho \theta n}^{(1)}}{\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

удовлетворим, полагая

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(1)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_{\theta n}^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho \theta n}^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13), (15) найдем

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \theta^2} = 2\rho^3 (c_n \cos \theta + d_n \sin \theta) + \rho^2 (G_n + H_n \cos 4\theta), \quad (16)$$

где

$$G_n = \left(\frac{r_n + b_n}{2} \right), \quad H_n = \left(\frac{r_n - b_n}{2} \right). \quad (17)$$

Решение уравнения (16) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\Phi_n^{(1)} = \Phi_n^{(1)} \text{ одн} + \Phi_n^{(1)} \text{ частн}. \quad (18)$$

Однородное уравнение (16) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (19)$$

Полагая в общем виде

$$\Phi_n^{(1)} \text{ одн} = R_1 \cos(m\theta) + R_2 \sin(m\theta) = R_n \cos(m\theta + \theta_0), \quad (20)$$

где

$$\cos(\theta_0) = \frac{R_1}{R_n}, \sin(\theta_0) = \frac{R_2}{R_n}, R_n = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Следуя [1], имеем

$$R_n = C_{00}^{(n)} + C_{01}^{(n)} \text{ при } m = 0, \quad (21)$$

$$R_n = \rho \left(C_{11}^{(n)} + C_{12}^{(n)} \ln \rho \right) \text{ при } m = 1, \quad (22)$$

$$R_n = \rho \left[C_{m1}^{(n)} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + C_{m2}^{(n)} \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \text{ при } m \geq 2. \quad (23)$$

Сопоставляя с правой частью (16), имеем сумму R_n при $m = 0, 1, 4$:

$$R_n = \left(C_{00}^{(n)} + C_{01}^{(n)} \right) + \rho \left(C_{11}^{(n)} + C_{12}^{(n)} \ln \rho \right) + \rho \left[C_{m1}^{(n)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{m2}^{(n)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right]. \quad (24)$$

Частное решение неоднородного уравнения (16) имеет вид

$$\Phi_n' \text{ частн} = \frac{G_n}{2} (\rho^2 \ln \rho - \rho) + \frac{H_n}{16} \rho^2 \cos 4\theta + \frac{\rho^3}{2} (c_n \cos \theta + d_n \sin \theta). \quad (25)$$

Решая (15), (18), (20), (24), (25), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(1)} &= C_{00}^{(n)} + \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\ &\frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1}^{(n)} \left[(1 - m^2) \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) - (\sqrt{m^2 - 1}) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] + \right. \\ &\left. + C_{m2}^{(n)} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + (1 - m^2) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\ &+ \rho (c_n \cos \theta + d_n \sin \theta) + G_n \ln \rho - \frac{7}{8} H_n \cos 4\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho n}^{(1)} &= C_{00}^{(n)} + \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\ &\frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1}^{(n)} \left[(1 - m^2) \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) - (\sqrt{m^2 - 1}) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] + \right. \\ &\left. + C_{m2}^{(n)} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + (1 - m^2) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\ &+ 3\rho (c_n \cos \theta + d_n \sin \theta) + G_n (1 + \ln \rho) + \frac{1}{8} H_n \cos 4\theta, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho \theta n}^{(1)} &= \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) - \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} (m\sqrt{m^2 - 1}) \times \\ &\times \left[-C_{m1}^{(n)} \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + C_{m2}^{(n)} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \sin(m\theta + \theta_0) + \\ &+ \rho (c_n \cos \theta - d_n \sin \theta) + \frac{H_n}{4} \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (28)$$

где $C_{00}^{(n)}$, $C_{m1}^{(n)}$, $C_{m2}^{(n)}$ – const при $m \geq 1$.

Граничные условия на внутреннем контуре трубы согласно [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(1)p} |_{\rho=\alpha_1} &= 0, \\ \tau_{\rho \theta_1}^{(1)p} |_{\rho=\alpha_1} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (26), (28), (29) имеем

$$C_{00}^{(1)} + \frac{1}{\alpha_1} \left\{ C_{41}^{(1)} [-3 \cos \omega_1 - \sqrt{3} \sin \omega_1] + C_{42}^{(1)} [\sqrt{3} \cos \omega_1 - 3 \sin \omega_1] \right\} \cos 4\theta + \frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos \theta + \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin \theta = -\alpha_1 (c_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta) - G_1 \ln \alpha_1 + \frac{7}{8} H_1 \cos 4\theta, \quad (30)$$

$$\frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin \theta - \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos \theta + \frac{4\sqrt{3}}{\alpha_1} \left[-C_{41}^{(1)} \sin \omega_1 + C_{42}^{(1)} \cos \omega_1 \right] \sin 4\theta = \alpha_1 (d_1 \cos \theta - c_1 \sin \theta) - \frac{1}{4} H_1 \sin 4\theta, \quad (31)$$

где $\omega_1 = \sqrt{3} \ln \alpha_1$, в последующем $\omega_n = \sqrt{3} \ln \alpha_n$.

Из (17), (30) получим

$$C_{00}^{(1)} = -G_1 \ln \alpha_1 = -\frac{r_1 + b_1}{2} \ln \alpha_1. \quad (32)$$

Постоянные $C_{41}^{(1)}$, $C_{42}^{(1)}$ найдем из системы уравнений

$$\begin{aligned} C_{41}^{(1)} \cdot M(\alpha_1) + C_{42}^{(1)} \cdot N(\alpha_1) &= \frac{7\alpha_1}{8} H_1, \\ C_{41}^{(1)} (-\sin \omega_1) + C_{42}^{(1)} \cos \omega_1 &= \frac{-\sqrt{3}\alpha_1}{48} H_1, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} M(\alpha_n) &= -3 \cos \omega_n - \sqrt{3} \sin \omega_n, \\ N(\alpha_n) &= \sqrt{3} \cos \omega_n - 3 \sin \omega_n. \end{aligned} \quad (34)$$

Имеет место

$$C_{41}^{(1)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1}, \quad C_{42}^{(1)} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_1}, \quad (35)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 \cos \omega_1 - \sqrt{3} \sin \omega_1 & \sqrt{3} \cos \omega_1 - 3 \sin \omega_1 \\ -\sin \omega_1 & \cos \omega_1 \end{vmatrix} = -3. \quad (36)$$

Заметим, что по аналогии с (36) справедливо $\Delta_n = -3$.

$$\Delta_{11} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 (13 \cos \omega_1 + \sqrt{3} \sin \omega_1), \quad \Delta_{21} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 (13 \sin \omega_1 - \sqrt{3} \cos \omega_1). \quad (37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_{41}^{(1)} &= -\frac{\alpha_1}{48} H_1 (13 \cos \omega_1 + \sqrt{3} \sin \omega_1), \\ C_{42}^{(1)} &= -\frac{\alpha_1}{48} H_1 (13 \sin \omega_1 - \sqrt{3} \cos \omega_1). \end{aligned} \quad (38)$$

Далее определим $C_{11}^{(1)}$, $\bar{C}_{11}^{(1)}$. Для этого составим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos \theta &= -c_1 \alpha_1 \cos \theta, \\ \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin \theta &= -d_1 \alpha_1 \sin \theta. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (39) получим

$$\begin{aligned} C_{11}^{(1)} &= -c_1 \alpha_1^2, \\ \bar{C}_{11}^{(1)} &= -d_1 \alpha_1^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Согласно (26), (27), (28), (34), (35), (36), (38), (40), компоненты напряженного состояния $\sigma_{\rho n}^{(1)}$, $\sigma_{\theta n}^{(1)}$, $\tau_{\rho \theta n}^{(1)}$ в первом слое определены, компоненты напряженного состояния $\sigma_{ijn}^{(0)}$ определены согласно (12), суммарное напряженное состояние определяется согласно (7).

Аналогично можно найти напряженное состояние во втором и последующих слоях.

Из условий сопряжения

$$\sigma_{\rho 2}^{(1)} = \sigma_{\rho 1}^{(1)}, \tau_{\rho \theta 2}^{(1)} = \tau_{\rho \theta 1}^{(1)} \text{ при } \rho = \alpha_2. \quad (41)$$

Согласно (26), (27) определим

$$C_{00}^{(2)} + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ C_{41}^{(1)} [-3 \cos \omega_2 - \sqrt{3} \sin \omega_2] + C_{42}^{(2)} [\sqrt{3} \cos \omega_2 - 3 \sin \omega_2] \right\} \cos 4\theta + \frac{C_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \cos \theta + \frac{\bar{C}_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \sin \theta = \quad (42)$$

$$= \sigma_{\rho 1}^{(1)}(\alpha_2) - \alpha_2 (c_2 \cos \theta + d_2 \sin \theta) - G_2 \ln \alpha_2 + \frac{7}{8} H_2 \cos 4\theta, \\ \frac{C_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \sin \theta - \frac{\bar{C}_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \cos \theta - \frac{4\sqrt{3}}{\alpha_2} \left[-C_{41}^{(2)} \sin \omega_1 + C_{42}^{(2)} \cos \omega_1 \right] \sin 4\theta = \quad (43)$$

$$= \tau_{\rho \theta}^{(1)}(\alpha_2) + \alpha_2 (d_2 \cos \theta - c_2 \sin \theta) - \frac{1}{4} H_2 \sin 4\theta.$$

Из (26), (42) получаем

$$C_{00}^{(2)} = -G_2 \ln \alpha_2 - G_1 \ln \alpha_1. \quad (44)$$

Из (42),(43),(16)–(40) будем иметь

$$\frac{1}{\alpha_2} \left[C_{41}^{(2)} M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)} N(\alpha_2) \right] = \Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8} (H_2 + H_1), \\ \frac{4\sqrt{3}}{\alpha_2} \left[-C_{41}^{(2)} \sin \omega_2 + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2 \right] = \Sigma_{\rho \theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4} (H_2 + H_1). \quad (45)$$

где

$$\Sigma_{\rho 1}(\rho) = \frac{1}{\rho} \left(C_{41}^{(1)} [-3 \cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega] + C_{42}^{(1)} [\sqrt{3} \cos \omega - 3 \sin \omega] \right), \\ \Sigma_{\rho \theta 1}(\rho) = \frac{4\sqrt{3}}{\rho} \left[-C_{41}^{(1)} \sin \omega + C_{42}^{(1)} \cos \omega \right], \omega = \sqrt{3} \ln \rho. \quad (46)$$

Систему уравнений (46) представим в виде

$$C_{41}^{(2)} M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)} N(\alpha_2) = P_2, \\ C_{41}^{(2)} (-\sin \omega_2) + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2 = Q_2, \quad (47)$$

где

$$P_2 = \alpha_2 \left[\Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8} (H_2 + H_1) \right], \\ Q_2 = \frac{\alpha_2 \sqrt{3}}{12} \left[\Sigma_{\rho \theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4} (H_2 + H_1) \right]. \quad (48)$$

Из (35), (48) вытекает

$$C_{41}^{(2)} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_2} = -\frac{1}{3} (P_2 \cos \omega - Q_2 \cdot N(\alpha_2)), \\ C_{41}^{(2)} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = -\frac{1}{3} (P_2 \sin \omega + Q_2 \cdot M(\alpha_2)), \\ \Delta_2 = \Delta_1 = -3. \quad (49)$$

Справедливо

$$\frac{C_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \cos \theta = \frac{C_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \cos \theta - c_2 \alpha_2 \cos \theta, \\ \frac{\bar{C}_{11}^{(2)}}{\alpha_2} \sin \theta = \frac{\bar{C}_{11}^{(1)}}{\alpha_1} \sin \theta - d_2 \alpha_2 \sin \theta. \quad (50)$$

Из (50) получаем

$$C_{11}^{(2)} = -c_1 \alpha_1 \alpha_2 - c_2 \alpha_2^2 = -\alpha_2 (c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2), \\ \bar{C}_{11}^{(2)} = -d_1 \alpha_1 \alpha_2 - d_2 \alpha_2^2 = -\alpha_2 (d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2). \quad (51)$$

Из (17), (26)–(28), (43)–(51) компоненты напряженного состояния $\sigma_{\rho 2}^{(1)}, \sigma_{\theta 2}^{(1)}, \tau_{\rho \theta 2}^{(1)}$ определены.

С помощью метода математической индукции можно определить компоненты напряжений $\sigma_{\rho n}^{(1)}, \sigma_{\theta n}^{(1)}, \tau_{\rho\theta n}^{(1)}$ при условии, что компоненты $\sigma_{\rho n-1}^{(1)}, \sigma_{\theta n-1}^{(1)}, \tau_{\rho\theta n-1}^{(1)}$ определены.

Аналогично (44) получим

$$C_{00}^{(n)} = -G_n \ln \alpha_n - G_{n-1} \ln \alpha_{n-1} - G_{n-2} \ln \alpha_{n-2} - \dots - G_1 \ln \alpha_1 = - \sum_{i=1}^n G_i \ln \alpha_i. \quad (52)$$

Условие сопряжения решений на границе n -го слоя трубы

$$\sigma_{\rho n}^{(I)} = \sigma_{\rho n-1}^{(I)}, \tau_{\rho n}^{(I)} = \tau_{\rho n-1}^{(I)} \text{ при } \rho = \alpha_n. \quad (53)$$

Из (26), (28), аналогично (49), будем иметь

$$\begin{aligned} C_{41}^{(n)} M(\alpha_n) + C_{42}^{(n)} N(\alpha_n) &= P_{n-1}, \\ C_{41}^{(n)} (-\sin \omega_n) + C_{42}^{(n)} \cos \omega_n &= Q_{n-1}, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} P_n &= \alpha_n \left[\sum_{\rho n}(\alpha_n) + \frac{7}{8} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right], \\ Q_n &= \frac{\alpha_n \sqrt{3}}{12} \left[\sum_{\rho\theta n}(\alpha_n) - \frac{1}{4} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right], \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\rho n}(\rho) &= \frac{1}{\rho} \left(C_{41}^{(n)} [-3 \cos \omega_n - \sqrt{3} \sin \omega_n] + C_{42}^{(n)} [\sqrt{3} \cos \omega_n - 3 \sin \omega_n] \right), \\ \sum_{\rho\theta n}(\rho) &= \frac{4\sqrt{3}}{\rho} \left[-C_{41}^{(n)} \sin \omega_n + C_{42}^{(n)} \cos \omega_n \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

По аналогии с (49) получим

$$\begin{aligned} C_{41}^{(n)} &= \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{3} (P_{n-1} \cos \omega_{n-1} - Q_{n-1} N(\alpha_n)), \\ C_{42}^{(n)} &= \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{3} (P_{n-1} \sin \omega_{n-1} - Q_{n-1} M(\alpha_n)), \\ \Delta_1 &= \Delta_2 = \dots = \Delta_n = -3, \end{aligned} \quad (57)$$

где P_n, Q_n определены при известных значениях $\sigma_{ijn-1}^{(1)}$.

Аналогично (51)

$$\begin{aligned} C_{11}^{(n)} &= -\alpha_n \left(\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \right), \\ \bar{C}_{11}^{(n)} &= -\alpha_n \left(\sum_{i=1}^n d_i \alpha_i \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Компоненты напряжений $\sigma_{\rho n}^{(1)}, \sigma_{\theta n}^{(1)}, \tau_{\rho\theta n}^{(1)}$ определяются согласно (21)–(58).

Таким образом, из (26)–(50) следует, что свойство анизотропии последовательно оказывают влияние на напряженное состояние последующих слоев: напряженное состояние в “ n -ом” слое будет зависеть от свойств анизотропии всех предыдущих $n-1$ слоев.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Ивлев, Д. А.* О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д. А. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 57–63.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (10). – С. 60–62.

[4] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (10). – С. 63–65.

[5] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (10). – С. 66–69.

[6] *Ивлев, Д. Д.* Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии / Д. Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (8). – С. 101–106.

[7] *Ивлев, Д. Д.* К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (8). – С. 107–110.

[8] *Кержаев, А. П.* Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии / А. П. Кержаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (15). – С. 71–81.

[9] *Максимова, Л. А.* Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л. А. Максимова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 91–95.

[10] *Никитин, А. В.* Предельное состояние слоистой трансляционно-анизотропной трубы / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 16–21 июня 2014 г.): в 2 ч. Ч. 2. – 2014. – С. 101–104.

[11] *Никитин, А. В.* Упругопластическое состояние трансляционно – анизотропной линейно – неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – С. 148–155.

[12] *Никитин, А. В.* Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления при трансляционной анизотропии / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – С. 137–147.

[13] *Тихонов, С. В.* О двусосном растяжении плоскости из упругопластического неоднородного материала / С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 161–168.

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ligalas5@mail.ru

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

A. V. Nikitin, B. G. Mironov

LIMIT CONDITION OF A MULTILAYERED ANISOTROPIC THICK-WALLED PIPE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The multilayered thick-walled pipe which is under the influence of internal pressure is considered. It is supposed that each layer possesses the properties of anisotropy keeping value of a limit of fluidity to constants along parallel straight lines. The algorithm of definition of a limit tension is developed for any number of layers. In work [2] the limit condition of layered circular cylinders is investigated. Concept transmitting anisotropy was considered in works [3]–[7]. In work [8] the elasto-plastic condition of a two-layer transmitting and anisotropic pipe is investigated. The limit condition of a layered pipe with transmitting anisotropy was investigated also in [11]. In [10] authors it is studied elasto-plastic a condition of a pipe which limit of fluidity keeps constant value along parallel straight lines. The case when the limit of fluidity keeps constant value along concentric ellipses, is considered in [12].

Keywords: stress, ductility, translational anisotropy, pipe layer.

REFERENCES

- [1] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [2] *Ivlev, D. A.* The limit state of layered circular cylinders of an anisotropic material under internal pressure / D. A. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. - № 2 (66). – P. 57–63.
- [3] *Ivlev, D. D.* About dissipative function in the theory of transmitting ideally plastic anisotropy at torsion / D. D. Ivlev, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (10). – P. 60–62.
- [4] *Ivlev, D. D.* About dissipative function in the theory of transmitting ideally plastic anisotropy in case of flat deformation / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (10). – P. 63–65.
- [5] *Ivlev, D. D.* About dissipative function in the theory of transmitting ideally plastic anisotropy at generalization of a condition of plasticity of Mises / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (10). – P. 66–69.
- [6] *Ivlev, D. D.* Questions of the theory of ideally plasticity transmitting anisotropy / D. D. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 1 (8). – P. 101–106.
- [7] *Ivlev, D. D.* To the theory of ideal transmitting plastic anisotropy / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 1 (8). – P. 107–110.
- [8] *Kerzhayev, A. P.* Is elastic a plastic state thick-walled tube under the action of internal pressure at the translational anisotropy / A. P. Kerzhayev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 2 (15). – P. 71–81.
- [9] *Maksimova, L. A.* About an elasto-plastic condition of the non-uniform pipe which is under the influence of internal pressure / L. A. Maksimova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – № 2. – P. 91–95.

[10] *Nikitin, A. V.* Limit condition of a layered transmitting and anisotropic pipe / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Materials VIII of the All-Russian conference on mechanics of a deformable solid body (Cheboksary, on June 16–21, 2014): в 2 р. Part 2. – 2014. – P. 101–104.

[11] *Nikitin, A. V.* Elasto-plastic state translyatsionno - anisotropic linearly – the non-uniform pipe which is under the influence of internal pressure / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – № 4 (80). – P. 148–155.

[12] *Nikitin, A. V.* Influence of nonlinear inhomogeneity of material on an elasto-plastic condition of a thick-walled pipe under the influence of internal pressure at transmitting anisotropy / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – № 4 (80). – P. 137–147.

[13] *Tikhonov, S. V.* About biaxial stretching of the plane from elasto-plastic non-uniform material / S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – № 2. – P. 161–168.

Nikitin, Andrey Vitalevich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

А. И. Шашкин, И. И. Переяславская

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. В статье рассматривается задача о нахождении напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра, находящегося под действием всестороннего осесимметричного давления внешней среды и силы тяжести. Решение проводится в перемещениях, которые представляются быстрыми разложениями, что позволяет в дальнейшем от решения системы дифференциальных уравнений переходить к решению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений.

Ключевые слова: упругий цилиндр, напряженно-деформированное состояние, учет силы тяжести, граничная функция, быстрые разложения.

УДК: 539.371

Постановка задачи. Рассматривается упругий цилиндр радиуса $r = a$, лежащий на жестком основании. На внешнем контуре приложена распределенная нагрузка интенсивностью p . Вес тела приложен в центре инерции. Решение задачи о нахождении напряженно-деформированного состояния цилиндра может быть выполнено в рамках плоской деформации.

Запишем основные соотношения в цилиндрической системе координат. Используя закон Гука и соотношения Коши, получим уравнения равновесия в форме Ламе:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} - \frac{(\lambda + 3\mu)}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \\ + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} U = \gamma \sin \theta, \\ \mu \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} V + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \lambda \right) \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + \\ + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{(\lambda + \mu)}{r^2} + 1 \right) \frac{\partial U}{\partial \theta} = \gamma \cos \theta, \end{cases} \quad (1)$$

где γ – объемная сила [1], $U(r, \theta)$, $V(r, \theta)$ – компоненты радиального и окружного перемещений.

Центр цилиндра является особой точкой, поэтому, исходя из физических соображений, будем считать, что перемещения и напряжения являются ограниченными функциями [2]:

$$|\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, U, V| < \infty, U(r, \theta), V(r, \theta) \in L_2^4(\Omega), \Omega = (0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Обозначим границу области определения, равную 2π через θ_0 . Тогда

$$\begin{aligned} \theta = 0 : \quad \sigma_\theta(r, \theta) &= G_1(r), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) = G_2(r), \\ \theta = \theta_0 : \quad \sigma_\theta(r, \theta) &= G_3(r), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) = G_4(r). \end{aligned} \quad (2)$$

Считаем, что $G_i(r)$, $i = 1..4$ удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности. Помимо этого, можно считать, что в центре цилиндра компонента перемещений $V(r, \theta) = 0$, а $U(r, \theta)$ достигает экстремума.

На внешней границе $r = a$ заданы нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_r(r, \theta) = F_1(\theta), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) = F_2(\theta). \quad (3)$$

Таким образом, приходим к краевой задаче (1) со смешанными граничными условиями (2) и (3).

Поиск решения с помощью метода быстрых разложений. Используем разложения по углу θ . Компоненты перемещений представим в следующем виде [3]:

$$U = M_2 + \sum_{m=1}^N U_m(r) \sin\left(m\pi \frac{\theta}{\theta_0}\right), \quad V = M_3 + v_0(r) + \sum_{m=1}^N V_m(r) \cos\left(m\pi \frac{\theta}{\theta_0}\right), \quad (4)$$

где N — число рассматриваемых членов в рядах Фурье, M_2 и M_3 — граничные функции, которые имеют вид

$$\begin{aligned} M_2 &= A_1(r) \left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + A_2(r) \frac{\theta}{\theta_0} + A_3(r) \times \\ &\times \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + A_4(r) \left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_3 &= B_1(r) \left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0}\right) + B_2(r) \frac{\theta^2}{2\theta_0} + B_3(r) \times \\ &\times \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{6}\right) + B_4(r) \left(\frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{12}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1(r) &= U(r, 0), \quad A_2(r) = U(r, \theta_0), \quad A_3(r) = U_{\theta\theta}(r, 0), \quad A_4(r) = U_{\theta\theta}(r, \theta_0), \\ B_1(r) &= V(r, 0), \quad B_2(r) = V(r, \theta_0), \quad B_3(r) = V_{\theta\theta}(r, 0), \quad B_4(r) = V_{\theta\theta}(r, \theta_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Данное представление приводит к наиболее удобной вычислительной схеме, т. к. в первом уравнении системы производная от функции U по θ — вторая, а от V по θ — первая, во втором уравнении наоборот — от V по θ — вторая, а от U по θ — первая. Тогда, при использовании для U синус-разложения и косинус-разложения для V , мы получим старшие производные от этих разложений по синусам в первом уравнении и по косинусам — во втором. Метод быстрых разложений, использование граничных функций, а так же быстрая сходимость рядов Фурье подробно рассмотрены в работах [4], [5], [6], [7].

После подстановки (4) и (5) в уравнения равновесия (1) мы получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial^2 A_1(r)}{\partial r^2} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + \frac{\partial^2 A_2(r)}{\partial r^2} \frac{\theta}{\theta_0} + \frac{\partial^2 A_3(r)}{\partial r^2} \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + \right. \\
& + \frac{\partial^2 A_4(r)}{\partial r^2} \left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 U_m(r)}{\partial r^2} \sin(m\pi \frac{\theta}{\theta_0}) \left. \right] + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \left[\frac{\partial B_1(r)}{\partial r} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + \frac{\partial B_2(r)}{\partial r} \frac{\theta}{\theta_0} + \frac{\partial B_3(r)}{\partial r} \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + \frac{\partial B_4(r)}{\partial r} \left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right) + \right. \\
& + \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(r)}{\partial r} \frac{m\pi}{\theta_0} \sin(m\pi \frac{\theta}{\theta_0}) \left. \right] - \frac{(\lambda + 3\mu)}{r^2} [B_1(r) \left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + B_2(r) \frac{\theta}{\theta_0} + \\
& + B_3(r) \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + B_4(r) \left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right) - \sum_{m=1}^N V_m(r) \frac{m\pi}{\theta_0} \sin(m\pi \frac{\theta}{\theta_0})] + \\
& + \frac{\mu}{r^2} [A_3(r) \left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + A_4(r) \frac{\theta}{\theta_0} - \sum_{m=1}^N U_m(r) \left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)^2 \sin(m\pi \frac{\theta}{\theta_0})] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \times \\
& \times \left[\frac{\partial A_1(r)}{\partial r} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + \frac{\partial A_2(r)}{\partial r} \frac{\theta}{\theta_0} + \frac{\partial A_3(r)}{\partial r} \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + \frac{\partial A_4(r)}{\partial r} \left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^N \frac{\partial U_m(r)}{\partial r} \sin(m\pi \frac{\theta}{\theta_0}) \right] - \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [A_1(r) \left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + A_2(r) \frac{\theta}{\theta_0} + \\
& + A_3(r) \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + A_4(r) \left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^N U_m(r) \sin(m\pi \frac{\theta}{\theta_0})] - \\
& - \gamma \sin \theta = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \left[\frac{\partial^2 B_1(r)}{\partial r^2} \left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0}\right) + \frac{\partial^2 B_2(r)}{\partial r^2} \frac{\theta^2}{2\theta_0} + \frac{\partial^2 B_3(r)}{\partial r^2} \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{6}\right) + \frac{\partial^2 B_4(r)}{\partial r^2} \times \right. \\
& \times \left(\frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{12}\right) + \frac{\partial^2 v_0(r)}{\partial r^2} + \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 V_m(r)}{\partial r^2} \cos(m\pi \frac{\theta}{\theta_0}) + \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial B_1(r)}{\partial r} \left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0}\right) + \right. \\
& + \frac{\partial B_2(r)}{\partial r} \frac{\theta^2}{2\theta_0} + \frac{\partial B_3(r)}{\partial r} \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{6}\right) + \frac{\partial B_4(r)}{\partial r} \left(\frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{12}\right) + \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} + \\
& + \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(r)}{\partial r} \cos(m\pi \frac{\theta}{\theta_0}) \left. \right] - \frac{\mu}{r^2} [B_1(r) \left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0}\right) + B_2(r) \frac{\theta^2}{2\theta_0} + B_3(r) \left(\frac{\theta^3}{6} - \right. \\
& - \frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{6}\right) + B_4(r) \left(\frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{12}\right) + v_0(r) + \sum_{m=1}^N V_m(r) \cos(m\pi \frac{\theta}{\theta_0})] + \\
& + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \lambda\right) \left[-\frac{\partial A_1(r)}{\partial r} \frac{1}{\theta_0} + \frac{\partial A_2(r)}{\partial r} \frac{1}{\theta_0} + \frac{\partial A_3(r)}{\partial r} \left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{3}\right) + \frac{\partial A_4(r)}{\partial r} \times \right. \\
& \times \left(\frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^N \frac{\partial U_m(r)}{\partial r} \frac{m\pi}{\theta_0} \cos(m\pi \frac{\theta}{\theta_0}) \left. \right] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [-B_1(r) \frac{1}{\theta_0} + B_2(r) \frac{1}{\theta_0} + \\
& + B_3(r) \left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{3}\right) + B_4(r) \left(\frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{6}\right) - \sum_{m=1}^N V_m(r) \left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)^2 \cos(m\pi \frac{\theta}{\theta_0})] + \\
& + \frac{1}{r} \left(\frac{\lambda + \mu}{r^2} + 1\right) [-A_1(r) \frac{1}{\theta_0} + A_2(r) \frac{1}{\theta_0} + A_3(r) \left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{3}\right) + A_4(r) \left(\frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{6}\right) + \\
& + \sum_{m=1}^N U_m(r) \left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right) \cos(m\pi \frac{\theta}{\theta_0})] - \gamma \cos \theta = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

В полученных уравнениях $9 + 2N$ неизвестных функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(r), A_2(r), A_3(r), A_4(r), U_1(r), \dots, U_N(r), \\ B_1(r), B_2(r), B_3(r), B_4(r), V_1(r), \dots, V_N(r), v_0(r) \end{array} \right\}. \tag{9}$$

Эти функции зависят только от переменной r . Применим теперь к уравнениям (7) и (8) операторы быстрых разложений: для первого уравнения будем использовать оператор синус-разложения нулевого порядка, для второго – оператор косинус-разложения первого порядка.

Положим в (7) угол $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 A_1(r)}{\partial r^2} + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial B_1(r)}{\partial r} - \frac{(\lambda + 3\mu)}{r^2} B_1(r) + \\
& + \frac{\mu}{r^2} A_3(r) + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial A_1(r)}{\partial r} - \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} A_1(r) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Затем берем $\theta = \theta_0$:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 A_2(r)}{\partial r^2} + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial B_2(r)}{\partial r} - \frac{(\lambda + 3\mu)}{r^2} B_2(r) + \\
 & + \frac{\mu}{r^2} A_4(r) + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial A_2(r)}{\partial r} - \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} A_2(r) - \gamma \sin \theta_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Теперь нам необходимо найти коэффициенты Фурье. Для этого нужно (7) умножить на $\sin\left(p\pi \frac{\theta}{\theta_0}\right)$, $p = 1 \dots N$ и проинтегрировать по $\theta \in [0; \theta_0]$:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial^2 A_1(r)}{\partial r^2} k_1 + \frac{\partial^2 A_2(r)}{\partial r^2} k_2 + \frac{\partial^2 A_3(r)}{\partial r^2} k_3 + \frac{\partial^2 A_4(r)}{\partial r^2} k_4 + \right. \\
 & + \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 U_m(r)}{\partial r^2} \frac{\theta_0}{\pi} k_5 \left. \right] + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \left[\frac{\partial B_1(r)}{\partial r} k_1 + \frac{\partial B_2(r)}{\partial r} k_2 + \frac{\partial B_3(r)}{\partial r} k_3 + \right. \\
 & + \frac{\partial B_4(r)}{\partial r} k_4 - \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(r)}{\partial r} m k_5 \left. \right] - \frac{(\lambda + 3\mu)}{r^2} [B_1(r) k_1 + B_2(r) k_2 + \\
 & + B_3(r) k_3 + B_4(r) k_4 - \sum_{m=1}^N V_m(r) m k_5] + \frac{\mu}{r^2} [A_3(r) k_1 + A_4(r) k_2 - \\
 & - \sum_{m=1}^N U_m(r) \left(\frac{m^2 \pi}{\theta_0} \right) k_5] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \left[\frac{\partial A_1(r)}{\partial r} k_1 + \frac{\partial A_2(r)}{\partial r} k_2 + \frac{\partial A_3(r)}{\partial r} k_3 + \right. \\
 & + \frac{\partial A_4(r)}{\partial r} k_4 - \sum_{m=1}^N \frac{\partial U_m(r)}{\partial r} \frac{\theta_0}{\pi} k_5 \left. \right] - \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [A_1(r) k_1 + A_2(r) k_2 + \\
 & + A_3(r) k_3 + A_4(r) k_4 - \sum_{m=1}^N U_m(r) \frac{\theta_0}{\pi} k_5] + \gamma k = 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где величины k_i , $i = 1..5$ представляют собой выражения

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{\theta_0(p\pi - \sin(p\pi))}{(p\pi)^2}, \\
 k_2 &= \frac{\theta_0(\sin(p\pi) - p\pi \cos(p\pi))}{(p\pi)^2}, \\
 k_3 &= \frac{1}{6} \frac{\theta_0^3((p\pi)^2 \sin(p\pi) - 6p\pi + 6 \sin(p\pi))}{(p\pi)^4}, \\
 k_4 &= \frac{1}{3} \frac{\theta_0^3((p\pi)^2 \sin(p\pi) + 3p\pi \cos(p\pi) - 3 \sin(p\pi))}{(p\pi)^4}, \\
 k_5 &= \begin{cases} \frac{m \cos(m\pi) \sin(p\pi) - p \sin(m\pi) \cos(p\pi)}{m^2 - p^2}, & m \neq p, \\ \frac{1}{2} \frac{\cos(p\pi) \sin(p\pi) - p\pi}{p}, & m = p, \end{cases} \\
 k &= \begin{cases} \frac{\theta_0(p\pi \cos(p\pi) \sin(\theta_0) - \theta_0 \sin(p\pi) \cos(\theta_0))}{(p\pi)^2 - \theta_0^2}, & \theta_0 \neq p\pi, \\ \frac{1}{2} (\cos(\theta_0) \sin(\theta_0) - \theta_0), & \theta_0 = p\pi. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, в результате применения оператора быстрых синус-разложений нулевого порядка мы получили $N + 2$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим теперь применение оператора быстрых косинус-разложений. Положим в (8) $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial^2 B_1(r)}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial B_1(r)}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} B_1(r) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \lambda \right) \frac{\partial A_3(r)}{\partial r} + \\ & + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} B_3(r) + \frac{1}{r} \left(\frac{(\lambda + \mu)}{r^2} + 1 \right) A_3(r) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Затем $\theta = \theta_0$:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial^2 B_2(r)}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial B_2(r)}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} B_2(r) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \lambda \right) \frac{\partial A_4(r)}{\partial r} + \\ & + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} B_4(r) + \frac{1}{r} \left(\frac{(\lambda + \mu)}{r^2} + 1 \right) A_4(r) + \gamma \sin \theta_0 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты Фурье, не входящие в сумму ряда, получим, проинтегрировав (8) по $\theta \in [0; \theta_0]$:

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{\partial^2 B_1(r)}{\partial r^2} \frac{\theta_0^2}{3} + \frac{\partial^2 B_2(r)}{\partial r^2} \frac{\theta_0^2}{6} - \frac{\partial^2 B_3(r)}{\partial r^2} \frac{\theta_0^4}{45} - \frac{\partial^2 B_4(r)}{\partial r^2} \frac{7\theta_0^4}{360} + \frac{\partial^2 v_0(r)}{\partial r^2} \theta_0 \right] + \\ & + \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial B_1(r)}{\partial r} \frac{\theta_0^2}{3} + \frac{\partial B_2(r)}{\partial r} \frac{\theta_0^2}{6} - \frac{\partial B_3(r)}{\partial r} \frac{\theta_0^4}{45} - \frac{\partial B_4(r)}{\partial r} \frac{7\theta_0^4}{360} + \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} \theta_0 \right] - \\ & - \frac{\mu}{r^2} \left[B_1(r) \frac{\theta_0^2}{3} + B_2(r) \frac{\theta_0^2}{6} - B_3(r) \frac{\theta_0^4}{45} - B_4(r) \frac{7\theta_0^4}{360} + v_0(r) \theta_0 \right] + \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \lambda \right) \left[-\frac{\partial A_1(r)}{\partial r} + \frac{\partial A_2(r)}{\partial r} \right] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [-B_1(r) + B_2(r)] + \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{(\lambda + \mu)}{r^2} + 1 \right) [-A_1(r) + A_2(r)] - \gamma \sin \theta_0 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Остальные коэффициенты Фурье получим, умножив (8) на $\cos \left(p\pi \frac{\theta}{\theta_0} \right)$, $p = 1..N$ и проинтегрировав по $\theta \in [0; \theta_0]$:

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_1(r)}{\partial r^2} t_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_2(r)}{\partial r^2} t_2 - \frac{1}{24} \frac{\partial^2 B_3(r)}{\partial r^2} t_3 - \frac{1}{24} \frac{\partial^2 B_4(r)}{\partial r^2} t_4 + \right. \\ & + \frac{\partial^2 v_0(r)}{\partial r^2} t_5 - \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 V_m(r)}{\partial r^2} \frac{\theta_0}{\pi} t_6 \left. \right] + \frac{\mu}{r} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial B_1(r)}{\partial r} t_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial B_2(r)}{\partial r} t_2 - \right. \\ & - \frac{1}{24} \frac{\partial B_3(r)}{\partial r} t_3 - \frac{1}{24} \frac{\partial B_4(r)}{\partial r} t_4 + \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} t_5 - \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(r)}{\partial r} \frac{\theta_0}{\pi} t_6 - \\ & - \frac{\mu}{r^2} \left[\frac{1}{2} B_1(r) t_1 + \frac{1}{2} B_2(r) t_2 - \frac{1}{24} B_3(r) t_3 - \frac{1}{24} B_4(r) t_4 + \right. \\ & + v_0(r) t_5 - \sum_{m=1}^N V_m(r) t_6 \left. \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \lambda \right) \left[-\frac{\partial A_1(r)}{\partial r} \frac{t_5}{\theta_0} + \frac{\partial A_2(r)}{\partial r} \frac{t_5}{\theta_0} - \right. \\ & - \frac{\partial A_3(r)}{\partial r} \frac{k_3(p\pi)}{\theta_0} + \frac{\partial A_4(r)}{\partial r} \frac{k_4(p\pi)}{\theta_0} - \sum_{m=1}^N \frac{\partial U_m(r)}{\partial r} m t_6 \left. \right] + \\ & + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} \left[-B_1(r) \frac{t_5}{\theta_0} + B_2(r) \frac{t_5}{\theta_0} + B_3(r) \frac{k_3(p\pi)}{\theta_0} + B_4(r) \frac{k_4(p\pi)}{\theta_0} + \right. \\ & + \sum_{m=1}^N V_m(r) \frac{m^2 \pi}{\theta_0} t_6 \left. \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{(\lambda + \mu)}{r^2} + 1 \right) \left[-A_1(r) \frac{t_5}{\theta_0} + A_2(r) \frac{t_5}{\theta_0} + \right. \\ & + A_3(r) \frac{k_3(p\pi)}{\theta_0} + A_4(r) \frac{k_4(p\pi)}{\theta_0} - \sum_{m=1}^N U_m(r) m t_6 \left. \right] - \gamma t = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где величины t_i , $i = 1..6$ представляют собой выражения

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\theta_0^2 ((p\pi)^2 \sin(p\pi) - 2p\pi + 2 \sin(p\pi))}{(p\pi)^3}, \\ t_2 &= \frac{\theta_0^2 ((p\pi)^2 \sin(p\pi) + 2p\pi \cos(p\pi) - 2 \sin(p\pi))}{(p\pi)^3}, \\ t_3 &= \frac{\theta_0^4 ((p\pi)^4 \sin(p\pi) + 4(p\pi)^2 \sin(p\pi) - 24p\pi + 24 \sin(p\pi))}{(p\pi)^5}, \end{aligned}$$

$$t_4 = \frac{\theta_0^4((p\pi)^4 \sin(p\pi) + 8(p\pi)^2 \sin(p\pi) + 24p\pi \cos(p\pi) - 24 \sin(p\pi))}{(p\pi)^5}, \quad (18)$$

$$t_5 = \frac{\theta_0}{p\pi} \sin(p\pi),$$

$$t_6 = \begin{cases} \frac{p \cos(m\pi) \sin(p\pi) - m \sin(m\pi) \cos(p\pi)}{m^2 - p^2}, & m \neq p, \\ -\frac{1}{2} \frac{\cos(p\pi) \sin(p\pi) + p\pi}{p}, & m = p, \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} \frac{\theta_0(p\pi \sin(p\pi) \cos(\theta_0) - \theta_0 \cos(p\pi) \sin(\theta_0))}{(p\pi)^2 - \theta_0^2}, & \theta_0 \neq p\pi, \\ \frac{1}{2} (\cos(\theta_0) \sin(\theta_0) + \theta_0), & \theta_0 = p\pi. \end{cases}$$

Выражения (14)–(17) дают нам еще $N + 3$ уравнений.

Таким образом, мы получаем систему (10)–(12), (14)–(17), состоящую из $2N + 5$ уравнений с $2N + 9$ неизвестными. Замкнем систему, используя разложения для граничных условий в особой точке. Подставим разложения для функций U и V в выражения (2) для напряжений σ_θ и $\tau_{r\theta}$. Получим еще четыре уравнения, замыкающие систему:

$$\lambda \frac{\partial A_1(r)}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} (B_1(r) + A_1(r)) = G_1(r), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial v_0(r)}{\partial r} + \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(v_0(r) + \sum_{m=1}^N V_m(r) \right) + \frac{1}{r} \left[-A_1(r) \frac{1}{\theta_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2(r) \frac{1}{\theta_0} - A_3(r) \frac{\theta_0}{3} - A_4(r) \frac{\theta_0}{6} + \sum_{m=1}^N U_m(r) \left(\frac{m\pi}{\theta_0} \right) \right] \right) = G_2(r), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\lambda \frac{\partial A_2(r)}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} (B_2(r) + A_2(r)) = G_3(r), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mu \left[\frac{\partial B_1(r)}{\partial r} \frac{\theta_0}{2} + \frac{\partial B_2(r)}{\partial r} \frac{\theta_0}{2} - \frac{\partial B_3(r)}{\partial r} \frac{\theta_0^3}{24} - \frac{\partial B_4(r)}{\partial r} \frac{\theta_0^3}{24} + \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(r)}{\partial r} \cos(m\pi) - \frac{1}{r} [B_1(r) \frac{\theta_0}{2} + B_2(r) \frac{\theta_0}{2} - B_3(r) \frac{\theta_0^3}{24} - \right. \\ \left. - B_4(r) \frac{\theta_0^3}{24} + v_0(r) + \sum_{m=1}^N V_m(r) \cos(m\pi)] + \frac{1}{r} [-A_1(r) \frac{1}{\theta_0} + \right. \\ \left. + A_2(r) \frac{1}{\theta_0} + A_3(r) \frac{\theta_0}{6} + A_4(r) \frac{\theta_0}{3} + \sum_{m=1}^N U_m(r) \left(\frac{m\pi}{\theta_0} \right) \cos(m\pi)] \right] = G_4(r). \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим теперь граничные условия (3) на внешней границе $r = a$ и используем предположения относительно компонент перемещений в центре цилиндра. Применим к ним синус- и косинус-разложения:

$$\begin{aligned} B_1(r) \left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0} \right) + B_2(r) \frac{\theta^2}{2\theta_0} + B_3(r) \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2 \theta_0}{6} \right) + \\ + B_4(r) \left(\frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2 \theta_0}{12} \right) + v_0(r) + \sum_{m=1}^N V_m(r) \cos \left(m\pi \frac{\theta}{\theta_0} \right) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& -A_1(r)\frac{1}{\theta_0} + A_2(r)\frac{1}{\theta_0} + A_3(r)\left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{3}\right) + \\
& + A_4(r)\left(\frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^N U_m(r)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu)\left[\frac{\partial A_1(r)}{\partial r}\left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + \frac{\partial A_2(r)}{\partial r}\frac{\theta}{\theta_0} + \frac{\partial A_3(r)}{\partial r}\left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + \right. \\
& + \left. \frac{\partial A_4(r)}{\partial r}\left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^N \frac{\partial U_m(r)}{\partial r}\sin\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right)\right] + \frac{\lambda}{r}\left([B_1(r)\left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + \right. \\
& + B_2(r)\frac{\theta}{\theta_0} + B_3(r)\left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + B_4(r)\left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right) - \\
& - \sum_{m=1}^N V_m(r)\frac{m\pi}{\theta_0}\sin\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right)] + [A_1(r)\left(1 - \frac{\theta}{\theta_0}\right) + A_2(r)\frac{\theta}{\theta_0} + A_3(r)\left(\frac{\theta^2}{2} - \right. \\
& \left. - \frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{3}\right) + A_4(r)\left(\frac{\theta^3}{6\theta_0} - \frac{\theta\theta_0}{6}\right) + \sum_{m=1}^N U_m(r)\sin\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right)] = F_1(\theta),
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
& \mu\left[\left(\frac{\partial B_1(r)}{\partial r}\left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0}\right) + \frac{\partial B_2(r)}{\partial r}\frac{\theta^2}{2\theta_0} + \frac{\partial B_3(r)}{\partial r}\left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{6}\right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\partial B_4(r)}{\partial r}\left(\frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{12}\right) + \frac{\partial v_0(r)}{\partial r} + \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(r)}{\partial r}\cos\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right)\right] - \\
& - \frac{1}{r}\left[B_1(r)\left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0}\right) + B_2(r)\frac{\theta^2}{2\theta_0} + B_3(r)\left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{6}\right) + \right. \\
& + B_4(r)\left(\frac{\theta^4}{24\theta_0} - \frac{\theta^2\theta_0}{12}\right) + v_0(r) + \sum_{m=1}^N V_m(r)\cos\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right)] + \frac{1}{r}\left[-A_1(r)\frac{1}{\theta_0} + \right. \\
& + A_2(r)\frac{1}{\theta_0} + A_3(r)\left(\theta - \frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{3}\right) + A_4(r)\left(\frac{\theta^2}{2\theta_0} - \frac{\theta_0}{6}\right) + \\
& \left. + \sum_{m=1}^N U_m(r)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos\left(m\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right)\right] = F_2(\theta).
\end{aligned} \tag{26}$$

К (25) применим оператор быстрых синус-разложений, к (23), (24) и (26) – оператор косинус-разложений. В итоге получим систему из $4N + 11$ уравнений:

$$v_0(0) + \sum_{m=1}^N V_m(0) = 0, \tag{27}$$

$$B_1(0)\frac{\theta_0}{2} + B_2(0)\frac{\theta_0}{2} - B_3(0)\frac{\theta_0^3}{24} - B_4(0)\frac{\theta_0^3}{24} + v_0(0) + \sum_{m=1}^N V_m(0)\cos(m\pi) = 0, \tag{28}$$

$$B_1(0)\frac{\theta_0^2}{3} + B_2(0)\frac{\theta_0^2}{6} - B_3(0)\frac{\theta_0^4}{45} - B_4(0)\frac{7\theta_0^4}{360} + v_0(0)\theta_0 = 0, \tag{29}$$

$$\frac{1}{2}t_1B_1(0) + \frac{1}{2}t_2B_2(0) - \frac{1}{24}t_3B_3(0) - \frac{1}{24}t_4B_4(0) + v_0(0)t_5 - \frac{\theta_0}{\pi}t_6 = 0, \tag{30}$$

$$-A_1(0)\frac{1}{\theta_0} + A_2(0)\frac{1}{\theta_0} - A_3(0)\frac{\theta_0}{3} - A_4(0)\frac{\theta_0}{6} + \sum_{m=1}^N U_m(0)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right) = 0, \tag{31}$$

$$-A_1(0)\frac{1}{\theta_0} + A_2(0)\frac{1}{\theta_0} + A_3(0)\frac{\theta_0}{6} + A_4(0)\frac{\theta_0}{3} + \sum_{m=1}^N U_m(0)\left(\frac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos(m\pi) = 0, \tag{32}$$

$$-A_1(0) + A_2(0) = 0, \tag{33}$$

$$-A_1(0)\frac{t_5}{\theta_0} + A_2(0)\frac{t_5}{\theta_0} + A_3(0)\frac{p\pi}{\theta_0}k_3 + A_4(0)\frac{p\pi}{\theta_0}k_4 - \sum_{m=1}^N U_m(0)mt_6 = 0, \tag{34}$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial A_1(a)}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} (B_1(a) + A_1(a)) = F_1(0), \quad (35)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial A_2(a)}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} (B_2(a) + A_2(a)) = F_1(\theta_0), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial A_1(a)}{\partial r} k_1 + \frac{\partial A_2(a)}{\partial r} k_2 + \frac{\partial A_3(a)}{\partial r} k_3 + \frac{\partial A_4(a)}{\partial r} k_4 - \sum_{m=1}^N \frac{\partial U_m(a)}{\partial r} \frac{\theta_0}{\pi} k_5 \right] + \\ & + \frac{\lambda}{a} \left[B_1(a) k_1 + B_2(a) k_2 + B_3(a) k_3 + B_4(a) k_4 + \sum_{m=1}^N V_m(a) k_5 \right] + \\ & + \left[A_1(a) k_1 + A_2(a) k_2 + A_3(a) k_3 + A_4(a) k_4 - \sum_{m=1}^N U_m(a) \frac{\theta_0}{\pi} k_5 \right] = \\ & = \int_0^{\theta_0} F_1(\theta) \sin(p\pi \frac{\theta}{\theta_0}) d\theta, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{\partial v_0(a)}{\partial r} + \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(a)}{\partial r} \right] - \frac{1}{a} \left[v_0(a) + \sum_{m=1}^N V_m(a) \right] + \frac{1}{a} [-A_1(a) \frac{1}{\theta_0} + \\ & + A_2(a) \frac{1}{\theta_0} - A_3(a) \frac{\theta_0}{3} - A_4(a) \frac{\theta_0}{6} + \sum_{m=1}^N U_m(a) \left(\frac{m\pi}{\theta_0} \right)] = F_2(0), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{\partial B_1(a)}{\partial r} \frac{\theta_0}{2} + \frac{\partial B_2(a)}{\partial r} \frac{\theta_0}{2} - \frac{\partial B_3(a)}{\partial r} \frac{\theta_0^3}{24} - \frac{\partial B_4(a)}{\partial r} \frac{\theta_0^3}{24} + \frac{\partial v_0(a)}{\partial r} + \right. \\ & + \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(a)}{\partial r} \cos(m\pi) \left. \right] - \frac{1}{a} [B_1(a) \frac{\theta_0}{2} + B_2(a) \frac{\theta_0}{2} - B_3(a) \frac{\theta_0^3}{24} - \\ & - B_4(a) \frac{\theta_0^3}{24} + v_0(a) + \sum_{m=1}^N V_m(a) \cos(m\pi)] + \frac{1}{a} [-A_1(a) \frac{1}{\theta_0} + A_2(a) \frac{1}{\theta_0} + \\ & + A_3(a) \frac{\theta_0}{6} + A_4(a) \frac{\theta_0}{3} + \sum_{m=1}^N U_m(a) \left(\frac{m\pi}{\theta_0} \right) \cos(m\pi)] = F_2(\theta_0), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{\theta_0^2}{3} \frac{\partial B_1(a)}{\partial r} + \frac{\theta_0^2}{6} \frac{\partial B_2(a)}{\partial r} - \frac{\theta_0^4}{45} \frac{\partial B_3(a)}{\partial r} - \frac{7\theta_0^4}{360} \frac{\partial B_4(a)}{\partial r} + \right. \\ & + \frac{\partial v_0(a)}{\partial r} \theta_0 \left. \right] - \frac{1}{a} \left[\frac{\theta_0^2}{3} B_1(a) + \frac{\theta_0^2}{6} B_2(a) - \frac{\theta_0^4}{45} B_3(a) - \right. \\ & \left. - \frac{7\theta_0^4}{360} B_4(a) + v_0(a) \theta_0 \right] + \frac{1}{a} [-A_1(a) + A_2(a)] = \int_0^{\theta_0} F_2(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{\partial B_1(a)}{\partial r} \frac{t_1}{2} + \frac{\partial B_2(a)}{\partial r} \frac{t_2}{2} - \frac{\partial B_3(a)}{\partial r} \frac{t_3}{24} - \frac{\partial B_4(a)}{\partial r} \frac{t_4}{24} + \frac{\partial v_0(a)}{\partial r} t_5 - \right. \\ & - \sum_{m=1}^N \frac{\partial V_m(a)}{\partial r} \frac{\theta_0}{\pi} t_6 \left. \right] - \frac{1}{a} [B_1(a) \frac{t_1}{2} + B_2(a) \frac{t_2}{2} - B_3(a) \frac{t_3}{24} - B_4(a) \frac{t_4}{24} + \\ & + v_0(a) t_5 - \sum_{m=1}^N V_m(a) \frac{\theta_0}{\pi} t_6] + \frac{1}{a} [-A_1(a) \frac{t_5}{\theta_0} + A_2(a) \frac{t_5}{\theta_0} + A_3(a) \frac{p\pi k_3}{\theta_0} + \\ & + A_4(a) \frac{p\pi k_4}{\theta_0} - \sum_{m=1}^N U_m(a) m t_6] = \int_0^{\theta_0} F_2(\theta) \cos(p\pi) d\theta. \end{aligned} \quad (41)$$

Представим теперь $2N + 9$ неизвестных функций (9) в виде быстрых разложений:

$$\begin{aligned}
 A_i(r) &= A_i(0)\left(1 - \frac{r}{a}\right) + A_i(a) \frac{r}{a} + \frac{\partial^2 A_i(0)}{\partial r^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{3}\right) + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 A_i(a)}{\partial r^2} \left(\frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{6}\right) + \sum_{m=1}^N A_m^i \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right), \quad i = 1..4, \\
 B_i(r) &= B_i(0)\left(1 - \frac{r}{a}\right) + B_i(a) \frac{r}{a} + \frac{\partial^2 B_i(0)}{\partial r^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{3}\right) + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 B_i(a)}{\partial r^2} \left(\frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{6}\right) + \sum_{m=1}^N B_m^i \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right), \quad i = 1..4, \\
 V_i(r) &= V_i(0)\left(1 - \frac{r}{a}\right) + V_i(a) \frac{r}{a} + \frac{\partial^2 V_i(0)}{\partial r^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{3}\right) + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 V_i(a)}{\partial r^2} \left(\frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{6}\right) + \sum_{m=1}^N V_m^i \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right), \quad i = 1..4, \\
 U_i(r) &= U_i(0)\left(1 - \frac{r}{a}\right) + U_i(a) \frac{r}{a} + \frac{\partial^2 U_i(0)}{\partial r^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{3}\right) + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 U_i(a)}{\partial r^2} \left(\frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{6}\right) + \sum_{m=1}^N U_m^i \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right), \quad i = 1..4, \\
 v_0(r) &= v_0(0)\left(1 - \frac{r}{a}\right) + v_0(a) \frac{r}{a} + \frac{\partial^2 v_0(0)}{\partial r^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{3}\right) + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 v_0(a)}{\partial r^2} \left(\frac{r^3}{6a} - \frac{ra}{6}\right) + \sum_{m=1}^N v_m^0 \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right), \quad i = 1..4.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Разложение каждой неизвестной функции содержит четыре неизвестных значения соответствующей функции и ее второй производной в точках $r = 0$, $r = a$ и N неизвестных констант, являющихся коэффициентами суммы, где верхний индекс – номер раскладываемой функции, нижний индекс – порядковый номер коэффициента. Например, в разложении $A_1(r)$ константы $A_i(0) = A_1(0)$, $A_i(a) = A_1(a)$ – значения функции в крайних точках области $r \in [0, a]$, $\frac{\partial^2 A_i(0)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 A_1(0)}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 A_i(a)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 A_1(a)}{\partial r^2}$ – значения вторых производных в этих же точках, $A_1^1, A_2^1, \dots, A_N^1$ – коэффициенты ряда Фурье. Подставим эти разложения в систему (10)–(12), (14)–(17), (19)–(22). Применяя к уравнениям системы операторы быстрых разложений по переменной r , придем к системе $(2N + 9)(4 + N)$ алгебраических уравнений с таким же количеством неизвестных констант разложений (42), решив которую, получим единственное решение в перемещениях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Матвеев, С. В. Упругопластическое состояние среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести / С. В. Матвеев // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 2 (52). – С. 107–114.

[2] Шаров, А. В. О напряжениях в режущем инструменте / А. В. Шаров, А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 20–22 сентября 2010 г. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – С. 413–416.

[3] Чернышов, А. Д. Применение метода быстрых разложений при рассмотрении математической модели клиновидного режущего инструмента / А. Д. Чернышов, Н. А. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов

Международной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2013 г. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013.

[4] *Чернышов, А. Д.* Быстрые ряды Фурье / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 20–22 сентября 2010. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – С. 388–393.

[5] *Чернышов, А. Д.* Улучшенные ряды Фурье и граничные функции / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 22–24 июня 2009 г. : в 2 ч. Ч. 2. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2009. – С. 236–238.

[6] *Чернышов, А. Д.* О применении быстрых разложений для решения нелинейных задач механики / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28 сентября 2011 г. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – С. 412–416.

[7] *Чернышов, А. Д.* Оператор быстрых разложений и теорема единственности быстрых разложений / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28 ноября 2012 г. : в 2 ч. Ч. 1. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – С. 401–405.

Шашкин Александр Иванович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru

Переяславская Ирина Игоревна,

аспирант кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: irika5319@yandex.ru

A. I. Shashkin, I. I. Pereyaslavskaya

**APPLICATION OF THE METHOD OF FAST DECOMPOSITIONS FOR
FINDING THE STRESS-STRAIN STATE OF AN ELASTIC CYLINDER UNDER
THE ACTION OF FORCE OF GRAVITY**

The Voronezh State University

Abstract. In this article the problem of finding the stress-strain state of an elastic cylinder under the action of comprehensive axisymmetric pressure and force of gravity is considered. Solution is performed in displacements, which represented by fast decompositions. It allows to transfer from solving of the system of differential equations to solving of the system of algebraic equations regarding to the unknown coefficients of decompositions.

Keywords: elastic cylinder, stress-strain state, action of force of gravity, boundary function, fast decompositions .

REFERENCES

- [1] *Matveev, S. V.* Elastic-plastic state of space of space weakened by a horizontal cylindrical cavity / S. V. Matveev // Vestnik the Samara state university. – Natural-science Line. – 2007. – № 2 (52). – P. 107–114.
- [2] *Sharov, A. V.* About the stresses in cutting tool / A. V. Sharov, A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 20–22 September 2010. – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2010 – P. 413–416.
- [3] *Chernyshov, A. D.* The application of the method of fast decompositions when considering the mathematical model of wedge-shaped cutting tool / A. D. Chernyshov, N. A. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 12–14 Desember 2013. – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2013.
- [4] *Chernyshov, A. D.* Fast Fourier Series / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 20–22 September 2010. – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2010 – P. 388–393.
- [5] *Chernyshov, A. D.* Improved Fourier Series / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 22–24 June 2009. : in 2 p. P. 2 – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2009 – P. 236–238.
- [6] *Chernyshov, A. D.* On the application of fast decompositions for the solution of nonlinear problems of mechanics / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 26–28 September 2011. – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2011 – P. 412–416.
- [7] *Chernyshov, A. D.* The operator of fast decompositions and the theorem of uniqueness fast decompositions / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, Informatics and mechanics : Proceedings of the international conference, Voronezh, 26–28 November 2012. : in 2 p. P. 1 – Voronezh : Publishing and printing center of Voronezh State University, 2012 – P. 401–405.

Shashkin, Alexander Ivanovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department of Mathematical and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh

Pereyaslavskaya, Irina Igorevna

Postgraduate student, Department of Mathematical and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh

А. В. Башкатов, В. Г. Теличко, А. А. Трещев

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА И ПОЛИМЕРБЕТОНА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Тульский государственный университет

Аннотация. Рассматривается построение математической модели деформирования железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды. В статье использована математическая модель модификации гибридного конечного элемента для расчета армированных железобетонных плит. Приводятся инкрементальные уравнения, связывающие приращения напряжений с приращениями деформаций.

Ключевые слова: математическая модель, агрессивная среда, метод конечных элементов, гибридный конечный элемент, изгиб железобетонных армированных плит, полимербетонный защитный слой, приращения напряжений, приращения деформаций.

УДК: 539.3

Одним из самых опасных факторов, воздействующих на железобетонные конструкции различных зданий и сооружений, является агрессивная эксплуатационная среда. В связи с этим актуальна задача по разработке математической модели деформирования железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды (см. рис.1).

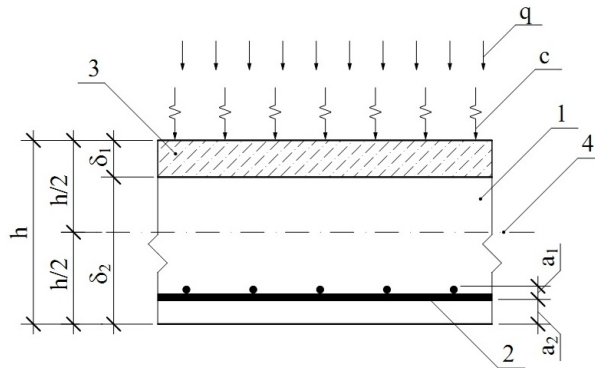


Рис. 1. Схема рассматриваемой плиты

1 – железобетонный слой плиты, 2 – армирование плиты, 3 – полимербетонный слой, 4 – срединная поверхность, q – равномерно распределенная нагрузка, c – агрессивная среда,

Поступила 20.10.2014

δ_1 – толщина полимербетонного слоя, δ_2 – толщина железобетонного слоя, h – полная толщина плиты, a_1 – толщина армированного слоя, a_2 – толщина защитного слоя бетона для арматурной сетки.

Решать подобного рода задачу предлагается используя модификации гибридных КЭ с тремя степенями свободы в узле, разработанные Р. Куком в [1]. Использование данных КЭ позволяет уйти от прогрессирующего возрастания изгибной жесткости, возникающей при использовании изопараметрических КЭ, учитывающих деформации поперечного сдвига [2]. Но непосредственное применение разработанных Р. Куком гибридных конечных элементов к расчету железобетонных пространственных конструкций некорректно. Это обуславливается тем, что они не учитывают продольные усилия и перемещения в срединной плоскости, а также не дают возможности определить вектор обобщенных сил $\{M\}$ в центре КЭ достаточно просто и точно, как того требует задача. В связи с этим предлагается использовать модификацию гибридных КЭ с пятью степенями свободы в узле и матрицей жесткости, полученной непосредственно для произвольного плоского треугольного элемента [3].

Используя матрицу некоторых функций от координат точки элемента $[P]$ и вектор коэффициентов, требующих определения $\{\beta\}$ при построении матрицы жесткости конечного элемента, получаем следующее выражение для вектора обобщенных сил [3]:

$$\{M\} = [P] \{\beta\}. \quad (1)$$

Следовательно, вектор обобщенных деформаций будет иметь вид

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{M\} = [E] \{M\}, \quad (2)$$

где $[E]$ – матрица податливости. Зная, что матрица податливости представляет собой интеграл по толщине плиты, получаем выражение для энергии деформации по объему КЭ как интеграл по его площади:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T [E] \{M\} dS. \quad (3)$$

П. Тонгом и Т. Пианом в работах [4], [5] показано, что конечные элементы данного класса основаны на функционале вида

$$\Pi = \sum_n \left(U_n - \int_{V_n} \{\Phi\}^T \{t\} dS + \int_S \{\bar{\Phi}\}^T \{t\} dS \right), \quad (4)$$

где V_n – граница объема элемента; S – часть V_n , подвергнутая действию внешнего вектора сил $\{\bar{\Phi}\}$; n – количество элементов; $\{t\}$ – граничные перемещения, связанные с узловыми перемещениями $\{q\}$ выражением

$$\{t\} = [L] \{q\}. \quad (5)$$

Вектор сил на границе элемента $\{\Phi\}$ определяется из уравнения (4):

$$\{\Phi\} = [R] \{\beta\}, \quad (6)$$

где $[R]$ – матрица $[P]$ для контура V_n элемента, $[L]$ – матрица связи узловых и граничных перемещений.

Подставив выражения (1), (3), (5), (6) в уравнение (4), получаем функционал вида

$$= \sum_n \left(\frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [T] \{q\} + \{\Phi_0\}^T \{q\} \right), \quad (7)$$

где

$$[H] = \int_S [P]^T [E] [P] dS; \quad (8)$$

$$[T] = \int_{V_n} [R]^T [L] dS; \quad (9)$$

$$\{\Phi_0\}^T = \int_S \{\bar{\Phi}\} [L] dS. \quad (10)$$

После определения вариаций функционала (7) по параметрам $\{\beta\}$, $\{q\}$ и приравнявая эти вариации к нулю, можно получить выражение вида [1]

$$\sum_n [T]^T [H]^{-1} [T] \{q\} = \sum_n \{\Phi_0\}, \quad (11)$$

из которого выделяется матрица жесткости элемента

$$[K] = [T]^T [H]^{-1} [T]. \quad (12)$$

При определении вариации функционала (7) по неизвестным коэффициентам $\{\beta\}$ устанавливается связь этих коэффициентов с узловыми перемещениями:

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (13)$$

Подставляя зависимости (13) в соотношения (1), получаем следующие равенство:

$$\{M\} = [P] [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (14)$$

Таким образом, после вычисления узловых перемещений вектор обобщенных сил $\{M\}$ определен.

Представим вектор обобщенных сил через неизвестные коэффициенты $\{\beta\}$ в виде

$$\begin{aligned} M_{11} &= \beta_1 + \beta_4 x_1 + \beta_9 x_2; & M_{22} &= \beta_2 + \beta_5 x_2 + \beta_{10} x_1; & M_{12} &= \beta_3 + \beta_{12} x_1 + \beta_{11} x_2; \\ Q_1 &= \beta_4 + \beta_{11}; & Q_2 &= \beta_5 + \beta_{12}; & N_{11} &= \beta_6; & N_{22} &= \beta_7; & N_{12} &= \beta_8. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя уравнение (1), получаем матрицу $[P]$ функций $M_{11} \dots N_{12}$ от координат точки элемента (16):

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $M_{11} \dots N_{12}$ – усилия, возникающие в КЭ (см. рис. 3).

Вектор β при этом имеет вид

$$\{\beta\} = \{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 \beta_6 \beta_7 \beta_8 \beta_9 \beta_{10} \beta_{11} \beta_{12}\}^T. \quad (17)$$

Подставляя матрицу $[P]$ в соотношение (8) и учитывая известные выражения для интегралов по площади треугольника, получим выражения для элементов квадратной матрицы двенадцатого порядка $[H]$.

Рассмотрим условия равновесия элементарного треугольника ABC , приведенного на рис. 2, и получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= M_{11} C_{ij} + M_{12} S_{ij}; & \bar{M}_{22} &= -M_{22} S_{ij} - M_{12} C_{ij}; & \bar{N}_{11} &= N_{11} C_{ij} + N_{12} S_{ij}; \\ \bar{N}_{22} &= N_{22} S_{ij} + N_{12} C_{ij}; & \bar{Q} &= Q_1 C_{ij} + Q_2 S_{ij}, & C_{ij} &= \cos \varphi_{ij}; & S_{ij} &= \sin \varphi_{ij}. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом зависимостей (18), определим работу распределенных вдоль стороны $i - j$ (рис. 3) сил и моментов следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= L_{ij} \int_0^1 [(Q_1 C_{ij} + Q_2 S_{ij}) w - (M_{12} C_{ij} + M_{22} S_{ij}) \psi_1 + (M_{12} S_{ij} + M_{11} C_{ij}) \psi_2 + \\ &\quad + (N_{11} C_{ij} + N_{12} S_{ij}) u_1 + (N_{22} S_{ij} + N_{12} C_{ij}) u_2] d\xi, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\xi = l/L_{ij}$ – безразмерная координата, измеряемая вдоль стороны конечного элемента $i - j$.

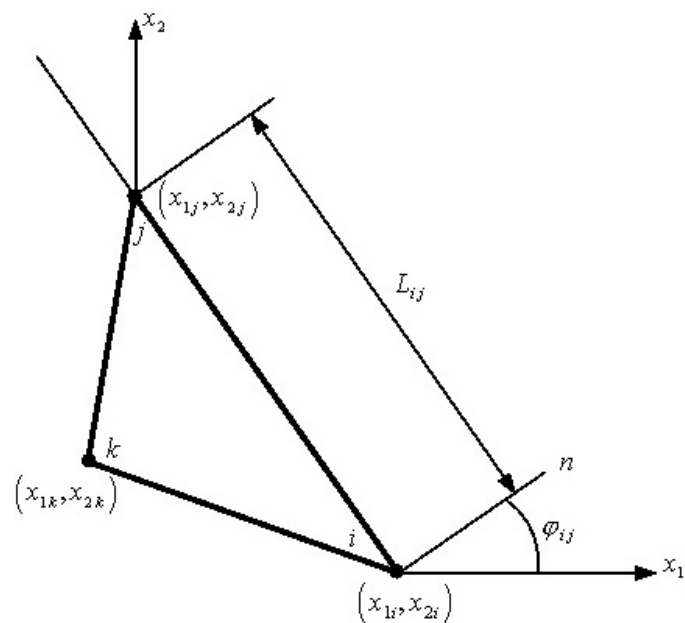


Рис. 2. Схема треугольного конечного элемента в плоскости $x_1 0 x_2$

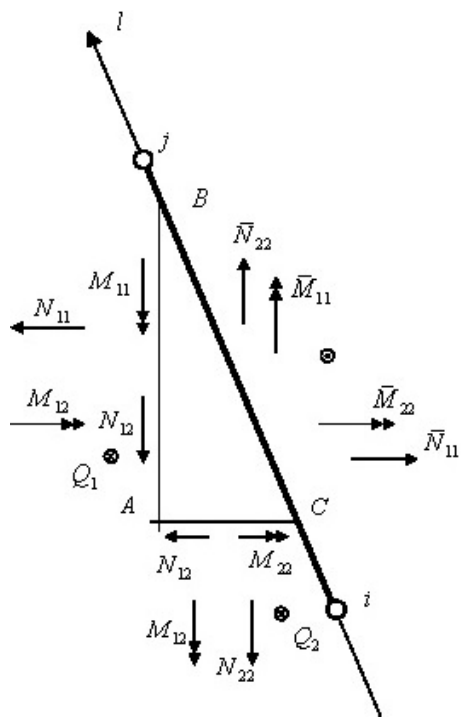


Рис. 3. Схема усилий и перемещений на стороне конечного элемента

Работа усилий и моментов, совершаемая на соответствующих перемещениях вдоль всего контура треугольного КЭ, определяется суммой

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} \quad (20)$$

Если задать вектор перемещений в i -ом узле конечного элемента в следующем виде:

$$\{q_i\} = \{w_i \ \psi_{1i} \ \psi_{2i} \ u_{1i} \ u_{2i}\}^T = \{q_{i1} \ q_{i2} \ q_{i3} \ q_{i4} \ q_{i5}\}^T, \quad (21)$$

то получаем вектор узловых перемещений всего КЭ:

$$\{q\} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_{15}\}^T. \quad (22)$$

Аппроксимацию граничных перемещений в зависимости от узловых перемещений примем в следующей форме [3]:

$$\begin{aligned} w &= [(1 - \xi) \ \xi] \{w_i \ w_j\} + L_{ij} \xi (1 - \xi) (\theta_i - \theta_j) / 2; \\ \psi_1 &= [(1 - \xi) \ \xi] \{\psi_{1i} \ \psi_{1j}\}; \ \psi_2 = [(1 - \xi) \ \xi] \{\psi_{2i} \ \psi_{2j}\}; \\ u_1 &= [(1 - \xi) \ \xi] \{u_{1i} \ u_{1j}\}; \ u_2 = [(1 - \xi) \ \xi] \{u_{2i} \ u_{2j}\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\theta_i = \psi_{1i} c_{ij} + \psi_{2i} s_{ij}$; $\theta_j = \psi_{1j} c_{ij} + \psi_{2j} s_{ij}$; L_{ij} – длина стороны $i - j$.

Представим текущие координаты x_1, x_2 на стороне $i - j$ через координаты узлов в виде

$$x_1 = x_{1i} - L_{ij} \xi s_{ij}; \ x_2 = x_{2i} + L_{ij} \xi c_{ij}. \quad (24)$$

Используя зависимости (15), (19), (23), (24) и подставляя их в уравнение (20), учитывая при этом аппроксимации (22) и выделяя векторы $\{\beta\}^T$, $\{q\}$, получим выражения для элементов матрицы $[T]$ размера 12×15 .

Задачи изгиба железобетонных плит, независимо от геометрической конфигурации, будем рассматривать в условиях активной деформации и простого нагружения. При этом будет использоваться потенциал деформаций (25), предложенный в работе [6], в «рамки» которого укладываются упругопластические свойства бетона как нелинейного материала:

$$\begin{aligned} W_1 &= (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta \cos 3\varphi) \tau^2 + \\ &+ [(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2]^n, \end{aligned} \quad (25)$$

где A_e, B_e, C_e, D_e, E_e и A_p, B_p, C_p, D_p, E_p – константы потенциала, ξ, η – некоторые гармонические функции, которые можно трактовать как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке, σ и τ – нормальные и касательные напряжения, φ – фаза напряжений; $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$; $\xi = \frac{\sigma}{S_0}$; $\eta = \frac{\tau}{S_0}$; $\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{2} \det(S_{ij})}{\tau^3}$; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$; $\sigma_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ – симметричный тензор напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера.

Деформации ползучести не учитываем. Рассматриваем плиты, размеры которых в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями, что позволяет пренебречь местными напряжениями в зоне контакта арматуры и бетона, а значит – распределить арматуру, представив ее в виде сплошного слоя, обладающего свойствами структурной анизотропии.

В качестве модели для стальной арматуры примем идеальное упругопластическое тело. Предполагаем, что арматура воспринимает только нормальные напряжения в поперечных сечениях, ее коэффициенты Пуассона равны нулю. Обнуление коэффициентов поперечной деформации заметно упрощает зависимости между напряжениями и деформациями, тогда как погрешность с введением этого допущения лежит в пределах точности исходных данных [7].

Напряжения в пределах армированных слоев плиты определим как сумму напряжений в бетоне и арматуре, а за условие совместности бетона и арматуры примем равенство деформаций этих двух сред [3].

Срединную поверхность плиты представим сетью гибридных конечных элементов модификации $H12$ с учетом разбиения по толщине на ряд фиктивных слоев n_C . Жесткостные

характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространяем на любые точки фиктивного слоя.

В зависимости от конкретных условий выделим следующие слои: а) бетонные слои; в) армированные (железобетонные слои) без трещин; г) бетонные слои с трещинами; д) армированные (железобетонные) слои. Моделирование данных слоев подробно описано рассмотрено в работах А. А. Трещева и В. Г. Теличко [8]. Дополнительно к данным слоям в задаче рассматривается полимербетонный слой. Этот слой рассматриваем как несжимаемый материал, т.е. его коэффициент Пуассона равен 0,5 [9].

Для построения математической модели полимербетонного слоя за основу принимаем теорию малых упругих деформаций А. А. Ильюшина [9] применительно к механике сплошной среды. При построении инкрементальной модели изгиба необходимо получить уравнения, связывающие приращения напряжений с приращениями деформаций. Для этого требуется построить применительно к вышеуказанной теории дифференциал Гато, который позволяет получить физические соотношения в инкрементальной форме.

Построением данных соотношений в своей работе [10] занимались В. В. Петров, О. В. Пенина [11], П. В. Селяев [12], сами уравнения имеют вид (26), (27), (28)

$$\Delta\sigma_x = \frac{4}{3}E_k^* \left(\Delta\varepsilon_x + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_y \right) + \frac{4}{3} \left(\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y \right) \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta; \quad (26)$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{4}{3}E_k^* \left(\Delta\varepsilon_y + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_x \right) + \frac{4}{3} \left(\varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_x \right) \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta; \quad \Delta\tau_{xy} = \frac{1}{3}E_k^* \Delta\gamma_{xy} + \frac{1}{3} \Delta\gamma_{xy} \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta.$$

Однако в рассматриваемой нами модели необходимо учитывать еще два касательных напряжения (27), (28):

$$\Delta\tau_{xz} = \frac{1}{3}E_k^* \Delta\gamma_{xz} + \frac{1}{3} \Delta\gamma_{xz} \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta; \quad (27)$$

$$\Delta\tau_{yz} = \frac{1}{3}E_k^* \Delta\gamma_{yz} + \frac{1}{3} \Delta\gamma_{yz} \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta, \quad (28)$$

где $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, $\Delta\tau_{xy}$, $\Delta\tau_{xz}$, $\Delta\tau_{yz}$ – приращения нормальных и касательных напряжений, вызванные приращением внешних воздействий; $\Delta\varepsilon_x$, $\Delta\varepsilon_y$, $\Delta\gamma_{xy}$, $\Delta\gamma_{xz}$, $\Delta\gamma_{yz}$ – приращение линейных и угловых деформаций, E_k^* – переменный касательный модуль с учетом действия агрессивной среды (29), E_c^* – переменный секущий модуль, учитывающий уровень концентрации агрессивной среды (30), $\Delta\delta$ – приращение глубины проникания агрессивной среды.

$$E_k^* = E_k^0 F(B), \quad (29)$$

где $F(B)$ – функция деградации касательного модуля, E_k^0 – касательный модуль без влияния агрессивной эксплуатационной среды.

$$E_c^* = E_c^0 F(B), \quad (30)$$

где $F(B)$ – функция деградации секущего модуля, E_c^0 – секущий модуль материала без влияния агрессивной эксплуатационной среды.

С учетом свойств деградации материала выражения переменных секущего E_c^* и касательного E_k^* модулей примет вид (31) (32) [12]

$$E_c^* = E_c^0 F(B(z')); \quad (31)$$

$$E_k^* = E_k^0 F(B(z')), \quad (32)$$

где z' – координата в направлении толщины пластинки, $F(B(z')) = \exp(-\lambda B(z'))$;
 $-\lambda = \frac{F'(B)}{F(B)}$, $F'(B)$ – скорость деградации.

Таким образом, получаем модель деформирования железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cook, R. D. Two hybrid elements for analysis of thick thin and sandwich plates / R. D. Cook // Int. J. num. Meth. Engng. – 1972. – Vol. 5. – P. 277–288.
- [2] Секулович, М. Упругопластические задачи / М. Секулович. – М. : Стройиздат, 1993. – 664 с.
- [3] Теличко, В. Г. Гибридный конечный элемент для расчета плит и оболочек с усложненными свойствами / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // Известия вузов. Строительство. – 2003. – № 5 – С. 17–23.
- [4] Pian, T. T. H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution / T. T. H. Pian // AIAA Journal. – 1967. – Vol. 5 – P. 1332–1336.
- [5] Tong, P. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution / P. Tong, T. T. H. Pian // Int. J. Solids Struct. – 1969. – P. 463–472.
- [6] Трещев, А. А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев – Тула : ТулГУ, 2008. – 264 с.
- [7] Гениев, Г. А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. – М. : Стройиздат, 1974. – 316 с.
- [8] Теличко, В. Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций из железобетона / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // Известия ТулГУ. Сер. Строительные материалы, конструкции и сооружения. – Тула : ТулГУ, 2005. – Вып.8. – С. 147–161.
- [9] Ильюшин, А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [10] Петров, В. В. Построение инкрементальных соотношений для физически нелинейного материала с развивающейся неоднородностью / В. В. Петров // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред. – Саратов : Саратов. ун-т, 2005. – С. 138–143.
- [11] Пенина, О. В. Определение долговечности и резерва несущей способности нелинейно-упругих пластинок при изгибе в агрессивных средах / О. В. Пенина, В. В. Петров // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2008. – Вып. 4. – С. 16–22.
- [12] Селяев, П. В. Диаграммы деформирования композиционных материалов при воздействии жидких агрессивных сред / П. В. Селяев // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред / Сборник научных трудов. – Саратов : СГТУ, 2006. – С. 46–52.

Башкатов Александр Валерьевич,

аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: a.bashkatov90@mail.ru

Теличко Виктор Григорьевич,

доцент, кандидат технических наук, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: katranv@yandex.ru

Трещев Александр Анатольевич,

заведующий кафедрой, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: taa58@yandex.ru

A. V. Bashkatov, V. G. Telichko, A. A. Treschev

**MODELING OF THE INTENSE DEFORMED STATE DESIGNS REINFORCED
CONCRETE AND POLYMER CONCRETE LAYER DEFORMATION AS
AFFECTED BY CORROSIVE MEDIUM**

Tula State University

Abstract. The arithmetic model construction of distortion of reinforced concrete slab with a polymer-concrete layer exposed to aggressive influences is introduced. Relevance of this object choice as a matter of actual practice is proved. The least contradictory model for specification of the strain-stress state of reinforced concrete constructions is sampled. The most efficient way of completing such tasks is the finite elements method which lacks the drawbacks of the finite differences method. In this article the arithmetic model of hybrid finite element qualification for the armored reinforced concrete slabs design is considered. The problem of reinforced concrete slab with a polymer-concrete layer bending is dealt with in the presence of dynamic deformation and simple loading, which gives opportunity to introduce concrete as a nonlinear material with its elastic-plastic properties which stay within the strain potential limits. The deformation of creep is not taken into account. The incremental equations connecting stress and deformation increments are provided.

Keywords: arithmetic model, aggressive influences, finite elements method, hybrid finite element, reinforced concrete slab, a polymer-concrete layer bending, stress and deformation increments.

REFERENCES

- [1] Cook, R. D. Two hybrid elements for analysis of thick thin and sandwich plates / R. D. Cook // Int. J. num. Meth. Engng. – 1972. – Vol. 5. – P. 277–288.
- [2] Sekulovich, M. Finite Element Method / M. Sekulovich. – M. : Stroyizdat Publ., 1993. – 664 p.
- [3] Telichko, V. G. Hybrid Finite Element for Calculating Spatial Structures with Complicated Properties / V. G. Telichko, A. A. Treschev // Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo. – 2003. – № 5. – P. 17–23.
- [4] Pian, T. T. H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution / T. T. H. Pian // AIAA Journal. – 1967. – Vol.5 – P.1332–1336.
- [5] Ting, T. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution / P. Tong, T.H.H. Pian // Int. J. Solids Struct. – 1969. – P.463–472.
- [6] Treschev, A. A. The Theory of Deformation and Strength of Materials, Sensitive to a Form of Strained Stress. De-fining R elations / A. A. Treschev. – Tula : TulGU, 2008. – 264 p.
- [7] Geniev, G. A. Plasticity Theory of Concrete and Reinforced Concrete / G. A. Geniev, V. N. Kissyuk, G. A. Tyupin. – M. : Stroyizdat, 1974. – 316 p.
- [8] Telichko, V. G. Modelling of the intense deformed state designs reinforced concrete shell structure deformation / V. G. Telichko, A. A. Treschev // Izvestia TulGU. Line: construction materials, constructions and structures. – Tula : TulGU, 2005. – Vol. 8. – P. 147–161.
- [9] Ilyushin, A. A. Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. : Gostekhizdat, 1948. – 376 p.
- [10] Petrov, A. A. Building Incremental Relations for Physically Non-linear Material with Developing Heterogeneity of Properties / V. V. Petrov // Problems of Structures' Elements Strength under Loading and Working Environments. – Saratov : Saratov University, 2005. – P. 138–143.
- [11] Penina, O. V. Determination of durability and reserve of bearing strength of nonlinearly elastic plates at bend as affected by corrosive medium / O. V. Penina, V. V. Petrov // Vestnik of Saratov state technical university. – 2008. – Vol. 4. – P. 16–22.

[12] *Selyaev, P. V.* Diagrams of composite materials deformation as affected by corrosive liquid medium / P. V. Selyaev // Problems of Structures' Elements Strength under Loading and Working Environments. – Saratov : Saratov University, 2006. – P. 46–52.

Bashkatov Alexander Valerievich

post-graduate student, Tula State University, Tula

Telichko Victor Grigorievich

Ph. D. Sci. Tech., Associate professor, Tula State University, Tula

Treshev Alexander Anatolievich

Dr. Sci. Tech., Professor, Tula State University, Tula

А. Э. Бутенко, А. Д. Бугрова, С. А. Аксенов, С. А. Бобер

ТЕРМОУПРУГИЙ АНАЛИЗ КОМПЛЕКСА ATMOSPHERIC CHEMISTRY SUITE ОРБИТАЛЬНОГО ЗОНДА TRACE GAS ORBITER МИССИИ EXOMARS

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Институт космических исследований РАН

Аннотация. В рамках миссии ExoMars планируется запуск орбитального зонда Trace Gas Orbiter (TGO) для исследования Марса, одним из ключевых компонентов которого является комплекс Atmospheric Chemistry Suite (ACS). Он представляет собой единую конструкцию из четырех блоков, жестко закрепленных друг относительно друга. С помощью опор комплекс ACS крепится к платформе. В результате работы оборудования будет происходить тепловое расширение и жестко закрепленные опоры начнут воздействовать на платформу, что может привести к ее разрушению, поскольку она изготавливается из менее прочного материала. В данной работе методы компьютерного моделирования применены к задаче количественной и качественной оценки нагрузок, действующих на платформу, возникающих вследствие температурного расширения компонента ACS. Моделирование, проведенное при помощи программного комплекса SolidWorks Simulation, позволило найти распределение нормальных и тангенциальных усилий в местах крепления при различных перепадах температуры. Проведена верификация полученных результатов при помощи линейно-упругого анализа. Проведено моделирование при помощи программного комплекса MSC.Patran/Nastran.

Ключевые слова: термоупругость, МКЭ, ExoMars, ACS, TGO.

УДК: 520.6.07

ExoMars – совместная программа Европейского Космического Агентства и Федерального космического агентства России по исследованию Марса. В рамках этой программы планируется запуск орбитального зонда к Марсу – Trace Gas Orbiter (TGO). Основной задачей TGO будет комплексное исследование атмосферы Марса, исследование вертикального распределения малых составляющих, в первую очередь метана, поиск органических молекул, других малых составляющих, поиск возможных источников и стоков, измерения изотопных отношений и их вариаций. Подобная задача может быть решена с помощью спектрометров высокого разрешения в ближнем и среднем ИК диапазоне. Комплекс ACS (Atmospheric Chemistry Suit) располагается на верхней панели космического аппарата и представляет собой единую конструкцию из четырех блоков, жестко закрепленных друг относительно друга. В состав комплекса входят три спектрометра (ближнего, среднего и теплового ИК-диапазонов) и система сбора научной информации [1]. Общая масса комплекса составляет 33,5 кг. Каждый из блоков комплекса является самостоятельной сборочной единицей. С помощью 18 опор из полимерного материала Vespel комплекс ACS крепится к платформе. В результате работы оборудования будет происходить тепловое расширение и жестко закрепленные опоры начнут

Поступила 10.11.2014

воздействовать на платформу, что может привести к ее разрушению. Целью работы является оценка усилий, действующих на платформу в местах крепления к ней комплекса ACS.

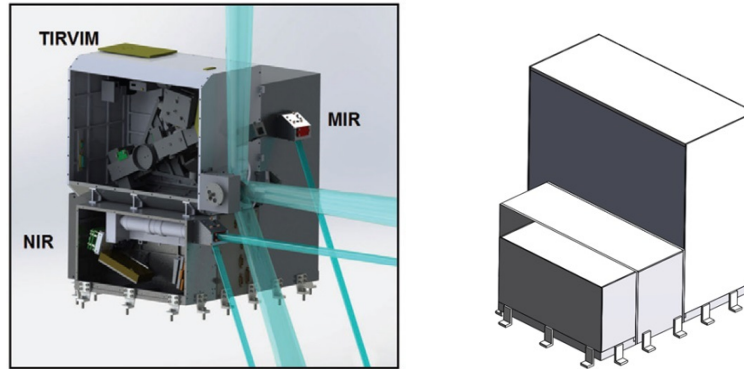


Рис. 1. Комплекс ACS (слева); упрощенная модель в SolidWorks (справа)

Постановка краевой задачи термоупругости приведена в [2]. Для решения данной задачи использовалось программное обеспечение конечно-элементного анализа SolidWorks Simulation и упрощенная модель комплекса (рис. 1). Нижние грани опор считались жестко закрепленными, и на всем комплексе задавалось равномерное изменение температуры. Расчет проводился для нескольких перепадов температуры: 10, 20 и 60 К.

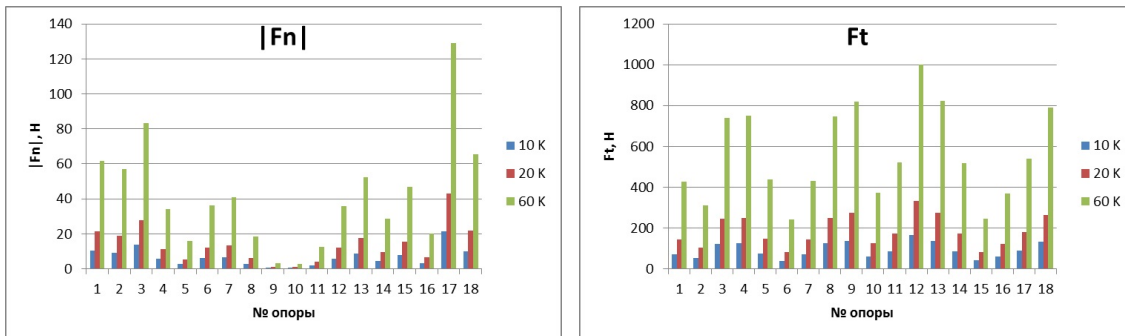


Рис. 2. Нормальная и тангенциальная компонента силы реакции

Было выявлено, что для всех перепадов температуры максимальная нормальная составляющая силы реакции приходится на одну и ту же опору. Для максимальной тангенциальной составляющей получен аналогичный результат. Выявлено, что значения тангенциальных сил на порядок превышают значения нормальных (рис. 3).

С целью проверки полученных результатов был проведен линейно-упругий анализ модели. Поскольку изменение температуры является равномерным по всему комплексу, задача может быть сведена к линейно-упругой. Интересующим нас нижним граням опор были заданы перемещения по формулам

$$dx = 0; \quad dy = -yk\Delta T; \quad dz = -zk\Delta T,$$

где k – коэффициент линейного расширения материала корпуса ACS, ΔT – изменение температуры, (x, y, z) – координата центра нижней грани опоры, а ось x направлена перпендикулярно ее плоскости. При этом тепловое расширение самих опор не учитывалось. В расчетах, представленных ниже, $\Delta T = 10\text{K}$ (рис. 4). Максимальное отклонение в получен-

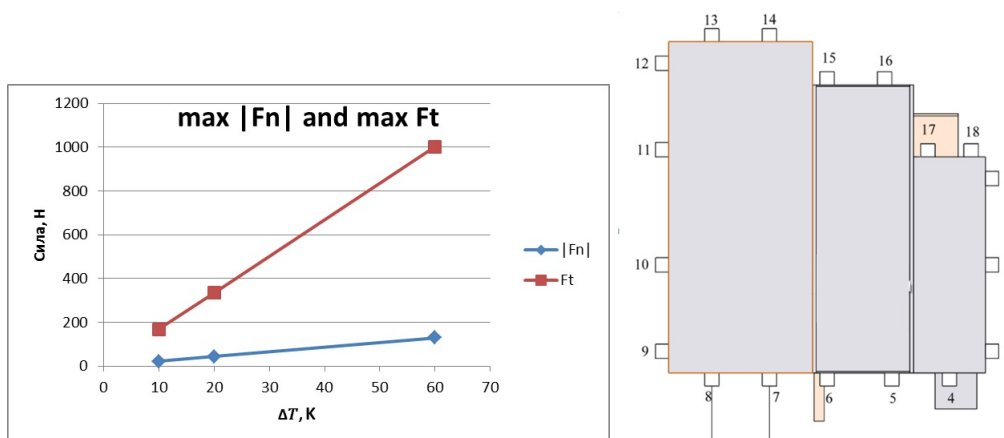


Рис. 3. Максимальная нормальная и тангенциальная компонента силы реакции (слева); нумерация опор (справа)

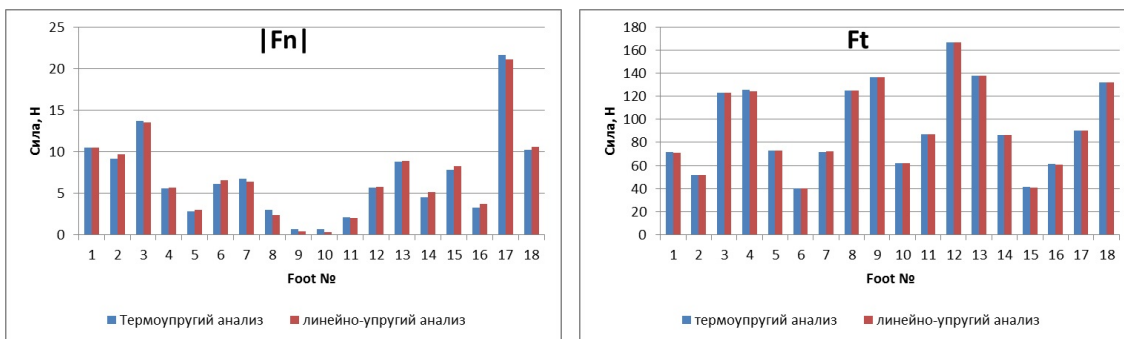


Рис. 4. Термоупругий и линейно-упругий анализ: нормальная и тангенциальная компонента силы реакции

ных значениях $|F_n|$ составило $\Delta_{max,n}^{\%} = 3\%$ от максимального значения, а среднее отклонение – $\Delta_{avg,n}^{\%} = 1.5\%$ от максимального значения. Для тангенциальных составляющих F_t : $\Delta_{max,t}^{\%} = 0.6\%$ и $\Delta_{avg,t}^{\%} = 0.2\%$.

Также было проведено моделирование в системе MSC.Patran/Nastran. Сравнение показало, что максимальное отклонение в значениях, полученных в результате расчетов в SolidWorks Simulation и MSC.Patran/Nastran, для всех рассмотренных перепадов температуры составило 6.7% и 4.7% для нормальных и тангенциальных компонент соответственно.

Выводы. Проведенное моделирование позволило качественно и количественно оценить распределение нагрузок в местах крепления комплекса к платформе при различных температурных воздействиях. Получено, что значения тангенциальных сил на порядок превышают значения нормальных. Максимальная нормальная составляющая силы реакции приходится на одну и ту же опору при всех вариантах изменения температуры. Аналогичный результат получен для максимальных тангенциальных составляющих силы реакции. Проверка достоверности полученных результатов была осуществлена с помощью линейно-упругого расчета, а также моделирования в системе MSC.Patran/Nastran. Выявлено, что расчеты, выполненные различными способами, отличаются незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Alexander Trokhimovsky et al.* Atmospheric chemistry suite (ACS): a set of infrared spectrometers for atmospheric measurements on board ExoMars trace gas orbiter. International workshop on Mars atmosphere modelling and observations. Fifth edition : Oxford, 2014.

[2] *Логашина, И. В.* Моделирование термонагруженного состояния корпуса лазерного гироскопа для дальней космической связи / И. В. Логашина, Е. Н. Чумаченко, С. А. Бобер, С. А. Аксенов // Вестник машиностроения, 2009. – № 8. – С. 3–8.

Бутенко Антон Эдуардович,

аспирант, Институт космических исследований РАН, г. Москва

e-mail: ostelite@gmail.com

Бугрова Анна Дмитриевна,

аспирант, Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», г. Москва

e-mail: ad-888@yandex.ru

Аксенов Сергей Алексеевич,

кандидат технических наук, доцент кафедры Механики и математического моделирования, Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», г. Москва

e-mail: aksenov.s.a@gmail.com

Бобер Станислав Алексеевич,

ассистент кафедры Механики и математического моделирования, Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», г. Москва, г. Москва

e-mail: stas.bober@gmail.com

A. E. Butenko, A. D. Bugrova, S. A. Aksenov, S. A. Bober

THERMOELASTIC ANALYSYS OF ATMOSPHERIC CHEMISTRY SUITE ON BOARD EXOMARS TRACE GAS ORBITER

Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of National Research University Higher School of Economics

Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences

Abstract. According to ESA-Roscosmos cooperation ExoMars, it is planned to launch Trace Gas orbiter (TGO) in order to explore Mars. One of its most important parts is Atmospheric Chemistry Suite (ACS). It is the unified construction of four parts rigidly mounted relative to each other. ACS is fixed to the platform by the feet. Thermal expansion that arise as a result of an operation of the equipment leads to the fact that feet influence the platform and may cause its destruction. In this paper computer simulation was applied to a problem of qualitative and quantitative estimation of loads at attachment points caused by the thermal expansion. Thermoelastic analysis of ACS's 3D-model was performed with Finite element method in systems SolidWorks and MSC.Patran/Nastran. This simulation it allowed determining the distribution of normal and tangential loads under different temperature's gradients. Verification of the obtained results was performed.

Keywords: thermoelasticity, FEM, ExoMars, ACS, TGO.

REFERENCES

[1] *Alexander Trokhimovsky et al.* Atmospheric chemistry suite (ACS): a set of infrared spectrometers for atmospheric measurements on board ExoMars trace gas orbiter. International workshop on Mars atmosphere modelling and observations. Fifth edition : Oxford, 2014.

[2] *Logashina, I. V.* Thermal stress state of a laser-gyroscope housing for use in space / I. V. Logashina, Y. N. Chumachenko, S. A. Bober, S. A. Aksenov // *Vestnik Mashinostroeniya*, 2009. – No 8. – P. 3–8.

Butenko, Anton Eduardovich

Postgraduate student, Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow

Bugrova, Anna Dmitrievna

Postgraduate student, Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of National Research University Higher School of Economics, Moscow

Aksenov, Sergey Alekseevich

Candidate of technical sciences, Associate Professor, Department of Mechanics and mathematical modeling, Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of National Research University Higher School of Economics, Moscow

Bober, Stanislav Alekseevich

Assistant, Department of Mechanics and mathematical modeling, Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of National Research University Higher School of Economics, Moscow

Д. А. Аbruков

**ИЗГИБ ПОЛУПОЛОСЫ СО СВОБОДНЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ КРАЯМИ,
НА ТОРЦЕ КОТОРОЙ ЗАДАНЫ ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ
И ОБОБЩЕННАЯ ПОПЕРЕЧНАЯ СИЛА.
ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Впервые построено точное аналитическое решение краевой задачи изгиба тонкой пластины в форме полуполосы, продольные стороны которой свободны, а на торце заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Оно представляется в рядах по функциям Фадля – Папковича. Искомые коэффициенты рядов находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

Ключевые слова: изгиб пластины, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+517.95

Актуальность исследуемой проблемы. В статьях [1], [2], [3] изучались свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам. Функции Фадля – Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в обычном смысле [1]. Поэтому разложения по ним невозможно построить, опираясь на классический аппарат теории базиса функций [7]. Решению краевой задачи предшествует изучение, так называемых разложений Лагранжа [1]. Это, в отличие от разложений двух функций, возникающих при решении краевой задачи, разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в решениях Файлона – Рибьера. Точные аналитические решения краевой задачи изгиба тонкой полуполосы, продольные стороны которой свободны от закрепления, до настоящего времени не были найдены.

Материал и методика исследований. Рассмотрим пластину, отнесенную к декартовым координатам x, y . Элемент пластины с внутренними силовыми факторами, соответствующими классической теории изгиба тонких пластин, показан на рис. 1. Дифференциальные уравнения равновесия можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x, y) = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + T_x = 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Поступила 11.11.2014

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-13-00118.

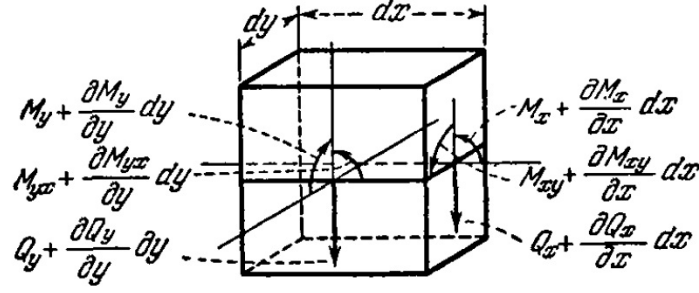


Рис. 1

где $P(x, y)$ – произвольная поперечная нагрузка (далее $P(x, y) = 0$), Q_x, Q_y – поперечные силы, M_x, M_y, M_{xy} ($M_{xy} = -M_{yx}$) – изгибающие и крутящий моменты. Функции

$$T_x(x, y) = \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} - Q_x(x, y), \quad T_y(x, y) = \frac{\partial M_y(x, y)}{\partial y} - Q_y(x, y). \quad (2)$$

Моменты M_x, M_y, M_{xy} и углы поворота Φ_x, Φ_y можно выразить через прогиб $w = w(x, y)$:

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y(x, y) = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy}(x, y) &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \Phi_x(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Phi_y(x, y) = D \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ν – коэффициент Пуассона, а

$$D = \frac{E\rho^3}{12(1 - \nu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость пластины (E – модуль упругости, ρ – толщина пластины).

Кроме того,

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (4)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа на плоскости.

Подставляя выражения (4) в первое из уравнения (1) получим основное дифференциальное уравнение теории изгиба пластин

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = P(x, y). \quad (5)$$

Помимо обычных сил Q_x, Q_y вводятся также обобщенные в смысле Кирхгоффа поперечные силы

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем строить решение, пользуясь методом начальных функций [4], позволяющим эффективно получать выражения для функций Фадля – Папковича. Основные соотношения метода имеют вид

$$W(x, y) = L_{WW}(y)W_0(x) + L_{W\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{WM}(y)M_0(x) + L_{WQ}(y)Q_0(x),$$

$$\begin{aligned}\Phi_y(x, y) &= L_{\Phi W}(y)W_0(x) + L_{\Phi\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{\Phi M}(y)M_0(x) + L_{\Phi Q}(y)Q_0(x), \\ M_y(x, y) &= L_{MW}(y)W_0(x) + L_{M\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{MM}(y)M_0(x) + L_{MQ}(y)Q_0(x),\end{aligned}\quad (7)$$

$$K_y(x, y) = L_{QW}(y)W_0(x) + L_{Q\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{QM}(y)M_0(x) + L_{QQ}(y)Q_0(x).$$

где

$$\begin{aligned}L_{WW}(y) &= L_{QQ}(y) = \cos \alpha y + \frac{1-\nu}{2}\alpha y \sin \alpha y; \\ L_{WM}(y) &= L_{\Phi Q}(y) = -\frac{1}{2\alpha}y \sin \alpha y; \\ L_{W\Phi}(y) &= L_{MQ}(y) = -\frac{1}{2\alpha}[(1+\nu) \sin \alpha y + (1-\nu)\alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{WQ}(y) &= \frac{1}{2\alpha^3}[-\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{\Phi\Phi}(y) &= L_{MM}(y) = \cos \alpha y - \frac{1-\nu}{2}\alpha y \sin \alpha y; \\ L_{\Phi W}(y) &= L_{QM}(y) = \frac{1}{2}[-(1+\nu) \sin \alpha y + (1-\nu)\alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{\Phi M}(y) &= -\frac{1}{2\alpha}[\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{MW}(y) &= L_{Q\Phi}(y) = \frac{1}{2}(1-\nu)^2\alpha^3 y \sin \alpha y; \\ L_{M\Phi}(y) &= \frac{1-\nu}{2}\alpha[(3+\nu) \sin \alpha y + (1-\nu)\alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{QW}(y) &= \frac{1-\nu}{2}\alpha^3[(3+\nu) \sin \alpha y - (1-\nu)\alpha y \cos \alpha y] -\end{aligned}\quad (8)$$

операторы метода начальных функций, причем, $\alpha = \partial/\partial x$, $\alpha^2 = \partial^2/\partial x^2$ и т. д. Поэтому выражения (8) представляют собой дифференциальные операторы бесконечного порядка. $W(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$, $M_y(x, y)$, $K_y(x, y)$ – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и обобщенная в смысле Кирхгоффа поперечная сила, умноженные на D . Эти функции, определенные при $y = 0$,

$$\begin{aligned}W_0(x) &= Dw(x, 0), & \Phi_0(x) &= \frac{\partial W(x, 0)}{\partial y}, \\ M_0(x) &= M_y(x, 0), & Q_0(x) &= K_y(x, 0),\end{aligned}\quad (9)$$

называются начальными. Зная начальные функции, по формулам (7), (8) можно найти все факторы. В качестве начальных функций могут быть выбраны функции $W(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$, $M_y(x, y)$, $K_y(x, y)$, определенные при любом значении $y = const$. Однако практически их удобно выбирать так, чтобы две из них были известны сразу, например, из условий симметрии задачи.

Рассмотрим пластину $\{\Pi : x \geq 0, |y| \leq h\}$ шириной $2h$ со свободными от закрепления краями $y = \pm h$:

$$M_y(x, \pm h) = K_y(x, \pm h) = 0 \quad (10)$$

и некоторыми граничными условиями на торце $x = 0$. Решение задачи будем искать с разделением на симметричное и обратно симметричное относительно линии симметрии пластины $y = 0$. В случае симметричной задачи начальные функции $\Phi_0(x) = Q_0(x) = 0$. С помощью

формул (7) удовлетворим граничным условиям (10), которые теперь будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{QW}(h)W_0(x) + L_{QM}(h)M_0(x) &= 0, \\ L_{MW}(h)W_0(x) + L_{MM}(h)M_0(x) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $L_{MW}(h)$, $L_{MM}(h)$ и т. д. – операторы метода начальных функций (8), определенные при $y = h$.

Введем разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$M_0(x) = L_{QW}(h)F(x), \quad W_0(x) = -L_{QM}(h)F(x). \quad (12)$$

При этом первое из уравнений (11) будет тождественно удовлетворено, а второе примет такой вид:

$$-\frac{1}{4}\alpha^3(2(\nu-1)\alpha h + (\nu+3)\sin 2\alpha h)F(x) = 0. \quad (13)$$

Нулевым корням уравнения (13) отвечает функция

$$F_0(x) = C_4x^3 + C_3x^2 + C_2x + C_1, \quad (14)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные интегрирования. Элементарное решение найдем, подставляя $F(x) = F_0(x)$ в соотношения (12), (7) и раскладывая операторы метода начальных функций в ряды по степеням параметра α ([4]).

$$W(x, y) = 2h\nu(3xC_4 + C_3), \quad \Phi_x(x, y) = 6h\nu C_4. \quad (15)$$

Подставляя $F(x) = e^{\lambda x}$ в (13), получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$L(\lambda) = -\frac{1}{4}(\nu-1)\lambda^3(2(\nu-1)\lambda h + (\nu+3)\sin 2\lambda h) = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) помимо нулевых имеет два действительных и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Ниже для иллюстрации приведены значения пяти ненулевых корней уравнения (16) при $h = 2$, $\nu = \frac{1}{3}$, принадлежащих первой координатной четверти (табл. 1).

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	0,6489347699124498204415	0
2	1,920926875876095578757	0,2534177319545075720067
3	3,502055248275297722192	0,4246957870594158390368
4	5,078718900627479816160	0,5213277636781326527900
5	6,653374600317019693510	0,5900791876440081757655

Для определения точных значений комплексных Λ нужно воспользоваться следующей асимптотической формулой (принципы построения асимптотических формул для корней трансцендентных уравнений можно найти в книге [6]):

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} \approx \frac{1}{h} \left[k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(4\zeta k\pi)}{4k\pi} \right] + i \frac{1}{h} \left[\frac{\ln(4\zeta k\pi)}{2} + \frac{1}{2k} \right], \\ \zeta = \frac{1-\nu}{3+\nu}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Далее для упрощения выкладок корни $\pm\lambda_1$ и $\pm\bar{\lambda}_1$ будем рассматривать как комплексные, а в конечных выражениях перейдем к пределу, полагая, что мнимые части этих корней стремятся к нулю.

Аналогично [10] функцию $F(x)$ теперь можно представить в виде ряда с неопределенными коэффициентами A_k :

$$F(x) = F_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k e^{\bar{\lambda}_k x}, \quad (\lambda_k \in \Lambda, \operatorname{Re} \lambda_k < 0). \quad (18)$$

Подставляя ее в формулы (12), найдем начальные функции, а затем по формулам (7) – прогиб, угол поворота, изгибающий момент и обобщенную поперечную силу ($\operatorname{Re} \lambda_k < 0$):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= 2h\nu(3xC_4 + C_3) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \omega(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \phi_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ K_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \chi_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2} \lambda_k [((\nu + 1) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)) \cos(\lambda_k y) + \\ &+ (\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)]; \\ \phi_y(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2} \lambda_k^2 [(\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - ((\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h) + \sin(\lambda_k h)) \sin(\lambda_k y)]; \\ m_y(\lambda_k, y) &= -\frac{\nu-1}{2} \lambda_k^3 [((\nu + 3) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)) \cos(\lambda_k y) + \\ &+ (\nu - 1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)]; \\ \chi_y(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{2} \lambda_k^5 [y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - h \cos(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)] \end{aligned} \quad (20)$$

– функции Фадля – Папковича.

Выражения для прочих факторов можно получить по формулам (2)–(4), (6):

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k m_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_x(x, y) &= 6h\nu C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \phi_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \phi_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ K_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ Q_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k q_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ Q_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k q_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ T_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k t_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k t_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ T_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k t_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{A}_k t_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
m_x(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu-1)^2}{2} \lambda_k^3 \{ [\lambda_k^h \cos(\lambda_k h) - \sin(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \}; \\
m_{xy}(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu-1)}{2} \lambda_k^3 \{ (\nu-1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - \\
&\quad - [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu-1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \}; \\
\phi_x(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2} \lambda_k^2 \{ [(\nu+1) \sin(\lambda_k h) + (\nu-1) \lambda_k^h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + \\
&\quad + (\nu-1) \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \}; \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\chi_x(\lambda_k, y) = \frac{\nu-1}{2} \lambda_k^4 \{ [(\nu-5) \sin(\lambda_k h) - (\nu-1) \lambda_k^h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - (\nu-1) \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \};$$

$$q_x(\lambda_k, y) = -(\nu-1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y); \quad q_y(\lambda_k, y) = (\nu-1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y);$$

$$t_x(\lambda_k, y) = \frac{(\nu-1)^2}{2} \lambda_k^4 \{ [\sin(\lambda_k h) - \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \};$$

$$t_y(\lambda_k, y) = -\frac{(\nu-1)}{2} \lambda_k^4 \{ (\nu-1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - \\ - [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu-1) \lambda_k y \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \}$$

– функции Фадля – Папковича.

Функцию $F(x)$ можно ввести иначе. Так, чтобы тождественно удовлетворялось второе уравнение (11). Тогда получим другое представление для функций Фадля – Папковича. Одно представление легко выразить через другое. Но оба представления важны при изучении поведения решений вблизи угловых точек границы. Представление функций Фадля – Папковича, используемое в этой статье, назовем первым или S-представлением.

Порождающими функциями для функций Фадля – Папковича (20), (22) называются соответственно функции $\omega(\lambda, y)$, $\phi_y(\lambda, y)$ и т. д., получающиеся из функций Фадля – Папковича путем замены λ_k комплексным параметром λ .

Удовлетворяя с помощью выражений (21) граничным условиям, заданным на торце полуполосы $x = 0$, приходим к задаче определения коэффициентов A_k, \bar{A}_k из двух разложений по двум системам функций Фадля – Папковича, например,

$$\begin{aligned}
M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y), \\
K_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi_x(\lambda_k, y) + \bar{A}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y), \tag{23}
\end{aligned}$$

где $M_x(y) = M_x(0, y)$, $K_x(y) = K_x(0, y)$ – заданные при $x = 0$ изгибающий момент и обобщенная поперечная сила.

При построении биортогональных систем функций нужно знать первые члены разложений в ряды Тейлора по степеням λ порождающих функций, а также функции $L(\lambda)$. Приведем их:

$$L(\lambda) = -h(\nu^2 - 1)\lambda^4 + \frac{h^3(\nu + 3)(\nu - 1)}{3}\lambda^6 + \dots;$$

$$\omega(\lambda, y) = h\nu\lambda^2 - \frac{h(2h^2\nu - h^2 + 3y^2)}{6}\lambda^4 + \dots; \quad \phi_y(\lambda, y) = -hy\lambda^4 + \frac{hy(h^2\nu - y^2\nu + 2y^2)}{6}\lambda^6 + \dots;$$

$$m_y(\lambda, y) = -(\nu^2 + 1)h\lambda^4 + \frac{h(\nu - 1)(h^2\nu + 3y^2)}{3}\lambda^6 + \dots;$$

$$\chi_y(\lambda, y) = \frac{(\nu - 1)^2}{6}hy(h^2 - y^2)\lambda^8 - \frac{hy(h^4 - y^4)(\nu - 1)^2}{60}\lambda^{10} + \dots;$$

$$\begin{aligned}
m_x(\lambda, y) &= \frac{(\nu-1)^2}{6} h(3y^2 - h^2)\lambda^6 + \frac{(\nu-1)^2}{60} h(h^4 - 5y^4)\lambda^8 + \dots; \\
m_{xy}(\lambda, y) &= -hy(\nu-1)\lambda^5 + \frac{(\nu-1)}{6} hy(h^2\nu - \nu y^2 + 2y^2)\lambda^7 + \dots; \\
\phi_x(\lambda, y) &= \nu h\lambda^3 + \frac{h}{6}(h^2 - 3y^2 - 2h^2\nu)\lambda^5 + \dots; \\
\chi_x(\lambda, y) &= -2h(\nu-1)\lambda^5 + \frac{(\nu-1)}{6} h(h^2\nu - 3\nu y^2 + h^2 + 9y^2)\lambda^7 + \dots
\end{aligned} \tag{24}$$

$$q_x(\lambda, y) = -h(\nu-1)\lambda^5 + \frac{(\nu-1)}{6} h(h^2+3y^2)\lambda^7 + \dots; \quad q_y(\lambda, y) = (\nu-1)hy\lambda^6 - \frac{(\nu-1)}{6} hy(h^2+y^2)\lambda^8 + \dots;$$

$$t_x(\lambda, y) = -\frac{(\nu-1)^2}{6} h(3y^2 - h^2)\lambda^7 + \frac{(\nu-1)^2}{60} h(5y^4 - h^4)\lambda^9 + \dots;$$

$$t_y(\lambda, y) = (\nu-1)yh\lambda^6 - \frac{(\nu-1)}{6} hy(2y^2 + h^2\nu - \nu y^2)\lambda^8 + \dots$$

Уравнения для определения биортогональных систем функций $W_k(y)$, $\Phi_{yk}(y)$ и т. д. для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ выглядят следующим образом [9]:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, y)W_k(y)dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 - \lambda_k^2)}; & \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\lambda, y)\Phi_{yk}(y)dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} m_y(\lambda, y)M_{yk}(y)dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; & \int_{-\infty}^{\infty} \chi_y(\lambda, y)K_{yk}(y)dy &= \frac{\lambda^4 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y)M_{xk}(y)dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; & \int_{-\infty}^{\infty} m_{xy}(\lambda, y)M_{xyk}(y)dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\lambda, y)\Phi_{xk}(y)dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)}; & \int_{-\infty}^{\infty} \chi_x(\lambda, y)K_{xk}(y)dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} q_x(\lambda, y)Q_{xk}(y)dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; & \int_{-\infty}^{\infty} q_y(\lambda, y)Q_{yk}(y)dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\
\int_{-\infty}^{\infty} t_x(\lambda, y)T_{xk}(y)dy &= \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; & \int_{-\infty}^{\infty} t_y(\lambda, y)T_{yk}(y)dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Правые части уравнений (25) таковы, что если в них функции, зависящие от λ , разложить в степенные ряды по параметру λ , то минимальные степени λ справа и слева будут равны. Правые части, удовлетворяющие этому условию, назовем **минимальными правыми частями уравнений для определения функций биортогональных систем**. Правые же части, получающиеся из минимальных путем умножения их на λ в некоторой четной степени и необходимые для решения краевой задачи, назовем **базовыми**. Функции $W_k(y)$, $\Phi_{yk}(y)$ и т. д. биортогональных систем можно представить в виде суммы соответствующих финитных $\omega_k(y)$, $\phi_{yk}(y)$ и т. д. (равных нулю вне отрезка $|y| \leq h$) и нефинитных $\omega_k^*(y)$, $\phi_{yk}^*(y)$ и т. д. частей которые, как можно проверить, на $(-\infty, \infty)$ ортогональны ко всем функциям $\{\sin \frac{m}{h}\pi\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos \frac{m}{h}\pi\}_{m=1}^{\infty}$.

При решении краевых задач обычно используются финитные части биортогональных систем функций, поэтому важно знать их явное представление. В частности,

$$m_{xk}(y) = \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h} - \frac{1}{2}(\delta(y-h) + \delta(y+h)), \quad \chi_{xk}(y)(y) = -\frac{1}{2} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k h}, \tag{26}$$

где δ – дельта-функция. Формулы (26) строятся следующим образом. Например, построим функцию $m_{xk}(y)$. Приняв в уравнении (25₅) $\lambda = \frac{m}{h}\pi = q_m$ для каждой пары номеров $k, m = 1, 2, \dots$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(q_m, y) M_{xk}(y) dy = \frac{q_m^2 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2} \quad (27)$$

или

$$\frac{(\nu - 1)^2}{2} q_m^4 h (-1)^m \int_{-h}^h \cos(q_m y) m_{xk}(y) dy = \frac{-\frac{1}{2}(\nu - 1)^2 q_m^6 h}{q_m^2 - \lambda_k^2}.$$

Отсюда

$$\int_{-h}^h \cos(q_m y) m_{xk}(y) dy = -\frac{(-1)^m q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (28)$$

Учитывая, что

$$\int_{-h}^h \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy = -\frac{2\lambda_k (-1)^m \sin(\lambda_k h)}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad -\frac{(-1)^m q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} = -(-1)^m - \frac{(-1)^m \lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2},$$

из равенства (28) получим $m_{xk}(y)$.

В силу строения правой части равенства (27) **базовой** правой частью уравнений биортогональной системы $M_{xk}(y)$ будет

$$R_k(\lambda) = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2},$$

то есть тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(\lambda, y) M_{xk}(y) dy = R_k(\lambda). \quad (29)$$

В силу уравнений и равенств (1₂), (2₁), (1₃), (3₃), (3₄), (3₅), (6₁), (1₁), (6₂), (2₁), а также выражений (19), (21) последовательно получим уравнения биортогональных систем с **базовыми** правыми частями для остальных факторов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t_x(\lambda, y) T_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} m_{xy}(\lambda, y) M_{xyk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} q_x(\lambda, y) Q_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} t_y(\lambda, y) T_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, y) W_k(y) dy &= R_k(\lambda); & \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\lambda, y) \Phi_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\lambda, y) \Phi_{yk}(y) dy &= R_k(\lambda); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_x(\lambda, y) K_{xk}(y) dy = \lambda R_k(\lambda); \quad \int_{-\infty}^{\infty} q_y(\lambda, y) Q_{yk}(y) dy = \lambda^2 R_k(\lambda);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_y(\lambda, y) K_{yk}(y) dy = \lambda^2 R_k(\lambda); \quad \int_{-\infty}^{\infty} m_y(\lambda, y) M_{yk}(y) dy = \lambda^2 R_k(\lambda).$$

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (29), (30₈) с учетом первого члена разложения функции $L(\lambda)$ в ряд Тейлора ($L(\lambda) = L'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)$) получают следующие соотношения биортогональности для каждой пары номеров $k, m = 1, 2, \dots$, в частности:

$$\int_T m_x(\lambda_m, y) M_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\lambda_m L'(\lambda_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \quad (31)$$

$$\int_T \chi_x(\lambda_m, y) K_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\lambda_m^2 L'(\lambda_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y) \bar{M}_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_m L'(\bar{\lambda}_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T \chi_x(\bar{\lambda}_m, y) \bar{K}_{xk}(y) dy = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_m^2 L'(\bar{\lambda}_m)}{2}, & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0, & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

где $L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_m$. Для комплексных значений λ прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (25) нужно заменить Т-образным контуром, лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-h, h]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [2].

Функции $\bar{W}_k(y)$, $\bar{\Phi}_{yk}(y)$ и т. д., $\bar{\omega}_k(y)$, $\bar{\phi}_{yk}(y)$ и т. д., в отличие от соответствующих функций без черты, зависят от $\bar{\lambda}_k$.

Отметим, что для каждой пары номеров $k, m = 1, 2, \dots$

$$\int_T m_x(\bar{\lambda}_m, y) M_{xk}(y) dy = \int_T m_x(\lambda_m, y) \bar{M}_{xk}(y) dy = 0;$$

$$\int_T \chi_x(\bar{\lambda}_m, y) K_{xk}(y) dy = \int_T \chi_x(\lambda_m, y) \bar{K}_{xk}(y) dy = 0. \quad (32)$$

Умножая равенства (23) соответственно на $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$ и $K_{xk}(y) + \bar{K}_{xk}(y)$ и интегрируя обе части полученных равенств, с учетом соотношений (31), (31) для каждого номера $k = 1, 2, \dots$, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_1^* &= A_k N_k + \bar{A}_k \bar{N}_k, \\ \Delta_2^* &= \lambda_k A_k N_k + \bar{\lambda}_k \bar{A}_k \bar{N}_k, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$N_k = \frac{\lambda_k L'(\lambda_k)}{2}, \quad \bar{N}_k = \frac{\bar{\lambda}_k L'(\bar{\lambda}_k)}{2};$$

$$\Delta_1^*(k) = \Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k), \quad \Delta_2^*(k) = \Delta_2(k) + \bar{\Delta}_2(k); \quad (34)$$

$$\Delta_1(k) = \int_{-h}^h M_x(y) m_{xk}(y) dy, \quad \bar{\Delta}_1(k) = \int_{-h}^h M_x(y) \bar{m}_{xk}(y) dy; \quad (35)$$

$$\Delta_2(k) = \int_{-h}^h K_x(y) \chi_{xk}(y) dy, \quad \bar{\Delta}_2(k) = \int_{-h}^h K_x(y) \bar{\chi}_{xk}(y) dy. \quad (36)$$

Поочередно умножая первое уравнение системы (32) на $\bar{\lambda}_k$ и λ_k и вычитая второе уравнение, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим решение системы (32)

$$A_k = \frac{\Delta_2^*(k) - \Delta_1^*(k)\bar{\lambda}_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) N_k}, \quad \bar{A}_k = -\frac{\Delta_2^*(k) - \Delta_1^*(k)\lambda_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) \bar{N}_k}. \quad (37)$$

Исследуем разложения (23) с коэффициентами (37) на торце $x = 0$ полуполосы. Например, первое разложение

$$M_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta_2^*(k) - \Delta_1^*(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k) - \Delta_1^*(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k}. \quad (38)$$

Сравним его с разложением Лагранжа этой же функции:

$$M_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_1^*(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1^*(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k}. \quad (39)$$

Учитывая, что $\Delta_1^*(k) = \Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k)$, представим разложение (38) в виде суммы разложений следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k))\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{(\Delta_1(k) + \bar{\Delta}_1(k))\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\bar{\Delta}_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\}. \end{aligned}$$

Вычитая и прибавляя ряд Лагранжа (39), получим:

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\bar{\Delta}_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\bar{\Delta}_1(k)(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\bar{\Delta}_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\bar{\Delta}_1(k)\lambda_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\}. \end{aligned}$$

После преобразования получим:

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} - \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Или

$$\begin{aligned}
M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} + \bar{\Delta}_1(k) \frac{m_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\bar{N}_k} \right\}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Последняя группа слагаемых в выражении (40) представляет собой разложение Лагранжа (39), а проекции первой и второй фигурных скобок на вещественное направление, т. е. на сумму векторов $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$, как не трудно проверить, дают ноль. Поэтому выражения, заключенные в каждой из этих скобок, можно условно трактовать как суммы чисто мнимых векторов.

Пары дробей в фигурных скобках ряда (41) представляют собой сопряженные выражения, в дальнейшем условимся, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ их суммы обозначать через $2Re$. Тогда выражения (41) примут более простой вид:

$$\begin{aligned}
M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\Delta_2^*(k)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\} - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\Delta_1(k)\lambda_k + \bar{\Delta}_1(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta_1(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Такое же преобразование можно сделать и по отношению ко второму разложению (23) с коэффициентами (37).

Раскладываемые функции $M_x(y)$ и $K_x(y)$ должны быть самоуравновешены, так как функции Фадля – Папковича по которым они раскладываются, тоже самоуравновешены.

Известно [3], что ряды (23) с коэффициентами (37) плохо сходятся к раскладываемым функциям, а для кусочно-непрерывных функций они могут и вовсе расходиться. Чтобы понять, почему так происходит, рассмотрим подробнее разложение функции $M_x(y)$ с коэффициентами (37). Для упрощения выкладок будем считать, что функция $K_x(y) = 0$. В этом случае все числа $\Delta_2(k) = \bar{\Delta}_2(k) = 0$. Тогда в силу (37) получим

$$A_k = \frac{-(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k))\bar{\lambda}_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) N_k}, \quad \bar{A}_k = -\frac{-(\Delta(k) - \bar{\Delta}(k))\lambda_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) \bar{N}_k}, \tag{43}$$

где

$$\Delta(k) = \Delta_1(k), \quad \bar{\Delta}(k) = \bar{\Delta}_1(k).$$

Следуя соотношению (42), сумму первого ряда (23) перепишем следующим образом:

$$M_x(y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\Delta(k)\lambda_k + \bar{\Delta}(k)\bar{\lambda}_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k} \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta(k) \frac{m_x(\lambda_k, y)}{N_k} \right\}. \tag{44}$$

Последний ряд в формуле (44) является рядом Лагранжа (39) раскладываемой функции $M_x(y)$, а сумма первого ряда равна нулю, так как равны нулю его проекции на полную систему вещественных подпространств $M_{xk}(y) + \bar{M}_{xk}(y)$ (см. (41)).

Именно первый ряд в формуле (44) (бесконечная сумма которого эквивалентна нулю) может исказить картину сходимости биортогональных разложений по функциям Фадля – Папковича, поскольку ряд Лагранжа в формуле (44) сходится не хуже тригонометрического ряда для функции $M_x(y)$, по крайней мере, внутри отрезка $|y| \leq h$ (что было показано в [8]). Поэтому, для получения надежных разложений по функциям Фадля – Папковича, в них необходимо выделять ряды, эквивалентные нулю. Эти ряды названы нуль-рядами [8].

Нуль-ряды в решениях (19), (21) нужно выделять не только на торце полуполосы, но и внутри ее (т. е. при всех значениях x), приводя тем самым биортогональные разложения к разложениям Лагранжа в каждом сечении полуполосы.

Покажем как происходит выделение нуль-ряда, например, в случае функции $M_y(x, y)$. Подставляя выражения (43) в (19₃) получим

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \left(\frac{m_y(\lambda_k, y) \bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) N_k} + \frac{m_y(\bar{\lambda}_k, y) \lambda_k e^{\bar{\lambda}_k x}}{(\bar{\lambda}_k - \lambda_k) \bar{N}_k} \right).$$

Или

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x} m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k - \bar{\lambda}_k N_k} \right). \quad (45)$$

С учетом **базовой** правой части уравнений биортогональной системы $M_{yk}(y)$ (см. (30₁₁)), умножая числитель и знаменатель на λ_k^2 , имеем

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left(\frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x} m_y(\lambda_k, y)}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) \lambda_k^2 N_k} \right).$$

Вводя обозначения $\lambda_k = a_k + ib_k$, сделаем следующие преобразования под знаком суммы:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{1} \cdot \frac{\lambda_k e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} = \\ &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{2} \cdot \frac{a_k + ib_k}{b_k i} e^{a_k x} \{ \cos b_k x + i \sin b_k x \} = \\ &= \frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k}{2} e^{a_k x} \left\{ \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) + i \left(\sin b_k x - \frac{a_k \cos b_k x}{b_k} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Спроектировав (46) на вещественное подпространство, т. е. на сумму векторов $M_{yk}(y) + \bar{M}_{yk}(y)$, как это делалось выше, для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ получим:

$$-2Re \left(\frac{(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} \right) = -(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k e^{a_k x} \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right). \quad (47)$$

Заметим, что (см. (45), (46))

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -i(\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)) \bar{\lambda}_k \lambda_k e^{a_k x} \left(\sin b_k x - \frac{a_k \cos b_k x}{b_k} \right) \frac{m_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}}{\lambda_k^2 N_k} \right\} = 0. \quad (48)$$

Итак, ненулевую часть ряда (45) в силу равенства (47) можно записать следующим образом:

$$M_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k e^{a_k x} \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \frac{m_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} \right\}.$$

Учитывая, что для первого действительного корня λ_1 справедливо $b_k \rightarrow 0$, получим равенства (49₄) (см. ниже).

Аналогично подставляя выражения (43) в другие формулы (19), (21) и избавляясь в них от нуль-рядов с учетом (30) получим искомые выражения для прогиба, поперечных сил, углов поворота и моментов в полуполосе ($a_k = Re \lambda_k$, $b_k = Im \lambda_k$, $a_k < 0$):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= 2h\nu(3xC_4 + C_3) + \frac{\omega(\lambda_1, y) e^{a_1 x}}{N_1} \Delta(1) (1 - a_1 x) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\omega(\lambda_k, y) e^{a_k x}}{N_k} \Delta(k) \left(\cos b_k x - a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x(x, y) &= 6h\nu C_4 - \frac{\phi_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x + \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
K_x(x, y) &= -\frac{\chi_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
M_y(x, y) &= -\frac{m_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 (1 + a_1 x) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
\Phi_y(x, y) &= \frac{\phi_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{N_1} \Delta(1) (1 - a_1 x) + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\phi_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{N_k} \Delta(k) \left(\cos b_k x - a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
M_x(x, y) &= \frac{m_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{N_1} \Delta(1) (1 - a_1 x) + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{N_k} \Delta(k) \left(\cos b_k x - a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
K_y(x, y) &= -\frac{\chi_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 (1 + a_1 x) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
M_{xy}(x, y) &= -\frac{m_{xy}(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{m_{xy}(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
Q_y(x, y) &= -\frac{q_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 (1 + a_1 x) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{q_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}; \\
Q_x(x, y) &= -\frac{q_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{q_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
T_x(x, y) &= -\frac{t_x(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{\lambda_1 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_x(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{\lambda_k N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}; \\
T_y(x, y) &= -\frac{t_y(\lambda_1, y)e^{a_1 x}}{(\lambda_1)^2 N_1} \Delta(1) \lambda_1 \bar{\lambda}_1 (1 + a_1 x) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_y(\lambda_k, y)e^{a_k x}}{(\lambda_k)^2 N_k} \Delta(k) \lambda_k \bar{\lambda}_k \left(\cos b_k x + a_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Приведем примеры расчетов при $\nu = \frac{1}{3}$, $h = 2$, $E = 0,69 \cdot 10^5$ МПа (материал – катанный алюминий).

Пример 1. $M_x(y) = \frac{h(\nu-1)^2(3y^2-h^2)}{6}$. Сечения $x = 0$ (рис. 2а) и $x = 1$ (рис. 2б). Сечения $y = 0$ (средняя линия полуполосы – рис. 3а) и $y = 2$ (край полуполосы – рис. 3б). Прогиб $w(x, y)$ (рис. 4).

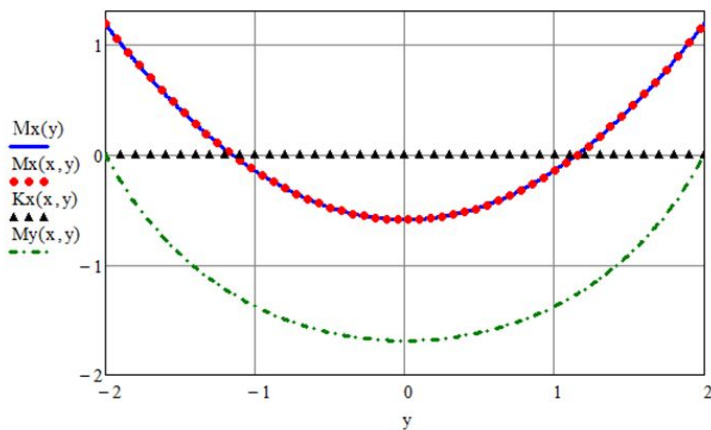


Рис. 2а

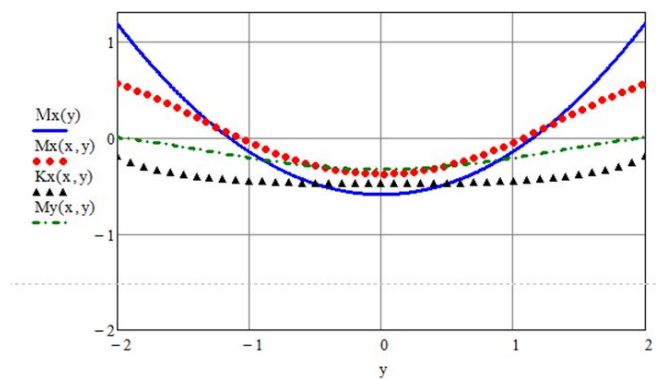


Рис. 2б

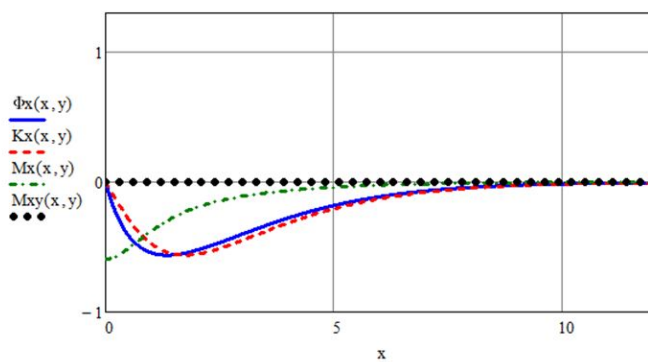


Рис. 3а

Пример 2. $M_x(y) = \cos(\frac{\pi y}{h})$. Сечения $x = 0$ (рис. 5а) и $x = 1$ (рис. 5б). Сечения $y = 0$ (средняя линия полуполосы – рис. 6а) и $y = 2$ (край полуполосы – рис. 6б). Прогиб $w(x, y)$ (рис. 7).

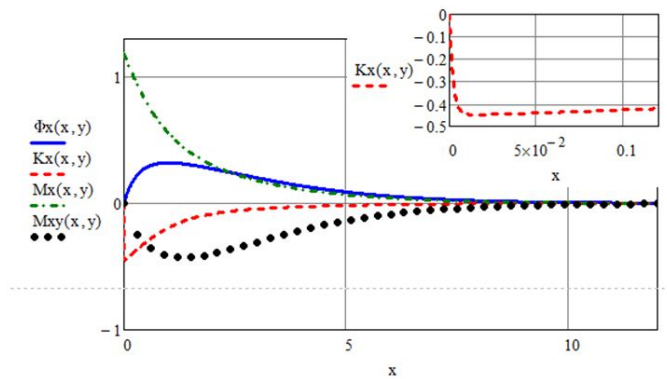
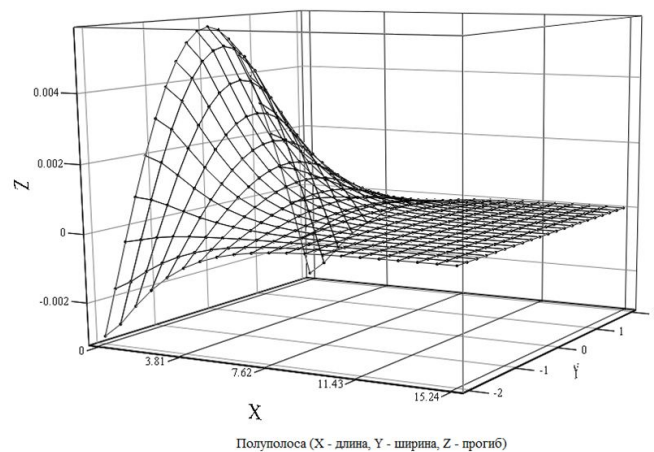


Рис. 3б



Полуполоса (X - длина, Y - ширина, Z - прогиб)

Рис. 4

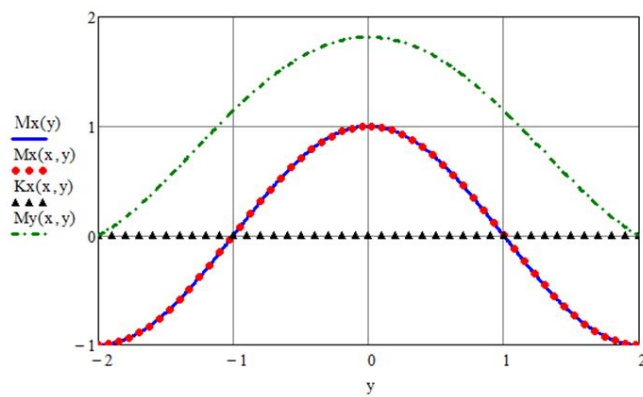


Рис. 5а

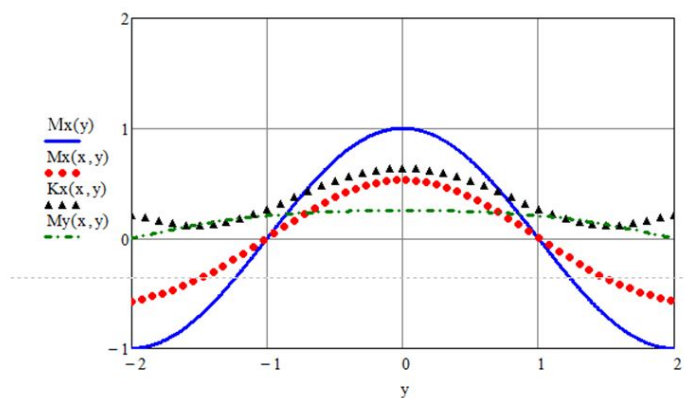


Рис. 5б

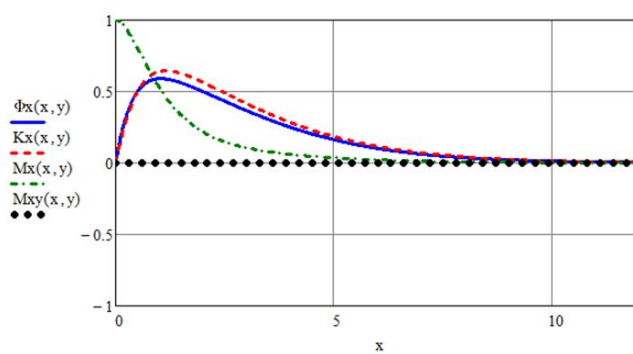


Рис. 6а

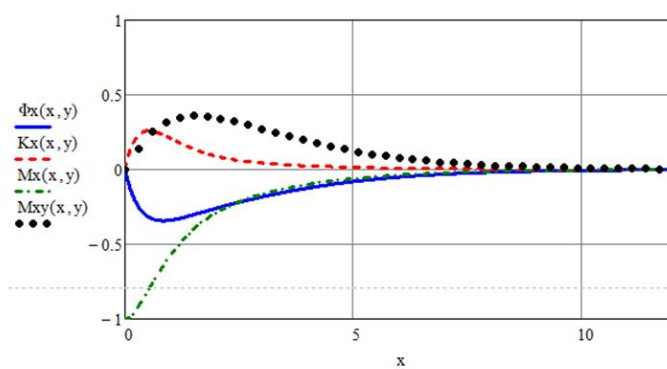


Рис. 6б

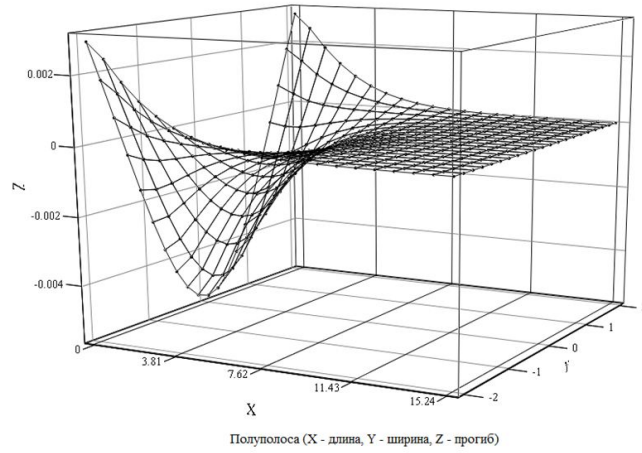


Рис. 7

Пример 3. $M_x(y) = y^4 - 1, 2y^2h^2 + 0, 2h^4$ имеем. Сечения $x = 0$ (рис. 8а) и $x = 1$ (рис. 8б). Сечения $y = 0$ (средняя линия полуполосы – рис. 9а) и $y = 2$ (край полуполосы – рис. 9б). Прогиб $w(x, y)$ (рис. 10).

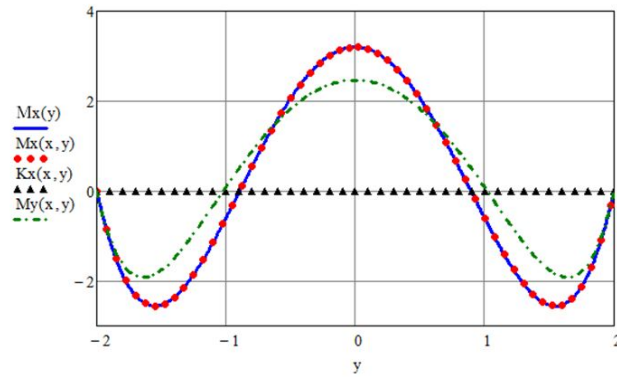


Рис. 8а

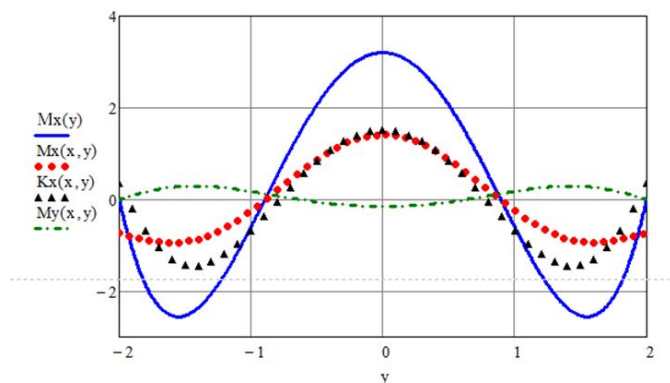


Рис. 8б

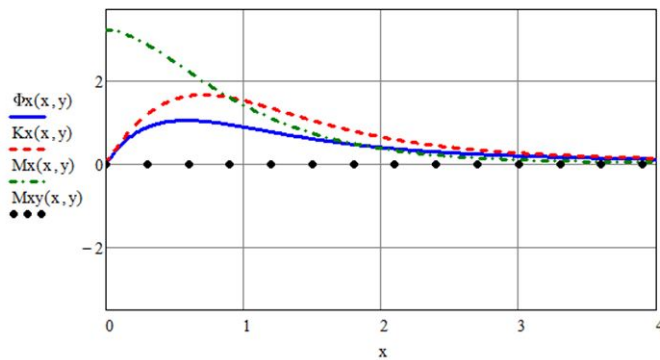


Рис. 9а

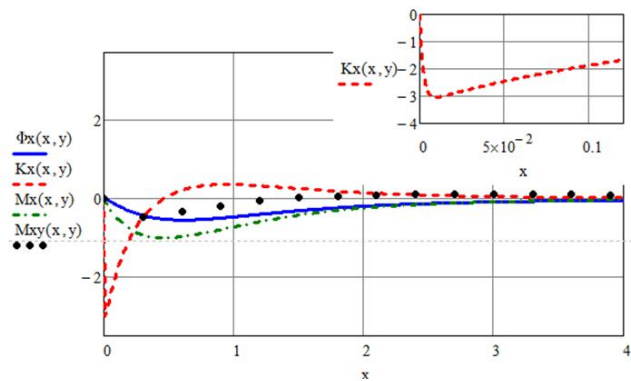


Рис. 9б

Результаты исследований и их обсуждение. Построены примеры точных аналитических решений симметричной краевой задачи изгиба полуполосы, продольные стороны которой свободны от закрепления, а на торце заданы самоуравновешенный изгибающий момент и равная нулю обобщенная поперечная сила.

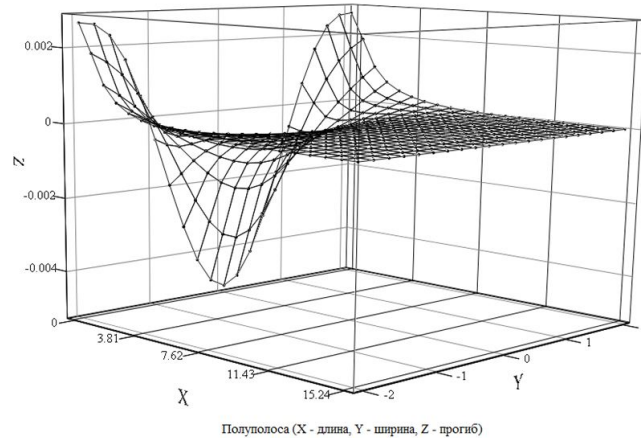


Рис. 10

Резюме. Аналогично могут быть построены аналитические решения для полуполосы со свободными продольными сторонами при других граничных условиях на торце полуполосы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям / М. Д. Коваленко // Доклады РАН. – 1997. – Т. 352. – № 4. – С. 480–482.
- [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МГТ. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.
- [4] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
- [5] Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
- [6] Маркушевич, А. И. Целые функции. Элементарный очерк / А. И. Маркушевич. – М. : Наука, 1965. – 108 с.
- [7] Кашин, Б. С. Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян. – М. : АФЦ, 1999. – 560 с.
- [8] Коваленко, М. Д. Однородные решения теории упругости. Базисные свойства / М. Д. Коваленко, Н. В. Клейн, С. Н. Попов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11. – № 2. – С. 209–225.

Абруков Денис Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: AbrukovDA@yandex.ru

D. A. Abrukov

**SEMI-STRIP BEND WITH THE FREE LONGITUDINAL EDGES AT WHICH
END FACE THE MOMENT OF DEFLECTION AND THE GENERALIZED
TRANSVERSAL FORCE ARE SET. PRECISE SOLUTION OF A BOUNDARY
VALUE PROBLEM**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The precise analytical solution of a boundary value problem of a bend of a thin plate in the form of a semi-strip which longitudinal parties are free is for the first time constructed, and at an end face the moment of deflection and the generalized transversal force are set. It is represented in ranks on Fadde – Papkovich functions. Required coefficients of ranks are by means of systems of functions, biorthogonal to Fadde – Papkovich functions.

Keywords: plate bending, Fadde – Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] *Kovalenko, M. D.* Lagrange’s decomposition and uncommon representations of zero on the uniform to decisions / M. D. Kovalenko // Reports of the Russian Academy of Sciences . – 1997. – Vol. 352. – № 4. – P. 480–482.
- [2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadlya – Papkovich’s functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.
- [3] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.
- [4] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
- [5] *Tymoshenko, S. P.* Plates and covers / S. P. Tymoshenko, S. Voynovsky-Krieger. – M. : Nauka, 1966. – 636 p.
- [6] *Markushevich, A. I.* Entire functions. elementary outline / A. I. Markushevich. – M. : Nauka, 1965. – 108 p.
- [7] *Kashin, B. S.* Orthogonal ranks / B. S. Kashin, A. A. Saakian. – M. : AFTS, 1999. – 560 p.
- [8] *Kovalenko, M. D.* Uniform solutions of the theory of elasticity. Basic properties / M. D. Kovalenko, N. V. Klein, S. N. Popov // Mechanics of composite materials and designs. – 2005. – Vol. 11. – № 2. – P. 209–225.

Abrukov, Denis Alexandrovich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов

УСТОЙЧИВОСТЬ МОНОЛИТНОЙ КРЕПИ ПОДЗЕМНОГО НЕФТЕХРАНИЛИЩА СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОЙ ПОРИСТОСТИ МАТЕРИАЛА

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

Аннотация. Построена математическая модель напряженно-деформированного состояния монолитной крепи подземной сферической полости для материалов с пористой структурой, скелет которой обладает упруго-вязко-пластическими свойствами. В рамках точных трехмерных линеаризованных уравнений исследована устойчивость основного состояния сферической оболочки, являющейся крепью подземной полости глубокого заложения. Дана оценка влияния на величины основного напряженно-деформированного состояния физико-механических и геометрических параметров конструкции.

Ключевые слова: упругость, пластичность, вязкость, теплопроводность, большие деформации.

УДК: 539.374

В настоящее время актуальными задачами механики горных пород являются строительство грандиозных сооружений, интенсификация отборов нефти, проходка глубоких шахт, борьба с горными ударами, проблемы прогноза землетрясений и многие аспекты динамики земной коры, сейсмобезопасность, сейсморазведка, взрывные подземные работы, проблемы создания подземных хранилищ и охраны окружающей среды от загрязнения. Для решения всех этих вопросов необходимы представления о разрушении горных массивов, а также об устойчивости крепей подземных сооружений.

В настоящей работе исследуется вопрос об устойчивости основного напряженно-деформированного состояния (далее НДС) монолитной крепи подземной сферической полости глубокого заложения. Материал крепи моделируется пористой средой, сжатый скелет которой обладает одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами. Реологическая схема такой среды согласно [1] представлена на рисунке 1.

Модель представляет собой последовательное соединение пластической – « p » и упругой – « e » частей. Далее индексы « p » и « e » обозначают, что соответствующие величины относятся к упругой или пластической области тела соответственно. Пластическая часть состоит из пластического элемента, характеризуемого пределом текучести k , последовательно соединенного с параллельной связкой вязкого элемента с коэффициентом вязкости η и упрочняющегося упругого элемента с коэффициентом упрочнения s . Упругая часть состоит из упругого сжимаемого элемента «1», характеризуемого коэффициентами Лямэ λ_1, μ_1 , параллельно соединенного со связкой «2». Связка «2» представляет собой последовательное соединение

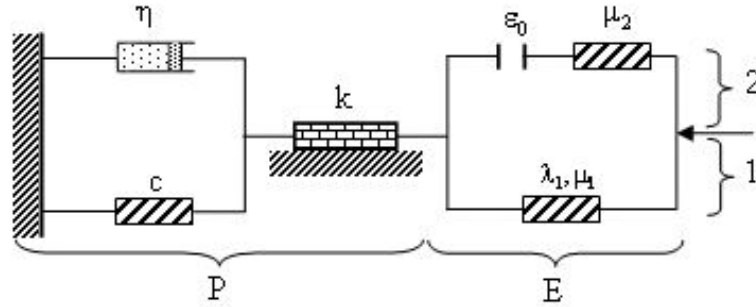


Рис. 1. Реологическая схема пористого упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела

элемента жесткого контакта, характеризуемого величиной начальной пористости - ε_0 , и упругого несжимаемого элемента с коэффициентом упругости μ_2 .

Будем полагать, что процесс изменения пористости материала до нулевого значения происходит в фазе упругого деформирования матрицы, а сжатый скелет ведет себя как упруго-вязко-пластическое тело.

Напряжения в параллельном соединении «1-2» находятся как сумма напряжений элемента «1» и последовательной связки «2».

$$\sigma_j^\beta = (\sigma_j^\beta)_1 + (\sigma_j^\beta)_2. \quad (1)$$

Связь между напряжениями и деформациями в упругом элементе «1» определим законом Гука для сжимаемого тела

$$(\sigma_j^\beta)_1 = \lambda_1 \varepsilon_\alpha^e g_j^\beta + 2\mu_1 \varepsilon_j^\beta, \quad (2)$$

где g_j^β , ε_j^β смешанные компоненты метрического тензора и тензора упругих деформаций соответственно.

Уравнение жесткого контакта, входящего в последовательное соединение «2», согласно [2] имеет вид

$$(\sigma_j^\beta)_2 (\varepsilon_\alpha^e + \varepsilon_0) = 0, \quad (3)$$

причем $(\sigma_j^\beta)_2 = 0$ до полного сжатия пор, и $\varepsilon_\alpha^e = -\varepsilon_0$ после.

Связь между напряжениями и деформациями в упругом элементе, входящем в «2», определим законом Гука для несжимаемого тела

$$(s_j^\beta)_2 = 2\mu_2 (\varepsilon_j^\beta)_2, \quad (4)$$

где $(s_j^\beta)_2 = (\sigma_j^\beta)_2 - \frac{1}{3} (\sigma_k^k)_2 g_j^\beta$ - компоненты девиатора тензора напряжений.

С учетом (3) и (4) зависимость напряжений через деформации в последовательном соединении «2» определяется соотношением

$$\left(\sigma_j^\beta\right)_2 = \begin{cases} 0, & -\varepsilon_\alpha^e < \varepsilon_0, \\ 2\mu_2 \left(\left(\varepsilon_j^\beta\right)^e - \left(\varepsilon_j^\beta\right)^0 \right) + \frac{1}{3} (\sigma_\alpha^\alpha)_2 g_j^\beta, & -\varepsilon_\alpha^e \geq \varepsilon_0 \end{cases}, \quad (5)$$

где $\left(\varepsilon_j^\beta\right)^0$ – деформации компонента «2» до момента полного сжатия пор и $\varepsilon_\alpha^0 = -\varepsilon_0$ – после.

В зоне пластического деформирования сжатого скелета будем использовать модель несжимаемого упруго-вязко-пластического тела с поверхностью нагружения

$$F \equiv \left(s_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta - \eta e_j^\beta \right) \left(s_\beta^j - c \varepsilon_\beta^j - \eta e_\beta^j \right) - k^2 = 0, \quad (6)$$

где e_j^β – компоненты тензора скоростей пластических деформаций.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой ε_{ij}^e и пластической ε_{ij}^p составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (7)$$

причем упругие деформации $\varepsilon_{ij}^e = \left(\varepsilon_{ij}^e\right)_1 = \left(\varepsilon_{ij}^e\right)_2$ связаны с напряжениями соотношениями (2) и (5). Пластическая составляющая объемной деформации удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{nn}^p = 0. \quad (8)$$

Тензор скоростей пластических деформаций связан тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$e_j^\beta = \psi \left(s_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta - \eta e_j^\beta \right), \quad (9)$$

если выполняется условие пластичности (6). Здесь ψ – положительный скалярный множитель.

Первым этапом решения задачи устойчивости является определение основного НДС рассматриваемой конструкции. Ниже рассмотрим вопрос об определении НДС сферической оболочки (рисунок 2), являющейся крепью подземной сферической полости. Обозначим через b и a соответственно внешний и внутренний радиусы крепи. Действие массива горных пород на крепь заменим сжимающей нагрузкой интенсивностью q_b равномерно распределенной по внешней поверхности оболочки. Сжимающая нагрузка интенсивностью q_a равномерно распределенная по внутренней поверхности моделирует собой давление жидкости или газа на крепь.

Процесс деформирования пористого материала разделим на два взаимосвязанных этапа. Первый – упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй – неупругое деформирование сжатого скелета с упруго-вязко-пластическими свойствами. В связи с этим внешнюю нагрузку будем представлять в виде суммы $q_b = q_1 + q_2$.

НДС крепи сферической полости на первом этапе в осесимметричном случае в сферической системе координат (r, θ, ϕ) определяется соотношениями

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \varepsilon_r = C_1 - \frac{2C_2}{r^3}, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = C_1 + \frac{C_2}{r^3}, \quad (10)$$

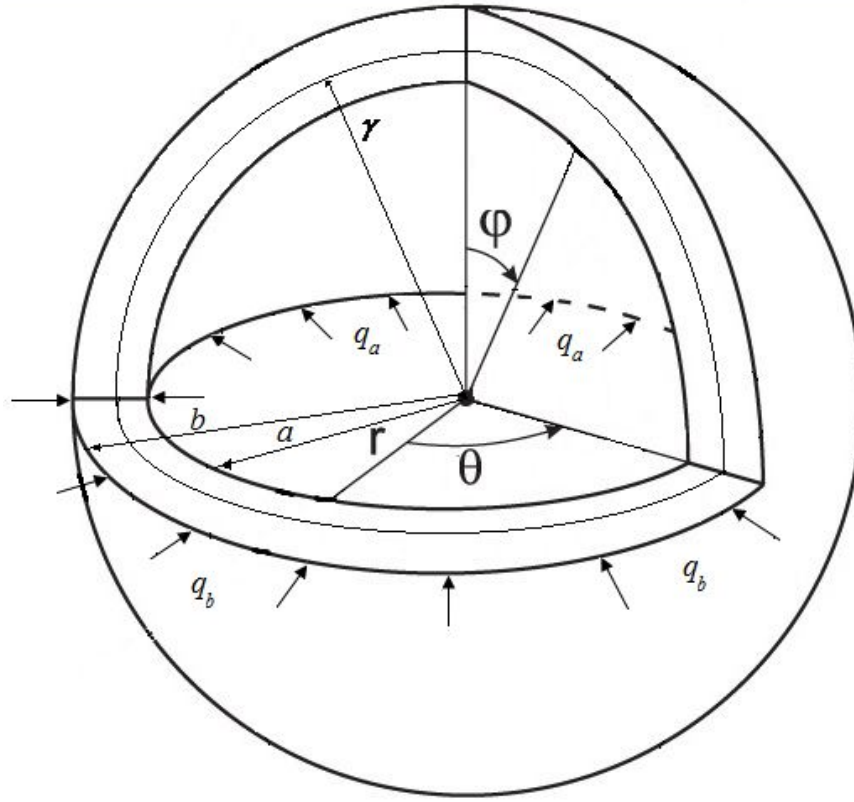


Рис. 2. Монолитная крепь подземной сферической полости под действием всестороннего сжатия

$$\sigma_r = C_1(3\lambda_1 + 2) - \frac{4C_2}{r^3}, \sigma_\theta = \sigma_\phi = C_1(3\lambda_1 + 2) + \frac{2C_2}{r^3}, \quad (11)$$

где $C_1 = \frac{q_1}{(3\lambda_1 + 2)(a^3 - 1)}$, $C_2 = -\frac{q_1 a^3}{4(1 - a^3)}$, u – радиальная составляющая вектора перемещений.

В (10), (11) и далее все соотношения записаны в безразмерном виде, при этом все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к величине μ_1 , а имеющие размерность длины – к радиусу b .

Достижение пористости материала нулевого значения (достижение объемной деформацией величины $-\varepsilon_0$) при упругом деформировании материала, как следует из (10), (11), происходит одновременно во всей оболочке под действием нагрузки, определяемой равенством

$$\tilde{q}_1 = \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \cdot (1 - a^3). \quad (12)$$

При этом НДС (10), (11) переписывается в виде

$$u = -\frac{\varepsilon_0}{3} \cdot \left(r + \frac{(3\lambda_1 + 2)}{4} \cdot \frac{a^3}{r^2} \right),$$

$$\varepsilon_r = -\frac{\varepsilon_0}{3} \left(1 - \frac{(3\lambda_1 + 2)}{2} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right), \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = -\frac{\varepsilon_0}{3} \left(1 + \frac{(3\lambda_1 + 2)}{4} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right), \quad (13)$$

$$\sigma_r = -\frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right), \sigma_\theta = \sigma_\phi = -\frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right). \quad (14)$$

Таким образом, если $q_b < \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \cdot (1 - a^3)$, то полного закрытия пор не происходит, и материал ведет себя как сжимаемая упругая среда с параметрами $\lambda_1, \mu_1 = 1, \varepsilon_0$.

Если $q_b = \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \cdot (1 - a^3)$, то во всей крепи пористость достигнет нулевого значения (случай сжатого скелета); и при дальнейшем росте q_b (при увеличении части нагрузки q_2) возникнет и будет расти около внутренней поверхности сферической крепи пластическая зона, препятствовать развитию которой будут вязкость η и упрочнение (c) материала, то есть сжатый скелет будет деформироваться как несжимаемая упруго-вязко-пластическая среда с параметрами $\mu = 1 + \mu_2, k, c, \eta$.

Для описания поведения сжатого скелета будем использовать модель среды, учитывающую упрочняющиеся упруго-вязко-пластические свойства материала с функцией нагружения вида (6).

В этом случае сплошная среда разделяется на две зоны – упругую и пластическую, в каждой из которых значения перемещений, деформаций и напряжений в точках среды раскладываются на компоненты: а) пористого сжатия, определяемые соотношениями (13), (14); б) упруго-пластического сжатия (которые для деформаций в пластической зоне в свою очередь складываются из упругих и пластических компонент), определяемые из решения упруго-пластической задачи с вычетом из внешней нагрузки той ее части, которая идет на полное сжатие пор (12). Поэтому граничные условия для этих компонент запишутся в виде

$$\sigma_r|_{r=1} = -\left(q_b - \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \cdot (1 - a^3)\right), \sigma_r|_{r=a} = -q_a. \quad (15)$$

НДС сжатого скелета монолитной крепи сферической полости определяется в виде:

- в упругой области ($\gamma < r < 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{16}{3}D\mu \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \cdot \left(1 - a^3 + \mu_0 a^3 \left(1 - \frac{1}{r^3}\right)\right) - q_b, \\ \sigma_\theta = \sigma_\phi &= \frac{8}{3}D\mu \left(\frac{1}{r^3} + 2\right) + \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \cdot \left(1 - a^3 + \frac{\mu_0 a^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} + 2\right)\right) - q_b; \end{aligned} \quad (16)$$

- в пластической области ($a < r < \gamma$)

$$\varepsilon_r^p = -2\varepsilon_\theta^p = -2\varepsilon_\phi^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c + 2\mu)} \cdot \left(\frac{\gamma^3}{r^3} - 1\right) \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t}\right), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q_a + \frac{12}{\sqrt{3}} \frac{\chi \mu k}{(c + 2\mu)} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t}\right) \left(\frac{\gamma^3}{3} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r^3}\right) + \ln \frac{a}{r}\right) + \\ &\quad + \left(4D\mu + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 (3\lambda_1 + 2) a^3}{3}\right) \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r^3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \sigma_\phi &= -q_a + \frac{6\chi \mu k}{\sqrt{3}(c + 2\mu)} \cdot \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t}\right) \left(\frac{\gamma^3}{3} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2}{a^3}\right) - 1 + 2 \ln \frac{a}{r}\right) + \\ &\quad + \left(2D\mu + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 (3\lambda_1 + 2) a^3}{6}\right) \left(\frac{2}{a^3} + \frac{1}{r^3}\right). \end{aligned}$$

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях определяются соотношениями

$$u = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{3}r, \varepsilon_r = -\frac{2D}{r^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{2D}{r^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}. \quad (18)$$

Здесь в (16) – (18)

$$D = -\frac{\eta\chi k}{2\sqrt{3}\mu(c+2\mu)} \cdot \left(3\gamma^2\dot{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta}\gamma^3 \right) - \frac{\mu_0\varepsilon_0(3\lambda_1+2)}{12\mu},$$

$$\chi = \text{sign} \left(q_a - q_b + \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1+2) \cdot (1-a^3) \right).$$

Радиус γ раздела зон упругого и пластического деформирования с учетом (16) и (17) определяется из решения дифференциального уравнения

$$q_b - q_a + \frac{12}{\sqrt{3}} \frac{\chi k \mu}{(c+2\mu)} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\gamma^3}{a^3} - 1 \right) + \ln \frac{a}{\gamma} \right) -$$

$$-\frac{2\eta\chi k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \cdot \left(3\gamma^2\dot{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta}\gamma^3 \right) \left(\frac{1}{a^3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3\gamma^3} \right) -$$

$$-\frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1+2) \cdot \left(1 - a^3 + \mu_0 \cdot \left(\frac{1}{a^3} - \frac{7}{3} + \frac{1}{3\gamma^3} + a^3 \right) \right) = 0. \quad (19)$$

Для определения НДС этой задачи использовались уравнения равновесия, условие пластичности (6), соотношения ассоциированного закона пластического течения (9), соотношения, связывающие полные упругие и пластические деформации (7), связь между напряжениями и деформациями в виде (2), (4), (5), граничные условия (15), условия непрерывности компонент напряжений на упруго-пластической границе и условие совместности $\varepsilon_r^p|_{r=\gamma} = 0$.

Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 3, 4.

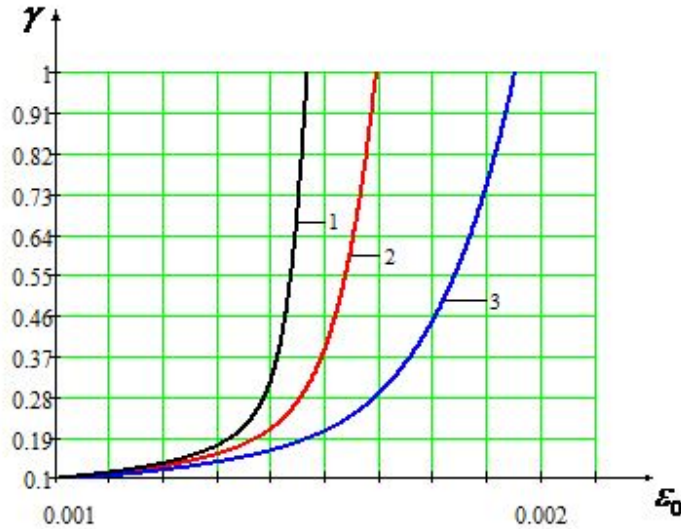


Рис. 3. Зависимость радиуса упругопластической границы γ от начального раствора пор ε_0

На рисунке 3 кривая 1 соответствует $k = 0.5 \cdot 10^{-4}$, кривая 2 – $k = 0.1 \cdot 10^{-3}$, кривая 3 – $k = 0.2 \cdot 10^{-3}$. При этом коэффициент упрочнения $c = 0.5 \cdot 10^{-2}$.

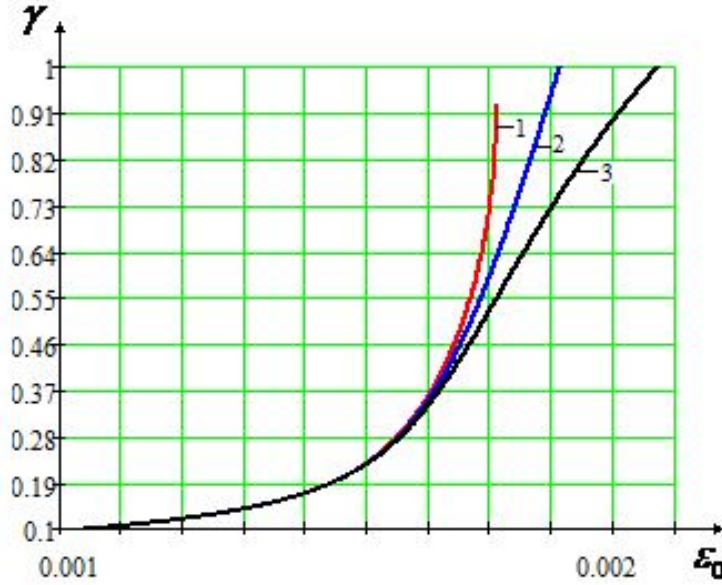


Рис. 4

На рисунке 4 кривая 1 соответствует $c = 0.1 \cdot 10^{-4}$, кривая 2 – $c = 0.008$, кривая 3 – $c = 0.02$. При этом предел текучести $c = 0.17 \cdot 10^{-3}$.

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров брались следующие: $a = 0.1$, $q_a = 0.1 \cdot 10^{-3}$, $q_b = 0.005$, $\lambda_1 = 3$, $\mu_2 = 1$, $\mu = 2$, $\eta = 0$.

Исследование устойчивости основного состояния (16) – (18) сферической крепи со сжатым скелетом при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [3].

Уравнения равновесия для областей упругого и пластического деформирования сферической оболочки со сжатыми порами имеют вид

$$\nabla_i (\sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i} \nabla^\alpha u_j) = 0. \quad (20)$$

Здесь и далее ∇ – символ ковариантного дифференцирования, кружок вверх соответствует компонентам основного невозмущенного состояния (16)–(18).

Граничные условия на внутренней и внешней поверхностях сферической крепи запишем в виде

$$N_i (\sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i} \nabla^\alpha u_j) = 0. \quad (21)$$

Условия непрерывности на упругопластической границе γ имеют вид

$$[N_i (\sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i} \nabla^\alpha u_j)] = 0, [u_j] = 0. \quad (22)$$

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений для несжимаемой упругопластической модели среды в пластической и упругой областях представима в форме [4]:

$$\sigma_j^i = (a_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_\alpha + p) g_j^i + (1 - g_j^i) g^{ii} G_j^i (\nabla_j u^i + \nabla^i u_j). \quad (23)$$

В (23) отсутствует суммирование по индексам i, j и производится по индексу α , величины $a_{i\alpha}$ и G_j^i представлены следующим образом:

в упругой области

$$a_{i\alpha} = 2\mu g_{i\alpha}, G_j^i = \mu; \quad (24)$$

в пластической области

$$a_{i\alpha} = 2\mu g_{i\alpha} - \nu f_{\alpha\alpha} f_{ii}, G_j^i = \mu, \quad (25)$$

где $f_{ij} = s_{ij}^0 - c \varepsilon_{ij}^{0p}$, значение $\nu = 1$ соответствует несжимаемой упругопластической среде, $\nu = 0$ – упругой несжимаемой среде.

Уравнения (20)–(25) с учетом условий несжимаемости в упругой и пластической областях представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений относительно амплитудных значений вектора перемещений u, v, w и гидростатического давления p для исследования устойчивости основного состояния (16)–(18) монолитной крепи подземной сферической полости, когда имеется граница раздела областей упругого и пластического поведения материала. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния рассматриваемой конструкции.

Для нахождения собственных значений задачи перемещения и гидростатическое давление в упругой и пластической областях аппроксимируем в виде двойных рядов по сферическим функциям:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} A_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \phi), v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} B_{jm}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{jm}(\theta, \phi), \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} C_{jm}(r) \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{jm}(\theta, \phi), p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} D_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $Y_{jm}(\theta, \phi) = P_j^m(\cos \theta) (\alpha_{jm} \cos m\phi + \beta_{jm} \sin m\phi)$ – сферические функции, $P_j^m(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода степени j и порядка m ($P_j^m = 0$ для $m > j$). Функции Y_{jm} являются решениями уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + j(j+1) \right) Y_{jm}(\theta, \phi) = 0.$$

В случае симметричного начального состояния ($\sigma_2^0 = \sigma_3^0, \sigma_j^i = 0$ при $i \neq j$) согласно (24) и (25) $a_{12} = a_{13}, a_{22} = a_{33}, a_{23} = a_{32}, a_{31} = a_{21}, a_{22} - a_{23} = 2\mu$ и, следовательно, $B_{jm}(r) = C_{jm}(r)$.

Так как рассматриваемая система уравнений (20), (21) линейна и однородна, то каждый член (26) можно рассматривать отдельно. В дальнейшем для краткости записи индексы m и j опустим. Тогда система уравнений (20)–(21) с учетом (26), а также условия $B(r) = C(r)$ после ряда преобразований примет вид:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} r^2 \left(\mu + \sigma_r^0 \right) A^{(4)} + r \left(2 \left(4\mu + 3\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 \right) + r \sigma_{r,r}^0 \right) A''' + \left(4 \left(3\mu + \sigma_r^0 + 2\sigma_\theta^0 \right) + \right. \\ \left. + 2r \left(2\sigma_{r,r}^0 + \sigma_{\theta,r}^0 \right) - (j^2 + j) \left(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} + \sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 - 2\mu \right) \right) A'' + \\ + \frac{1}{r} \left(6r \sigma_{\theta,r}^0 + (j^2 + j) \left(2 \left(\mu - a_{11} + a_{12} + a_{21} - 2\sigma_\theta^0 \right) - a_{22} - a_{23} - r \sigma_{\theta,r}^0 \right) \right) A' + \\ \frac{1}{r^2} (j^2 + j) j (j^2 + j - 2) \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) A + 0 \frac{1}{r^2} (j^2 + j) j (j^2 + j - 2) \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) A = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} & r^2 \left(\mu + \sigma_r^0 \right) A''' + 2r \left(3\mu + 2\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 \right) A'' + \\ & + \left(6 \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) + (j^2 + j) \left(\mu - a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22} - \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 \right) \right) A' = 0, \quad (28) \\ & r^2 \left(\mu + \sigma_r^0 \right) A'' + r \left(2\mu + 3\sigma_r^0 \right) A' + (j^2 + j - 2) \mu A = 0. \end{aligned}$$

В (28) при $r = a$ получим граничные условия на внутренней поверхности крепи, а при $r = 1$ – на внешней.

На границе раздела зон упругого и пластического деформирования при $r = \gamma$ выполняются условия

$$\begin{aligned} & \left[\gamma^2 \left(\mu + \sigma_r^0 \right) A''' + 2\gamma \left(3\mu + 2\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 \right) A'' + \right. \\ & \left. + \left(6 \left(\mu + \sigma_\theta^0 \right) + (j^2 + j) \left(\mu - a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22} - \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 \right) \right) A' \right] = 0, \quad (29) \\ & \left[\gamma^2 \left(\mu + \sigma_r^0 \right) A'' + \gamma \left(2\mu + 3\sigma_r^0 \right) A' + (j^2 + j - 2) \mu A \right] = 0, \\ & [A] = 0. \end{aligned}$$

В (29) квадратные скобки обозначают разность стоящих в них величин в зонах упругого и пластического деформирования крепи.

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (27)–(29) не представляется возможным, поэтому приближенное решение задачи будем искать методом конечных разностей. В результате получаем бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно A , решать которую необходимо с учетом уравнения (19), определяющего положение границы раздела зон упругого и пластического деформирования крепи в основном НДС. Потере устойчивости будут соответствовать ненулевые значения A . При этом должна производиться минимизация по шагу разностной сетки h , степеням присоединенных функций Лежандра первого рода j , параметрам материала и конструкции λ_j .

Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величин q_a и q_b в зависимости от j при условии равенства нулю определителя, полученной алгебраической системы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гоцев, Д. В. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2010. – 299 с.
- [2] Садовская, О. В. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.
- [3] Гузь, А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь. – Киев : Наук. думка, 1977. – 204 с.
- [4] Спорыхин, А. Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 232 с.

Гоцев Дмитрий Викторович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: rbgotsev@mail.ru

Бунтов Алексей Евгеньевич,

соискатель ученой степени кандидата физико-математических наук кафедры математики, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж

e-mail: buntovkmss@mail.ru

D. V. Gotsev, A. E. Buntov

**STABILITY MONOLITHIC FIX UNDERGROUND OIL STORAGE OF A
SPHERICAL FORM TAKING INTO ACCOUNT INITIAL POROSITY OF
MATERIAL**

Voronezh State University

*Military Science and Education Centre Air Force "Air Force Academy. Professor N. E.
Zhukovsky and Y. A. Gagarin"*

Abstract. The mathematical model of the intense deformed is constructed states monolithic fix an underground spherical cavity for materials with porous structure which skeleton possesses elastic and visco-plastic properties. Within the exact three-dimensional the linear equations stability of the basic is investigated conditions of the spherical cover which is support an underground cavity deep laying. The assessment of influence on basic sizes is given the intense deformed state physicommechanical and geometrical parameters of a design.

Keywords: elasticity, plasticity, viscosity, heat conductivity, big deformations.

REFERENCES

- [1] *Gotsev, D. V.* Method of indignations in problems of stability of the supported excavations / *D. V. Gotsev, A. N. Sporykhin.* – Voronezh : Voronezh State University, 2010. – 299 p.
- [2] *Sadovskaya, O. V.* Mathematical modeling in problems of mechanics of loose environments / *O. V. Sadovskaya, V. M. Sadovsky.* – M. : FIZMATLIT, 2008. – 368 p.
- [3] *Guz, A. N.* Bases of the theory of stability of excavations / *A. N. Guz.* – Kiev : Naukova Dumka, 1977. – 204 p.
- [4] *Sporykhin, A. N.* Stability of balance of spatial bodies and problem of mechanics of rocks / *A. N. Sporykhin, A. I. Shashkin.* – M. : FIZMATLIT, 2004. – 232 p.

Gotsev, Dmitry Viktorovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Doctor of physical and mathematical sciences, Voronezh State University, Voronezh

Buntov, Alexey Evgenievich

Head Course, Competitor Ph.D. degree in Physics and Mathematics Department of Mathematics, Military Science and Education Centre Air Force "Air Force Academy. Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin", Voronezh

Н. В. Минаева, А. И. Шашкин

АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

*Воронежский государственный университет инженерных технологий,
Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

Аннотация. Рассматривается проблема существования квазистатического процесса, описываемого решением системы дифференциальных уравнений в матричной форме. Сформулирована и доказана теорема, позволяющая проводить исследование указанной проблемы. Показано, что если внешние воздействия являются потенциальными, то изучение можно проводить на основе теоремы о неявных функциях в рамках статики.

Ключевые слова: квазистатический процесс, теорема о неявной функции, напряжение, деформация, упругость, область притяжения.

УДК: 531.3

При рассмотрении квазистатических процессов [1], [2], [3] пренебрегают скоростью изменения параметра внешнего воздействия и, как следствие, изменением во времени характеристики, описывающей поведение рассматриваемого объекта. Тем самым предполагается, что скорость изменения характеристики, описывающей поведение объекта, непрерывно зависит от скорости изменения характеристики внешнего воздействия на него. Следовательно, возникает проблема изучения этой зависимости, т.е. при каких значениях параметра внешнего воздействия процесс будет оставаться квазистатическим. Границу области изменения внешнего воздействия, в пределах которой изучаемая непрерывность зависимости выполняется, будем называть границей области существования квазистатического процесса.

Известны работы по сформулированной проблеме, проведенные на основе различных критериев устойчивости, например [3], [4], [5], [6]. Но в них, как правило, на определенном этапе исследований задавалась траектория нагружения, и параметры нагрузок переставали быть независимыми.

Пусть поведение исследуемого объекта описывается решением w системы дифференциальных уравнений, записанной в матричной форме

$$\dot{w} = F(w, p(t)) \quad (1)$$

при начальных условиях

$$\dot{w}(0) = w^0, \quad (2)$$

где $p(t)$ – функция, характеризующее внешнее воздействие, t – время. Решения задачи (1),(2) будем искать в виде

$$w = v + \eta^{(j)} \quad (1 \leq j \leq s), \quad (3)$$

где статическая составляющая $\eta^{(j)}$ является одним из s решений системы уравнений

$$F(u, p(t)) = 0, \quad (4)$$

а динамическая составляющая v является решением системы уравнений, полученной в результате подстановки (3) в (1) и (2), т. е.

$$\dot{v} = F(v + \eta^{(j)}, p) - \frac{d\eta^{(j)}}{dp} \dot{p}, \quad (5)$$

$$\dot{v}(0) = w^0 - \eta^{(j)}(p(0)). \quad (6)$$

Пусть для (5) выполняется

$$\left| \frac{d\eta^{(j)}}{dp} \right| \leq M, \quad p^0 \leq p(t) \leq p^1. \quad (7)$$

Будем считать, что тривиальное решение уравнения

$$\dot{v} = F(v + \eta^{(j)}, c) \quad (8)$$

асимптотически устойчиво при любом $c \in [p^0, p^1]$.

Будем говорить, что при $p \in D$ существует квазистатический процесс, описываемый системой уравнений (1), если для любого $\varepsilon > 0$, любых $p^0 \in D$, $p^1 \in D$ и любых w^0 существует соответствующее решение уравнения (4), такая функция $r(t)$ и величина t_0 , что из условий

$$r(t) = p^0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \quad (11)$$

$$p(t) = r(t) \quad \text{при } t \geq t_0, \quad (12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = p^1 \quad (13)$$

следует, что

$$|v(t)| \leq \varepsilon \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (14)$$

Здесь то решение уравнения (4) названо «соответствующим», в область притяжения которого попадает точка (p^0, w^0) . Используя вышесказанное, сформулируем следующую теорему:
Теорема

Если $p^0 \in D$, $p^1 \in D$ и область D не содержит особых точек системы уравнений (4), т. е. $\left| \frac{d\eta^{(j)}}{dp} \right| \leq M$ при всех $1 \leq j \leq s$, а тривиальное решение системы уравнений (8) при соответствующем $\eta^{(j)}$ асимптотически устойчиво при всех $c \in D$, то квазистатический процесс существует (в смысле (11)–(14)).

Доказательство будем проводить путем построения $r(t)$ в виде ступенчатой функции. Пусть величины p^0 и w^0 таковы, что точка $v(0) = w^0 - u(p^0)$ попадает в область притяжения некоторого решения $u = \eta^{(j)}$ уравнения (4). Поскольку тривиальное решение уравнения (8) для (4) асимптотически устойчиво, то для заданного $\varepsilon > 0$ при каждом $p \in D$ найдется функция

$$\delta = \delta(p). \quad (15)$$

Обозначим

$$\min_{p \in D} \delta(p) = \delta_0. \quad (16)$$

Предположим, что начальное условие w^0 таково, что

$$\delta_0 < |v(0)| = |w(0) - u(p^0)|. \quad (17)$$

Зафиксируем в момент времени $t = 0$ внешнее воздействие, т.е. пусть $p \equiv p^0$. Из асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений (8) следует, что найдется такой момент времени $t = t_0$, когда будет выполняться условие

$$|v(t)| < \delta_0 - \delta_1 \quad (0 < \delta_1 < \delta_0) \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (18)$$

Пусть при $p \equiv r_1(t)$ ($r_1(t)$ – некоторая возрастающая функция при $t \geq t_0$ для случая, когда $p^1 > p^0$) процесс будет описываться решением системы (5). Предположим, что при $t = t_0$ это решение удовлетворяет условию $|v(t_1)| = \delta_0$ ($|v| < \delta_0$) при $t \geq t_0$. Зафиксируем в момент $t = t_1$

функцию $p(t)$. Тогда при $t \geq t_1$ процесс будет описываться снова решением уравнения (8) при $p(t) \equiv r_1(t_1)$. Из асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений (8) при $p(t) \equiv r_1(t_1)$ следует, что $|v(t)| < \varepsilon$ при $t = t_1$ и что найдется величина t_2 такая, что будет выполняться неравенство

$$|v(t)| < \delta_0 - \delta_1 \quad \text{при } t \geq t_2. \quad (19)$$

При $p \equiv r_2(t)$ ($r_2(t)$ – возрастающая функция при $t \geq t_2$) процесс снова будет описываться решением системы уравнений (5). Предположим, что при $t = t_3$ это решение удовлетворяет условию $|v(t)| = \delta_0$. Зафиксируем в момент времени $t = t_3$ функцию $p(t) \equiv r_2(t_3)$ и т. д. В результате будет получена ступенчатая функция $p = r(t)$. Из приведенного построения функции $r(t)$ следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ выполняется условие $|v(t)| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$ и $p = r(t)$, что и требовалось доказать (поскольку $t_1 - t_2 > 0$, $t_3 - t_2 > 0$ и т.д., то $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = p^1$).

Итак, условие существования квазистатического процесса при изменении внешнего воздействия от p^0 до p^1 сводится к исследованию попадания в этот интервал особых точек уравнения (4), конечно же, при условии, что тривиальное решение системы уравнений (8) асимптотически устойчиво. Как следует из теоремы о неявных функциях [7], существование и ограниченность $\frac{d\eta^{(j)}}{dp}$ будет выполняться, если

$$|F'(\eta^{(j)}, p) \neq 0. \quad (20)$$

Очевидно, что в том случае, когда внешние силы являются, например, потенциальными, для любых значений величин p^0 и w^0 найдется соответствующее им решение $\eta^{(j)}$, а потеря устойчивости тривиального решения уравнения (8) происходит при переходе p через статически особую точку, т.е. не выполняется условие (20). Следовательно, для случая, когда внешние силы являются потенциальными, условие (20) при $p \in D$ при всех значениях величины j является достаточным для того, что бы при $p \in D$ существовал квазистатический процесс в смысле (11)–(14).

Очевидно, что для систем с распределительными параметрами, т. е. когда зависит не только от времени, но и от пространственных переменных, требование существования и ограниченности $\frac{d\eta^{(j)}}{dp}$ приводит к проверке выполнения условий теоремы о неявных функциях для дифференциальных уравнений статики [8], [9] Но при этом следует сделать некоторые ограничения на выбор пространства состояний [10]:

Будем считать, что $F : Y \rightarrow Z$, где Y – область банахова пространства U (U, Z – банаховы пространства), является нелинейным фредгольмовым отображением нулевого индекса, и наряду с этим выполнены условия:

- а) $U \subset Z \subset H$ – тройка непрерывно вложенных пространств (H – гильбертово пространство);
- б) U плотно в H . Рассматриваются только те пары пространств U, Z , в которых производная Фреше отображения F является изоморфизмом.

Подобные пространства с соответствующими нормами обычно используются при решении задач механики деформируемого твердого тела, например, $C^2([a, b], \mathbb{R}^m)$, $C^4([a, b], \mathbb{R}^m)$, пространства Гельдера, гильбертова пространства и др.

Отметим, что в том случае, когда p является, например, n -мерным вектором, то в уравнении (5) вместо $\frac{d\eta^{(j)}}{dp} p$ будет записано $\sum_{i=1}^n \frac{d\eta^{(j)}}{dp_i} p_i$, а в определении (11)–(14) функция $r(t)$ будет характеризовать изменение внешних воздействий во времени вдоль траектории нагружения.

Если для некоторого решения $u = \eta^{(j)}(p)$ задачи (4) условие (20) выполняется при всех $p \in D$ и при некотором $p^{(2)} \in D$ тривиальное решение задачи (8) асимптотически устойчиво, то оно будет асимптотически устойчиво и при любом $p \in D$, если внешние силы являются потенциальными. Следовательно, выполнение условия (20) в этом случае является достаточным

условием для возможности квазистатического осуществления процесса, соответствующего решению $u = \eta^{(j)}(p)$ задачи (4) для любой траектории, не выходящей за границу области D . Величина w^0 при этом такова, что точка (p^0, w^0) должна попадать в область притяжения тривиального решения задачи (8). Отметим, что в качестве значения $p^{(2)}$ может быть, например, $p^{(2)} = 0$, т. к. для состояния исследуемого объекта при отсутствии внешнего воздействия тривиальное решение уравнения (8) должно быть асимптотически устойчиво.

Итак, в этом случае граница области существования квазистатического поведения изучаемого объекта, соответствующего решению $u = \eta^{(j)}(p)$ задачи (4), находится в рамках статики, исходя из теоремы о неявных функциях для задачи (4).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Серенсен, С. В.* Квазистатическое и усталостное разрушение материалов и элементов конструкций. Избранные труды / С. В. Серенсен. – Киев : Наукова думка, 1985. – Т. 3. – 232 с.

[2] *Терегулов, И. Г.* Квазистатический изгиб и устойчивость оболочек при ползучести (теория наследственности) / И. Г. Терегулов, Р. З. Муртазин // Исследование по теории пластин и оболочек. – Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1964. – С. 145–158.

[3] *Петренко, Т. П.* Решение квазистатической задачи изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / Т. П. Петренко // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. – No. 33 (5). – P. 38–43.

[4] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : Изд-во ТвГТУ, 2002. – 300 с.

[5] *Клюшников, В. Д.* Устойчивость упругих систем / В. Д. Клюшников. – М. : Наука, 1980. – 244 с.

[6] *Gotsev, D. V.* Stability of an equilibrium state of multi-layered lining of the vertical in massif with the elasto-plastic properties / D. V. Gotsev, A. V. Kovalev, A. N. Sporykhin // Journal of applied mechanics. – 2003. – Т. 39. – № 3. – P. 45–51.

[7] *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Изд-во техн.-геор. лит., 1956. – Т. 1,2. – 464 с.

[8] *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1976. – 542 с.

[9] *Минаева, Н. В.* Адекватность математических моделей деформируемых тел / Н. В. Минаева. – М. : Научная книга, 2006. – 235 с.

[10] *Зачепа, В. Р.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений / В. Р. Зачепа, Ю. И. Сапронов. – Воронеж : Изд-во Воронежск. госунивер., 2002. – 185 с.

Минаева Надежда Витальевна,

доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

e-mail: minaeva@yandex.ru

Шашкин Александр Иванович,

доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета Прикладной математики и механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

N. V. Minaeva, A. I. Shashkin

ANALYSIS AND STUDY OF THE PROBLEM OF EXISTENCE OF A QUASI-STATIC PROCESS

Voronezh state University of engineering technologies

Abstract. Discusses the problem of the existence of a quasi-static process, described by the solution of a system of differential equations in matrix form. Formulated and proved a theorem that allows to study this problem. It is shown that if the external effects are potential, the study can be conducted on the basis of the theorem of implicit functions in the framework of statics.

Keywords: quasi-static process, the theorem on implicit functions, stress, strain, elasticity, area attraction.

REFERENCES

- [1] *Sorensen, S. C.* Quasi-static and fatigue failure of materials and construction elements. Selected works / S. C. Sorensen. – Kiev : Nauk. Dumka, 1985. – Vol. 3. – 232 p.
- [2] *Teregulov, I. G.* Quasi-static bending and stable-stability of shells under creep (theory of heredity) / I. G. Teregulov, R. H. Murtazin // Research on the theory of plates and shells. – Kazan : Publishing house of Kazans. University, 1964. – P. 145–158.
- [3] *Petrenko, T. P.* The quasi-static Solution of the problem of bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of elasticity theory / T. P. Petrenko // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. – No 33 (5). – P. 38–43.
- [4] *Zubchaninov, V. G.* the Mathematical theory of plasticity / V. G. Zubchaninov. – Tver. Publishing house of TvSTU, 2002. – 300 p.
- [5] *Klyushnikov, V. D.* Stability of elastic systems / V. D. Klyushnikov. – M. : Nauka, 1980. – 244 p.
- [6] *Gotsev D.V., Kovalev A.V., Sporykhin A.N.* Stability of an equilibrium state of multi-layered lining of the vertical in massif with the elasto-plastic properties / D. V. Gotsev, A. V. Kovalev, A. N. Sporykhin // Journal of applied mechanics, 2003. – T. 39. – № 3. – P. 45–51.
- [7] *Fikhtengolc, G. M.* Fundamentals of mathematical analysis / G. M. Fikhtengolc. – M. : Izd. technology-theory. lit., 1956. – Vo 1,2. 464 p.
- [8] *Kolmogorov, A. N.* Elements of the theory of functions and functional analysis / A. N. Kolmogorov. – M. : Nauka, 1976. – 542 p.
- [9] *Minaeva, N. V.* The adequacy of mathematical models of deformable bodies / N. V. Minaeva. – M. : Scientific book, 2006. – 235 p.
- [10] *Zachapa, C. R.* Local analysis predgornovy equations / C. R. Zachapa, Y. I. Sapronov. – Voronezh : Publishing house of VSU., 2002. – 185 p.

Minaeva, Nadezhda Vitalevna

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh

Shashkin, Aleksander Ivanovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Dean of the faculty of applied mathematics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh

ПРЕДЕЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ВТУЛКИ КОНТАКТНОЙ ПАРЫ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Рассматривается задача механики разрушения для втулки контактной пары. Считается, что при многократном возвратно-поступательном движении плунжера происходит разрушение материала втулки контактной пары, вызванное контактным взаимодействием и сопровождаемое совместным действием силовой нагрузки и температуры. Принято, что на поверхности контакта втулки имеется радиальная трещина. Считается, что в области контакта между втулкой и плунжером, кроме давления, действует касательное усилие, связанное с контактным давлением по закону Амонтона – Кулона. Методами теорий возмущений и аналитических функций рассматриваемая задача в каждом приближении сводится к одному сингулярному интегральному уравнению и бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Приводится процедура определения коэффициентов интенсивности напряжений. В расчетах функция, описывающая шероховатость внутреннего контура втулки принималась стационарной случайной функцией с нулевым средним значением и известной дисперсией.

Ключевые слова: контактная пара, втулка, прямолинейная трещина, коэффициенты интенсивности напряжений, предельно-равновесное состояние втулки.

УДК: 539.375

Введение. Практика работы контактных пар нефтепромыслового оборудования показывает, что разрушение втулки контактной пары происходит на пятнах фактического касания в тонких приповерхностных слоях путем образования микротрещин. В связи с этим представляет большой теоретический интерес разработка эффективного способа, позволяющего исследовать развитие дефектов типа трещин в деталях контактной пары с учетом их реальной поверхности.

Постановка задачи. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние втулки контактной пары в процессе работы.

Считаем, что втулка ослаблена одной краевой трещиной вблизи контактной поверхности. Отнесем втулку к полярной системе координат $r\theta$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_0 и L с радиусами R_0 , R соответственно. Будем считать, что внутренний контур втулки близок к круговому. Как известно, реальная поверхность втулки никогда не бывает абсолютно гладкой, а всегда имеет неровности, являющиеся неизбежным следствием процесса технологической обработки.

Рассмотрим некоторую реализацию шероховатой внутренней поверхности втулки. Считается, что выполняются условия плоской деформации.

Представим границу внутреннего контура втулки L'_0 в следующем виде:

$$\rho(\theta) = R_0 + \varepsilon H(\theta), \quad (1)$$

где ε – малый параметр, равный R_{\max}/R_0 ; R_{\max} – наибольшая высота неровности профиля втулки контактной пары. С помощью обработки данных профилограмм обработанной поверхности вычисляются значения коэффициентов ряда Фурье для функции $H(\theta)$, описывающие каждый внутренний профиль обработанной поверхности втулки. Граничные условия рассматриваемой задачи механики разрушения имеют вид:

$$\sigma_n = -p(\theta); \quad \tau_{nt} = -fp(\theta) \quad \text{при } r = \rho \text{ на контактной площадке} \quad (2)$$

$$\sigma_n = 0; \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{при } r = \rho \text{ вне площадки контакта}$$

$$v_r^- iv_\theta = g(\theta) \quad \text{при } r = R \quad (3)$$

$$\sigma_n = 0; \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{на берегах трещин} \quad (4)$$

Считается, что втулка в точках наружной поверхности имеет заданные перемещения. В крайевых условиях (2) принято, что в области контакта касательное напряжение связано с контактным давлением $p(\theta)$ по закону Амонтона-Кулона; f – коэффициент трения контактной пары; n, t – натуральные координаты; $g(\theta)$ – заданные перемещения точек на внешнем контуре втулки. Будем считать, что контактное давление $p(\theta)$, определяемое из решения контактной задачи о вдавлении вала во втулку, нам известно [1].

Напряжения и перемещения во втулке ищем в виде разложений по малому параметру ε , в которых пренебрегаем для простоты членами, содержащими ε в степени выше первой.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^{(0)} + \varepsilon\sigma_r^{(1)} + \dots; & \sigma_\theta &= \sigma_\theta^{(0)} + \varepsilon\sigma_\theta^{(1)} + \dots; \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{r\theta}^{(0)} + \varepsilon\tau_{r\theta}^{(1)} + \dots; \end{aligned} \quad (5)$$

$$v_r = v_r^{(0)} + \varepsilon v_r^{(1)} + \dots; \quad v_\theta = v_\theta^{(0)} + \varepsilon v_\theta^{(1)} + \dots$$

Здесь $\sigma_r^{(0)}, \sigma_\theta^{(0)}, \tau_{r\theta}^{(0)}, v_r^{(0)}, v_\theta^{(0)}$ – напряжения и перемещения нулевого приближения, а $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}, \tau_{r\theta}^{(1)}, v_r^{(1)}, v_\theta^{(1)}$ – напряжения и перемещения первого приближения.

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений теории упругости. Значения компонент тензора напряжений при $r = \rho(\theta)$ найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R_0$.

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)}|_{r=\rho(\theta)} &= \sigma_r^{(0)}|_{r=R_0} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} H(\theta) + \dots, \\ \sigma_\theta^{(0)}|_{r=\rho(\theta)} &= \sigma_\theta^{(0)}|_{r=R_0} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_\theta^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} H(\theta) + \dots, \\ \tau_{r\theta}^{(0)}|_{r=\rho(\theta)} &= \tau_{r\theta}^{(0)}|_{r=R_0} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} H(\theta) + \dots, \\ \sigma_r^{(1)}|_{r=\rho(\theta)} &= \sigma_r^{(1)}|_{r=R_0} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} H(\theta) + \dots, \\ \sigma_\theta^{(1)}|_{r=\rho(\theta)} &= \sigma_\theta^{(1)}|_{r=R_0} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_\theta^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} H(\theta) + \dots, \\ \tau_{r\theta}^{(1)}|_{r=\rho(\theta)} &= \tau_{r\theta}^{(1)}|_{r=R_0} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} H(\theta) + \dots \end{aligned}$$

Используя метод возмущений с учетом сказанного, крайевые условия задачи примут вид:

в нулевом приближении

$$\sigma_r^{(0)} = -p^{(0)}(\theta); \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = -fp^{(0)}(\theta) \text{ на площадке контакта} \quad (6)$$

$$\sigma_r^{(0)} = 0; \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0 \text{ при } r = R_0 \text{ вне площадки контакта}$$

$$v_r^{(0)} - iv_\theta^{(0)} = g(\theta) \text{ при } r = R \quad (7)$$

$$\sigma_n^{(0)} = 0; \quad \tau_{nt}^{(0)} = 0 \text{ на берегах трещин} \quad (8)$$

в первом приближении

$$\sigma_r^{(1)} = -p^{(1)}(\theta) + N; \quad \tau_{nt}^{(1)} = -fp^{(1)}(\theta) + T \text{ на площадке контакта} \quad (9)$$

$$\sigma_r^{(1)} = N; \quad \tau_{nt}^{(1)} = T \text{ при } r = R_0 \text{ вне площадки контакта}$$

$$v_r^{(1)} - iv_\theta^{(1)} = 0 \text{ при } r = R \quad (10)$$

$$\sigma_n^{(1)} = 0; \quad \tau_{nt}^{(1)} = 0 \text{ на берегах трещин} \quad (11)$$

Здесь $N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}^{(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta}$; $T = \left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} \right) \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r}$.

Для прогнозирования разрушения втулки особый интерес представляет знание коэффициентов интенсивности напряжений, позволяющее в рассматриваемом случае на их основе исследовать предельное состояние втулки.

Согласно методу возмущений, коэффициенты интенсивности напряжений для окрестности вершины трещины ищутся в виде

$$K_I = K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} + \dots; \quad K_{II} = K_{II}^{(0)} + \varepsilon K_{II}^{(1)} + \dots$$

Здесь $K_I^{(0)}, K_{II}^{(0)}$ – коэффициенты интенсивности напряжений для нулевого приближения, а $K_I^{(1)}, K_{II}^{(1)}$ – соответственно для первого приближения.

Решение краевой задачи (6)–(9) представляет собой решение задачи механики разрушения для гладкого внутреннего контура с радиальной прямолинейной трещиной. Сумма решений (6)–(8) и (9)–(11) представляет решение задачи механики разрушения для втулки контактной пары с внутренним шероховатым контуром и радиальной прямолинейной гладкой трещиной.

Метод решения краевой задачи. Последовательности краевых задач (6)–(8) и (9)–(11) решаются единообразным способом.

Перейдем к построению решения задачи в нулевом приближении. Граничные условия задачи (6) и (8) с помощью формул Колосова – Мусхелишвили [2] можно записать известным способом для комплексных потенциалов $\Phi^{(0)}(z), \Psi^{(0)}(z)$ для втулки.

$$\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} \left[\bar{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] = \begin{cases} -(1 - if)p^{(0)}(\theta) & \text{на площадке контакта} \\ 0 & \text{вне площадки контакта} \end{cases} \quad (12)$$

$$\Phi^{(0)}(\tau_1) - \overline{\kappa \Phi^{(0)}(\tau_1)} - e^{2i\theta} \left[\bar{\tau}_1 \Phi^{(0)'}(\tau_1) + \Psi^{(0)}(\tau_1) \right] = 2\mu g'(\theta) \quad (13)$$

$$\Phi^{(0)}(t) + \overline{\Phi^{(0)}(t)} + t \overline{\Phi^{(0)'}}(t) + \overline{\Psi^{(0)}(t)} = 0, \quad (14)$$

где $\tau = R_0 e^{i\theta}, \tau_1 = R_0 e^{i\theta}; t$ – аффикс точек берегов трещины.

Комплексные потенциалы, дающие решение краевой задачи (6) и (8), ищем в виде:

$$\Phi^{(0)}(z) = \Phi_0^{(0)}(z) + \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z) \quad (15)$$

$$\Psi^{(0)}(z) = \Psi_0^{(0)}(z) + \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z).$$

Здесь при отсутствии трещины потенциалы $\Phi_0^{(0)}(z)$ и $\Psi_0^{(0)}(z)$ определяют поле напряжений и деформаций в сплошной втулке.

Потенциалы $\Phi_0^{(0)}(z)$ и $\Psi_0^{(0)}(z)$ ищем в виде:

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k; \quad \Psi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k z^k.$$

Для определения искоемых коэффициентов a_k, a'_k используем метод Мусхелишвили [2].

Комплексные потенциалы $\Phi_1^{(0)}(z)$ и $\Psi_1^{(0)}(z)$ ищем в виде:

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_0}^{\ell} \frac{g_0(t) dt}{t-z};$$

$$\Psi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_0}^{\ell} \left[\frac{\overline{g_k^0(t)}}{t-z} - \frac{\bar{t}g_0(t)}{(t-z)^2} \right] dt,$$

где $g_0(x)$ – искомая функция, характеризующая разрыв смещений при переходе через линию трещины.

$$g_0(t) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial t} [u_0^+(t, 0) - u_0^-(t, 0) + i(v_0^+(t, 0) - v_0^-(t, 0))].$$

Комплексные функции $\Phi_2^{(0)}(z)$ и $\Psi_2^{(0)}(z)$ ищем в виде:

$$\Phi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_0}^{\ell} \left[\left(-\frac{1}{z} - \frac{\bar{t}}{z-\bar{t}} \right) g_0(t) + \overline{g_0(t)} \frac{1-t\bar{t}}{\bar{t}(1-z\bar{t})^2} \right] dt;$$

$$\Psi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi z} \int_{R_0}^{\ell} \left\{ g_0(t) \left[\frac{1}{zt} - \frac{2}{z^2} - \frac{\bar{t}}{z(1-z\bar{t})} + \frac{\bar{t}^2}{(1-z\bar{t})^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \overline{g_0(t)} \left[-\frac{1}{1-z\bar{t}} + \frac{1-t\bar{t}}{z\bar{t}(1-z\bar{t})^2} - \frac{2(1-t\bar{t})}{(1-z\bar{t})^3} \right] \right\} dt.$$

Удовлетворяя функциями (15) граничным условиям (14) на берегах трещины, получим сингулярное интегральное уравнение, относительно неизвестной функции $g_0(x)$:

$$\int_{R_0}^{\ell} \left[R(t, x)g_0(t) + S(t, x)\overline{g_0(t)} \right] dt = \pi f_0(x). \quad (16)$$

$$\text{Здесь } f_0(x) = - \left[\Phi_0^{(0)}(x) + \overline{\Phi_0^{(0)}(x)} + x\overline{\Phi_0^{(0)'}}(x) + \overline{\Psi_0^{(0)}}(x) \right].$$

Функции $R(t, x)$ и $S(t, x)$ ввиду громоздкости не приводятся. Удовлетворяя краевым условиям на круговых границах, записанных через комплексные потенциалы функциями (15), а также учитывая разложение функции $p^{(0)}(\theta)$ при $r = R_0$ и $g'(\theta)$ при $r = R$ в ряды Фурье, получаем после некоторых преобразований бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно a_k и a'_k . Ввиду громоздкости система алгебраических уравнений не

приводится. В правую часть этой системы входят интегралы от искомым функций $g_0(x)$. Таким образом, сингулярное интегральное уравнение и система алгебраических уравнений относительно a_k и a'_k связаны между собой и решаются совместно. Применяя метод механических квадратур [3], сингулярное интегральное уравнение сводится к системе M линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции в чебышевских узлах. После решения объединенной алгебраической системы методом Гаусса с выбором главного элемента находятся коэффициенты интенсивности напряжений в нулевом приближении $K_I^{(0)}, K_{II}^{(0)}$:

$$K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)} = \frac{\sqrt{\pi\ell}}{M} \sum_{k=1}^M (-1)^k g_{0k} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2}$$

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2M} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, M).$$

Перейдем теперь к построению решения задачи в первом приближении. На основе полученного решения с помощью функций (15) и формул Колосова – Мухелишвили находим компоненты напряжений $\sigma_r^{(0)}, \sigma_\theta^{(0)}, \tau_{r\theta}^{(0)}$. При $r = R_0$ находим функции N и T . Граничные условия (9)–(11) можно записать в виде краевой задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$. Комплексные потенциалы $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$ ищутся в виде аналогично (15) с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения такой же, как в нулевом приближении.

После решения системы алгебраических уравнений первого приближения определяются коэффициенты интенсивности напряжений для вершины трещины

$$K_I^{(1)} - iK_{II}^{(1)} = \frac{\sqrt{\pi\ell}}{M} \sum_{k=1}^M (-1)^k g_{1k} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2}.$$

При заданной функции $H(\theta)$ и функции перемещений $g(\theta)$ построенные алгебраические системы являются замкнутыми и позволяют найти коэффициенты интенсивности напряжений для каждого шероховатого профиля контактной поверхности, размеров трещины, физических и геометрических параметров втулки контактной пары.

После определения коэффициентов интенсивности напряжений для прогнозирования предельного состояния втулки контактной пары, когда может наступить разрушение (рост трещины), используем обобщенный критерий хрупкого разрушения, называемый часто критерием максимального окружного напряжения σ_θ [4], [5]. Согласно этому критерию начальное развитие трещины в момент ее страгивания происходит в плоскости, для которой сингулярная часть нормальных растягивающих напряжений σ_θ имеет максимальную интенсивность.

Для определения критического давления p_c и угла отклонения θ_* , использовали следующие уравнения [4], [5]:

$$\theta_* = 2 \operatorname{arctg} \left[\left(1 - \sqrt{1 + 8\alpha^2} \right) / 4\alpha \right];$$

$$K_{IC} - 4\sqrt{2}f(\alpha) K_I = 0, \quad \alpha = \frac{K_{II}}{K_I}; \tag{17}$$

$$f(\alpha) = \frac{1 + 3\sqrt{1 + 8\alpha^2}}{(12\alpha^2 + 1 - \sqrt{1 + 8\alpha^2})^{3/2}} \alpha^3.$$

Здесь K_{IC} – трещиностойкость (вязкость разрушения) материала втулки, определяемая опытным путем.

Уравнения (17) позволяют численным способом исследовать влияние геометрических параметров втулки, класса шероховатости и других параметров на изменение предельного состояния втулки фрикционной пары. Наличие шероховатости внутренней поверхности втулки

приводит к увеличению напряжений, в то же время способствует искривлению направления (ветвлению) роста имеющихся трещин во втулке. Это обстоятельство может приводить к торможению трещины.

Численные результаты и их анализ. Для численной реализации изложенного способа были проведены расчеты методом Гаусса с выбором главного элемента. Полагалось $M = 20$, $M = 30$, что отвечает разбиению интервала $[-1, 1]$ на 20, 30 чебышевских узлов, соответственно. Были проведены расчеты по определению коэффициентов интенсивности напряжений. В рассматриваемой задаче имеется много параметров. Это различные механические характеристики материала, параметры качества поверхности внутреннего контура втулки, контактного давления на поверхности трения, геометрические размеры втулки, а также трещины.

Расчеты выполнялись применительно к скважинным штанговым насосам.

Для указанных значений параметров при расчетах относительная погрешность, меньшая одного процента, достигалась при количестве чебышевских узлов на трещине $M = 20$.

Численными расчетами исследовались зависимость коэффициентов, интенсивности напряжений от относительной длины трещины $\lambda = \ell / (R - R_0)$.

На рис. 1 представлена зависимость критической величины давления p_c от параметра λ для втулки скважинного штангового насоса, вычисленного по формуле (17) для скорости плунжера $V = 0,4 \text{ м/с}$, а вязкость разрушения материала втулки принималась $K_{IC} = 57,0 \text{ МПа } \sqrt{\text{м}}$. Здесь кривая 1 построена для гладкого контура, а кривая 2 для шероховатого внутреннего контура. Функция, описывающая шероховатость внутреннего контура втулки, принималась стационарной случайной функцией с нулевым средним значением и известной дисперсией.

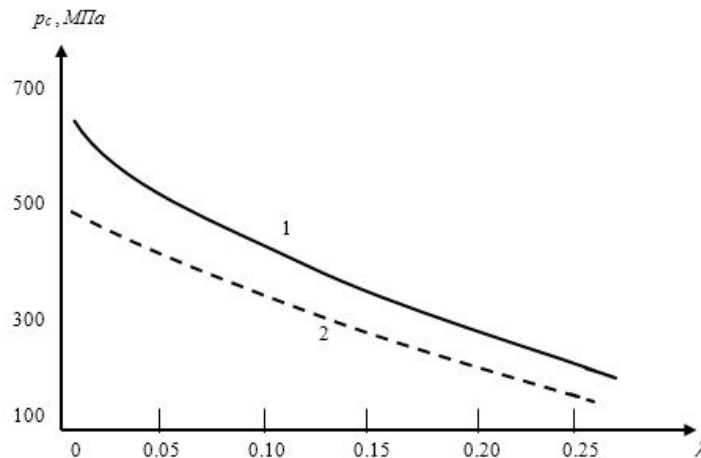


Рис. 1. Зависимость критического давления

Заключение. Следует отметить, что разработанный способ дает возможность исследовать предельно-равновесное состояние втулки контактной пары с учетом ее реальной обработанной поверхности и дефектности. Такие исследования позволяют прогнозировать по контактному давлению допустимую для втулки длину трещины или, наоборот, по заданной длине дефекта установить величину предельной (вызывающей рост трещины) нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахундова, П. Э.* Решение износоконтактной задачи для плунжерной пары / П. Э. Ахундова // Мат. междунар. науч. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики”, посв. 90-летию со дня рождения профессора Л. А. Толоконникова. – Тула, 2013. – С. 166–167.
- [2] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [3] *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 443 с.
- [4] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [5] *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наукова думка, 1991. – 416 с.

Ахундова Парвина Эльман гызы,

*кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН
Азербайджана, г. Баку*

e-mail: irakon63@hotmail.com

P. E. Axundova

LIMIT-EQUILIBRIUM STATE OF THE HUB OF CONTACT PAIR IN THE PRESENCE OF THE CRACK

Institute of mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan

Abstract. The problem of mechanics of fracture for the hub of contact pair is considered. It is considered that at repeated back and forth motion plunger there is a fracture of a material of the hub of the contact pair, caused by contact interaction and accompanied by joint action of power loading and temperatures. It is accepted that on a surface of contact of the hub there is a radial crack. It is considered that in the field of contact between the hub and plunger, except stress, operates tangent line the effort connected with contact stress under the law of Amontona – Kulona. The considered problem in each approach is reduced by methods of theories of indignations and analytical functions to one singular to the integrated equation and infinite system of the linear algebraic equations. Procedure of definition of factors of intensity of stress is resulted. In calculations the function describing a roughness of an internal contour of the hub was accepted by stationary stochastic function with zero average value and a known dispersion.

Keywords: contact pair, the hub, a rectilinear crack, factors of intensity of stress, limit-equilibrium state of the hub.

REFERENCES

- [1] *Axundova, P. E.* The solution of a problem wear contact for a plunger pair / P. E. Axundova // Trans. of Int. Scientific conf. «Modern problems of Math., Mech., Computer Science», dedicated to the 90-th anniversary of L. A. Tolokonnikov. – Tula, 2013. – P. 166–167.
- [2] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : - Nauka, 1966. – 707 p.
- [3] *Panasyuk, V. V.* Stress distribution around cracks in plates and shells / V. V. Panasyuk, M. P. Savruk, A. P. Datsyshin. - Kiev : Naukova Dumka, 1976. – 443 p.
- [4] *Cherepanov, G. P.* Mechanics of brittle fracture / G. P. Cherepanov. – M. : Nauka, 1974. – 640 p.
- [5] *Panasyuk, V. V.* The mechanics of the quasi brittle fracture of materials / V. V. Panasyuk. – Kiev : Naukova Dumka, 1991. – 416 p.

Axundova, Parvina Elman qizi

Candidate of Phys. and Math. Sci., Doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПРИ УЧЕТЕ РАЗОГРЕВА ЗА СЧЕТ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ТРЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса

Аннотация. В статье представлено решение связанной задачи термоупругопластичности о развитии течения в плоском слое материала, находящегося в условиях нарастающего чистого сдвига, и последующем торможении течения при медленном снятии нагрузки. Теплофизические и деформационные процессы взаимосвязаны, предел текучести зависит от температуры. В качестве дополнительного источника тепла принимается его производство за счет трения материала слоя о граничную шероховатую плоскость. Найдены условия зарождения вязкопластического течения, закономерности продвижения по слою упругопластических границ, рассчитаны скорости течения, большие деформации, как необратимые, так и обратимые. Рассмотрено торможение течения при уменьшении нагружающих усилий с последующим остыванием материала слоя.

Ключевые слова: упругость, пластичность, вязкость, теплопроводность, большие деформации.

УДК: 539.374

Известно [1], что штампуемый материал выплавляемой модели, основное содержание которого составляет парафино-стеариновая смесь, пластически деформируется в пристеночных областях пресс-формы, нагревается до оплавления, заполняя ее конструктивные вогнутости, а после этого застывает, формируя упрочненный приповерхностный слой. Подобные эффекты присущи штамповке в порошковой металлургии. В таких процессах деформации, приобретаемые материалами, большие, наряду с упругими свойствами материалов необходимо учитывать пластические, а в областях течения и вязкие. При этом деформирование и трение о жесткие стенки вызывает заметный разогрев материала. Таким образом, соответствующая задача математического моделирования оказывается задачей теории больших деформаций сред с упругими, пластическими и вязкими свойствами, в которой предел текучести зависит от температуры, а деформирование, тепловыделение и теплопередача не разделяются. Постановок и решений задач, включающих в себя все отмеченные деформационные и теплофизические особенности, теория больших деформаций до настоящего времени не содержит. С целью модельно оценить процессы, происходящие в материале при штамповке выплавляемых моделей для соответствующего литья, рассмотрим простейшую модельную задачу данного класса

Поступила 12.10.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам на выполнение НИР (№ 2014/292) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00283).

о чистом сдвиге, но с учетом таких эффектов. Сформулируем задачу в форме квазистатического процесса при меняющейся со временем внешней нагрузке так, как это происходит при технологической операции: разогрев и течение возникают и развиваются, затем течение замедляется и, наконец, материал остывает.

1. Пусть в пространстве с декартовой системой прямоугольных координат слой материала заполняет область $0 \leq x_2 \leq h$ (h – толщина слоя). С одной стороны он ограничен жесткой шероховатой плоскостью $x_2 = 0$, другая его граничная плоскость $x_2 = h$ нагружена

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \zeta t, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = a_0.$$

Здесь σ_{12} и σ_{22} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, t – время, ζ , a_0 – задаваемые постоянные. Считаем, что в последующие за $t = 0$ моменты времени материал слоя обратимо деформируется при отсутствии перемещений на границе $x_2 = 0$ до тех пор, пока слой удерживается за счет трения

$$\sigma_{21} < f |\sigma_{22}| \quad \text{при} \quad x_2 = 0,$$

f – коэффициент трения. Полагаем, что $a_0 < k_0 f^{-1}$ (k_0 – предел текучести при комнатной температуре), т.е. процесс скольжения начинается раньше пластического течения в момент времени $t = t_* = a_0 f \zeta^{-1}$. При $t > t_*$ условие прилипания заменяется законом трения скольжения

$$(\sigma_{12} - f |\sigma_{22}| - \xi v)|_{x_2=0} = 0, \quad (1)$$

где ξ – коэффициент вязкого трения, $v = v_1(x_2, t)$ – скорость точек среды. Трение скольжения вызовет разогрев слоя на его граничной плоскости $x_2 = 0$. Для формирующегося поля температур принимаем условия

$$\theta = \frac{T}{T_0} - 1 = \theta(x_2, t), \quad \theta(x_2, t_*) = 0, \quad \theta(0, t) = \gamma \phi(t), \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right|_{x_2=h} = 0. \quad (2)$$

Здесь T_0 , T – комнатная и текущая абсолютная температура, $\phi(t) = u(0, t)$ – перемещение на границе слоя, γ – постоянная теплопроизводства за счет трения. Нагружаемую границу слоя $x_2 = h$ полагаем теплоизолированной, а производство тепла за счет трения таким, чтобы температура границы $x_2 = 0$ росла пропорционально смещениям трущихся поверхностей. Такие смещения отождествляем с перемещениями точек граничной плоскости, так как $\phi(t)$ считается далее монотонной.

Продолжающееся нагружение в условиях повышения температуры приведет к зарождению и развитию вязкопластического течения в окрестности подложки, и, следовательно, к большим деформациям материала в области развитого течения. Конкретизацию теплофизических и механических свойств материала слоя проведем в рамках модели больших упруго-пластических деформаций, построенной в [2] и обобщенной на неизотермический случай [3] и на случай учета вязкости при пластическом течении [4]. В полном объеме модель подробно

описана в [5]. Считаем, что материал слоя несжимаем, тогда

$$\begin{aligned}
\frac{Dm_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})m_{kj} + m_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) \right), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad m_{ij} = e_{ij} + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \\
d_{ij} &= m_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}m_{ik}m_{kj} - m_{ik}p_{kj} - p_{ik}m_{kj} + m_{ik}p_{ks}m_{sj}, \\
\sigma_{ij} &= -P\delta_{ij} + \frac{1}{1 + 3\alpha(T - T_0)} \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \equiv 0, \\
\sigma_{ij} &= -P_1\delta_{ij} + \frac{1}{1 + 3\alpha(T - T_0)} \frac{\partial W}{\partial m_{ik}} (\delta_{kj} - m_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \neq 0, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
r_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, m_{sk}), \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^p, d_{ij}$ – компоненты тензоров скоростей пластических деформаций и полных деформаций Альманси, α – коэффициент линейного расширения, P, P_1 – гидростатические давления. Требование неизменности тензора необратимых деформаций p_{ij} при термоупругом деформировании и при разгрузке приводит к объективной производной по времени определенного вида. В (3) она записана для произвольного симметричного тензора с компонентами n_{ij} . Кососимметричный тензор z_{ij} в [2, 5] выписан полностью. Полагая материал слоя изотропным, упругий потенциал W зададим в форме

$$\begin{aligned}
W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \nu_2 \theta^2 - \\
&- \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \dots, \quad J_1 = d_{kk}, \quad J_2 = d_{ik}d_{ki}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Зависимость (4) записана для случая $p_{ij} \equiv 0$, μ – модуль сдвига, b, χ, ν_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) – термомеханические постоянные. При $p_{ij} \neq 0$ следует считать $J_1 = I_1 = c_{kk}$, $J_2 = I_2 = c_{ik}c_{ki}$, где $c_{ij} = m_{ij} - 0,5m_{ik}m_{kj}$. В случае изотермического деформирования ($\theta \equiv 0$) имеем $m_{ij} = e_{ij}$, тогда тензор с компонентами $e_{ij} - 0,5e_{ik}e_{kj}$ следует называть тензором упругих деформаций. В качестве условия пластичности будем использовать следующее обобщение функции нагружения Треска

$$\begin{aligned}
F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) &= \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p| = 0, \\
\varepsilon_{ij}^p &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0, \quad k = k_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_{pl}^2} \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\sigma_i, \varepsilon_i^p$ – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, η – коэффициент вязкости, θ_{pl} – температура плавления материала. Принимая закон теплопроводности Фурье, согласно уравнению баланса энтропии получаем уравнение теплопроводности вида

$$\left(1 + \frac{\beta_1}{\nu_2} \theta + \frac{\beta_2}{\nu_2} x_{jj} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3}{\nu_2} y_{ji} x_{ij} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{l}{2\nu_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p, \tag{6}$$

$$\beta_1 = \nu_2(1 - 3\alpha T_0) - 3\nu_6, \quad \beta_2 = -\nu_3, \quad \beta_3 = -\nu_1 - \nu_5,$$

где q – коэффициент температуропроводности. Там, где деформирование обратимо, в (5) $x_{jj} = d_{jj}$, $y_{jj} = \varepsilon_{ij}$, $l = 0$; в области течения $x_{jj} = c_{jj}$, $y_{jj} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p$, $l = 1$; в области разгрузки $x_{jj} = c_{jj}$, $y_{jj} = \varepsilon_{ij}$, $l = 0$.

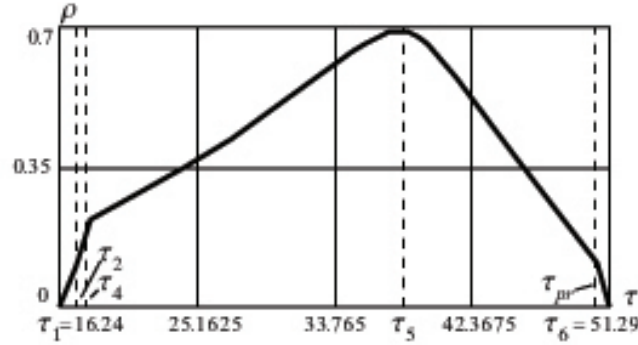


Рис. 1. Граница области вязкопластического течения

2. Как уже отмечалось, квазистатическое упругое равновесие слоя будет сохраняться до момента времени $t = t_*$, после которого начинается проскальзывание и разогрев. Во времена, следующие за t_* , получаем связанную задачу термоупругости. Поле температур, напряженно-деформированное состояние определяются при использовании (3) из уравнений равновесия их совместным решением с уравнением теплопроводности (5). Начальными условиями являются упругое равновесие в момент времени $t = t_*$ и $\theta(x_2, t_*) = 0$, краевыми условиями – соотношения (1), (2) и задаваемые условия нагружения. Решение задачи термоупругости, не содержащее дополнительных сложностей, будет справедливо до момента времени $t_1 > t_*$, когда начнет развиваться пластическое течение. Момент и место его зарождения находятся из полученного решения и условия (4), которое в данном случае имеет вид

$$(\sigma_{21} - k(\theta))|_{t=t_1, x_2=0} = 0. \quad (7)$$

С момента времени $t = t_1$ от границы $x_2 = 0$ развивается область течения, занимающая слой $0 \leq x_2 \leq r(t)$, $x_2 = r(t)$ – движущаяся по среде граница данной области, в слое $r(t) \leq x_2 \leq h$ материал деформируется обратимо. Положение упругопластической границы связывается с равенством нулю на ней скоростей пластических деформаций. Уравнение равновесия теперь следует проинтегрировать в двух областях отдельно; равенство (6), условия нагружения и условия непрерывности напряжений на упругопластической границе являются краевыми условиями. По найденному полю температур определяется кинематика течения и закон продвижения упругопластической границы. Интегрированием по времени найденных скоростей пластических деформаций при начальном условии $p_{ij}(t_1) = 0$ определяются компоненты необратимых деформаций p_{12} , p_{11} и p_{22} . После чего из (3) получаем дифференциальное уравнение для перемещения в области течения

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\zeta t}{\mu - l\theta} + 2p_{12}. \quad (8)$$

В области обратимого деформирования в (7) $p_{12} = 0$. Постоянная (функция времени) интегрирования определяется условием непрерывности перемещений на упругопластической границе.

Если далее с момента времени $t = t_2$ положить неизменным нагружающее усилие ($\sigma_{12}|_{x_2=h} = \zeta_1 t_2 = const$), то это порождает временную разгрузку среды: от плоскости

$x_2 = r(t_2)$ при $t \geq t_2$ отделяется новая упругопластическая граница $x_2 = r_1(t)$, продвигающаяся к плоскости скольжения. Однако в некоторый последующий момент времени $t = t_3$ движение данной границы меняет направление. В таком продвижении в момент времени $t = t_4$ она достигает плоскости $x_2 = r(t_2)$ и движется дальше к нагружаемой границе слоя. Таким образом, в промежутке времени $t_2 \leq t \leq t_3$ имеем три области, в которых процесс деформирования отвечает отличным друг от друга системам уравнений. В области $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ материал пластически деформируется, в области $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_2)$ деформирование обратимо, но в присутствии накопленных необратимых деформаций, область $r(t_2) \leq x_2 \leq h$ остается упругой. При $t \geq t_3$ таких областей остается две: область течения $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ и упругая область $r_1(t) \leq x_2 \leq h$. Для решения систем уравнений используются, как и ранее, краевые условия (2), условия непрерывности θ и $\partial\theta/\partial x_2$ на границах $r_1(t)$ и $r(t_2)$ и условие непрерывности θ при $t = t_2$.

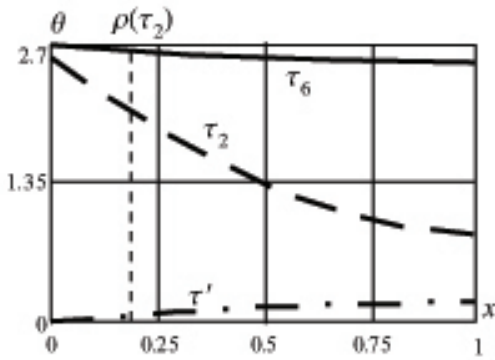


Рис. 2. Распределение температуры в разные моменты времени

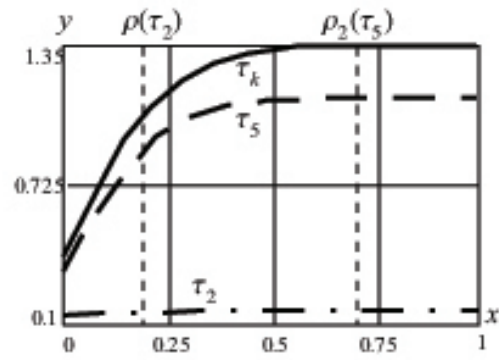


Рис. 3. Распределение перемещений в разные моменты времени

С момента времени $t = t_4$ рассматривается течение при уменьшающемся напряжении ($\sigma_{12}|_{x_2=h} = \zeta_1 t_2 - \zeta_2(t - t_4)$, $\zeta_2 > 0$) и разгрузка среды. Аналогично эффекту при постоянной нагрузке возникает новая граница $r_2(t)$, которая сначала движется от стационарной границы $r(t_4)$ к плоскости скольжения, затем меняет направление и движется вверх. В момент времени $t = t_5$ граница $r_2(t)$ перестает увеличиваться, т.е. вязкопластическое течение прекращается и появляется новая граница $r_3(t)$, движущаяся вниз от поверхности $r_2(t_5)$. В некоторый момент времени $t = t_{pr}$ вновь выполняется условие прилипания $\sigma_{12}|_{x_2=0} = f \sigma_{22}|_{x_2=0}$ и при дальнейшем уменьшении напряжения материал начнет остывать. В момент времени $t = t_6$ граница $r_3(t)$ достигнет нижнего края слоя $x_2 = 0$. После того, как при $t = t_7$ компонента тензора напряжений σ_{12} , а при $t' = t_{pr} + \gamma_1^{-1}$ температура θ станут равными нулю при $x_2 = 0$, дальнейшее охлаждение материала до конечного момента времени $t = t_k$ связано с заданием потока тепла на верхней границе слоя

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right|_{x_2=h} = \gamma_2 t, \quad \gamma_2 = const.$$

Иллюстрирующие решение графики приведены для значений: $f a_0 \mu^{-1} = 0,00005$, $\gamma h = 20$, $\mu q \zeta^{-1} h^{-2} = 1207,1429$, $\mu^2 (\xi \zeta h)^{-1} = 35 \cdot 10^4$, $\mu^2 (\eta \zeta)^{-1} = 2,8 \cdot 10^6$, $\beta_1 = 0,5$, $l \mu^{-1} = 0,01$, $\nu_2 \mu^{-1} = 0,02$, $\beta_3 = -0,5$, $k_0 \mu^{-1} = 0,00229796$, $\theta_{pl} = 2,68261$. Изменение упругопластической границы $\rho = r/h$ в зависимости от времени $\tau = \zeta t \mu^{-1}$ приведено на рис. . Распределения температуры θ и перемещений $y = u/h$ в процессе деформирования по слою $0 \leq x = x_2/h \leq 1$ показаны на рис. 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сапченко, И. Г. Управление структурой и свойствами пористых комбинированных удаляемых моделей / И. Г. Сапченко, С. Г. Жилин, О. Н. Комаров. – Владивосток: Дальнаука, 2007. – 138 с.
- [2] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Докл. РАН. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199–201.
- [3] Ковтанюк, Л. В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае / Л. В. Ковтанюк // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5. – № 1. – С. 107–117.
- [4] Ковтанюк, Л. В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестн. ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 87–93.
- [5] Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.

Буренин Анатолий Александрович,

член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Ковтанюк Лариса Валентиновна,

доктор физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Панченко Галина Леонидовна,

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток

e-mail: panchenko.21@yandex.ru

A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko

VISCOPLASTIC FLOW IN A FLAT LAYER WITH ALLOWANCE FOR HEATING DUE TO DEFORMATION AND FRICTION AT THE BOUNDARY

Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of Russian Academy of Science

Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Science

Vladivostok State University Economics and Service

Abstract. The article presents a solution to the coupled problem of thermoelastoplasticity about development flow in a flat layer of material is in terms of increasing pure shear and subsequent deceleration of flow with slow removal of the load. Thermophysical and deformation processes are interrelated, the yield point depends on a temperature. As an additional source of heat taken its production due to the friction material layer on a rough plane boundary. Conditions for the birth of a viscoplastic flow and regularities propulsion on the layer of elastoplastic boundaries are found, flow rate, large deformation both reversible and irreversible are calculated. Braking current at reducing the biasing force followed by cooling of the material layer is considered.

Keywords: elasticity, plasticity, viscosity, thermal conductivity, large deformations.

REFERENCES

- [1] Sapchenko, I. G. Management of structure and properties of porous composite removable models / I. G. Sapchenko, S. G. Zhilin, O. N. Komarov. – Vladivostok: Dalnauka, 2007. – 138 p.
- [2] Burenin, A. A. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium / A. A. Burenin, G. I. Bykovtsev, L. V. Kovtanyuk // Doklady Physics. – 1996. – Vol. 41. – I. 3. – P. 127–129.
- [3] Kovtanyuk, L. V. The modeling of elastoplastic deformations in the non-isothermal case / L. V. Kovtanyuk // Far Eastern Mathematical Journal – 2004. – Vol. 5. – I. 1. – P. 107–117.
- [4] Kovtanyuk, L. V. On the theory of large elastoplastic deformation of materials taking into account the temperature and the rheological effects / L. V. Kovtanyuk, A. V. Shitikov // Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences – 2006. – I. 4. – P. 87–93.
- [5] Burenin, A. A. Large irreversible deformation and elastic aftereffect / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk. – Vladivostok: Dalnauka, 2013. – 312 p.

Burenin Anatoly Aleksandrovich

Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of Russian Academy of Science, Komsomolsk-on-Amur

Kovtanyuk Larisa Valentinovna

Dr. Sci. Phys. & Math., Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of science, Vladivostok

Panchenko Galina Leonidovna

Vladivostok State University Economics and Service, Vladivostok

С. В. Белых¹, К. С. Бормотин¹, А. А. Буренин², Л. В. Ковтаниук³, А. Н. Прокудин²

О БОЛЬШИХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ МАТЕРИАЛОВ С УПРУГИМИ, ВЯЗКИМИ И ПЛАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

¹Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет

²Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

³Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. Предлагается математическая модель процессов деформирования материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами, способных приобретать большие деформации. Указаны возможные конкретизации модели с целью учета различных эффектов необратимого деформирования.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, пластичность, большие деформации.

УДК: 539.374

Современное авиастроение при изготовлении деталей планеров вынуждено прибегать к технологиям формовки крупногабаритных, монолитных конструктивных элементов. К главным причинам, предопределившим данное обстоятельство и отказ от традиционных технологий, отнесем низкую технологичность последних и затратность по материалам. Более того, они приводят часто к недопустимому снижению в прочностных свойствах обрабатываемых материалов. В то же время холодная формовка за счет медленного режима ползучести оказывается [1], [2] наиболее перспективным технологическим процессом, сохраняющим прочностной ресурс материалов в условиях их интенсивного формоизменения.

Следует признать, что режимы холодной формовки, впрочем как и режимы традиционных технологий, не обходятся без возникновения локальных областей пластического течения, главным образом в местах воздействия оснасткой на деформируемые материалы. Возникновение областей течения как раз отрицательно сказывается на прочностных и деформационных свойствах формируемых материалов, в качестве которых чаще всего выступают высокопрочные алюминиевые сплавы. Поэтому следует добиваться возможно большей ограниченности таких областей по объему. В то же время их наличие невозможно игнорировать при расчетном моделировании процесса интенсивного необратимого деформирования, поскольку они существенно влияют на уровень и распределение напряжений, следовательно, на процесс в целом. Это приводит к необходимости использовать в таком расчетном моделировании изотермические теории ползучести при одновременном учете возможности возникновения и развития зон пластического течения. Связанные с интенсивным формоизменением технологические условия процесса не позволяют ограничиться только малыми деформациями. Следовательно, адекватной математической моделью для описания процессов типа холодной формовки может быть только теория больших деформаций материалов, обладающих как упругими, так и пластическими и вязкими свойствами. Таких моделей за более чем сорокалетнюю историю

[3] развития теории построено значительное количество [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Обзор иностранных работ содержится в [10]. Здесь будем отталкиваться от модели упругопластических деформаций, предложенной в [7] и подробно описанной в [9]. Ее достоинство состоит в сохранении основных положений пластических теорий [11] деформирования упругопластических сред. Именно, пластические деформации не изменяются при обратимом деформировании, включая разгрузку; напряжения в среде полностью определяются уровнем и распределением упругих деформаций; разгрузочное состояние не зависит от пути разгрузки в пространстве напряжений. Принятие данных положений, которые могут опытно и не подтверждаться, существенно упрощает теорию настолько, что удается поставить и решить целый ряд краевых задач [12], [13], [14], [15], [16], включая получение точных решений.

Здесь, следуя основным идеям [7], [9], построим замкнутую модель больших деформаций, необратимые деформации в которой суммировались бы, последовательно накапливались в условиях ползучести, затем пластичности в условиях течения и снова ползучести при разгрузке. Таким образом необратимые деформации подразделяются на деформации ползучести и пластического течения только за счет механизма их производства. Полагаем, что для решения задач холодной формовки данный подход окажется наиболее перспективным.

Кинематика больших деформаций. Рассмотрим кинематику деформируемой среды, считая, что деформации ее могут быть и обратимыми, и необратимыми. Полагаем, что независимыми переменными являются пространственные координаты x_i ($i = 1, 2, 3$) точек среды. Иначе, используем Эйлеров способ задания движения среды и для закона ее движения запишем:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t). \quad (1)$$

Здесь a_i – материальные координаты точки деформируемой среды (координаты Лагранжа), t – время. В качестве a_i принимаем координаты точек среды в ее свободном состоянии при $t = 0$.

Для компонент тензора дисторсии $a_{i,j} = \partial a_i / \partial x_j$ в используемой здесь прямоугольной декартовой системе координат имеем уравнения их изменения (переноса):

$$\begin{aligned} \frac{da_{i,j}}{dt} + a_{i,k}v_{k,j} &= 0; \\ v_k = \frac{du_k}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + v_m u_{k,m}; \quad u_k &= x_k - a_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношениями (2) вводятся в рассмотрение координаты u_j , v_k векторов перемещений и скоростей точек среды соответственно. Для компонент тензора дисторсии и метрического тензора g_{ij} введем представление

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= Y_{i,k}(\delta_{kj} - e_{kj}) \\ g_{ij} &= a_{s,i}a_{s,j} = (\delta_{ik} - e_{ik})(\delta_{km} - 2p_{km})(\delta_{mj} - e_{mj}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь δ_{ij} – компоненты единичного тензора (символы Кронекера).

Для тензора p_{ij} из (3) непосредственно следует:

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - Y_{m,i}Y_{m,j}).$$

Таким образом, введенный в (3) тензор с компонентами p_{ij} является симметричным $p_{ij} = p_{ji}$. Но тензор с компонентами e_{ij} , в общем случае представленный в (3), может и не быть симметричным; первое равенство из (3) не является полярным разложением тензора дисторсии. Исходя из (2) и (3), возможно записать уравнения изменения для введенных в (3) тензоров.

$$\begin{aligned}
\frac{de_{ij}}{dt} &= v_{i,j} - b_{ij} - e_{ik}v_{k,j} + b_{ik}e_{kj} \\
\frac{dp_{ij}}{dt} &= \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) - p_{ik}b_{kj} + b_{ki}p_{kj} \\
b_{ij} &= -Y_{ik}^{-1} \frac{dY_{kj}}{dt}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Потребуем теперь, чтобы тензор с компонентами e_{ij} был симметричным. Это возможно только при условии, следующем из (4):

$$b_{km}(\delta_{mj} - e_{mj}) - (\delta_{km} - e_{km})b_{mj} = (\delta_{km} - e_{km})v_{m,j} - v_{m,k}(\delta_{mj} - e_{mj}). \tag{5}$$

Таким образом, для симметрии $e_{ij} = e_{ji}$ тензора в (2) требуется выполнение условия (5). Иначе, тензор с компонентами b_{km} не может быть произвольным, а удовлетворять зависимостям (5), и только в этом случае $e_{ij} = e_{ji}$. Тензорное равенство (5) в таком случае следует рассматривать в качестве уравнения для b_{km} . Решением данного уравнения является [17]:

$$b_{ij} = r_{ij} + (\delta_{ik} - e_{ik})t_{kj}. \tag{6}$$

В решении (6) t_{kj} – компоненты произвольного, но симметричного тензора: $t_{kj} = t_{jk}$. Тензор с компонентами r_{ij} является кососимметричным $r_{ij} = -r_{ji}$ и для него

$$\begin{aligned}
r_{ij} &= w_{ij} + A^{-1}[\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}] + B(\varepsilon_{ik}e_{km}e_{mj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mj}) + e_{ik}\varepsilon_{km}e_{mn}e_{nj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mn}e_{nj} \\
v_{i,j} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) - \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + w_{ij} \\
A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3; \quad B = 2 - E_1; \\
E_1 &= e_{jj}; \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}; \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Зависимости (6) и (7) дают возможность переписать уравнения (4) изменения компонент e_{ij} и p_{ij} в форме

$$\begin{aligned}
\frac{de_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij} - t_{ij} - r_{ij} + w_{ij} - e_{ik}(\varepsilon_{kj} + w_{kj} - t_{kj}) + (r_{ik} + t_{ik})e_{kj} - e_{im}t_{mk}e_{kj} \\
\frac{dp_{ij}}{dt} &= t_{ij} - \frac{1}{2}(e_{ik}t_{kj} + t_{ik}e_{kj}) + (r_{ik} - t_{ik})p_{kj} - p_{ik}(r_{kj} + t_{kj}) + p_{ik}e_{km}t_{mj} + t_{im}e_{mk}p_{kj}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Положим в (6) компоненты произвольного симметричного тензора t_{ij} равными нулю. Тогда уравнения переноса (8) упрощаются:

$$\begin{aligned}
\frac{de_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij} + w_{ik}e_{kj} - e_{ik}w_{kj} - \frac{1}{2}(e_{ik}\varepsilon_{kj} + \varepsilon_{ik}e_{kj}) + \frac{1}{2}(z_{ik}e_{kj} + e_{ik}z_{kj}) \\
\frac{dp_{ij}}{dt} &= w_{ik}p_{kj} - p_{ik}w_{kj} + z_{ik}p_{kj} - p_{ik}z_{kj} \\
z_{ij} &= r_{ij} - w_{ij}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если бы среда не деформировалась, то $\varepsilon_{ij} \equiv 0$, а из (7) следовало бы, что $z_{ij} = 0$. Тогда из второго равенства (9) вытекало бы, что производная Яумана от тензора с компонентами p_{ij} равна тождественно нулю и данные компоненты изменяются так же, как если среда двигалась бы как жесткое целое. Но присутствие двух последних слагаемых во втором соотношении (9), отличающих его от объективной производной p_{ij} по времени в смысле Яумана, не меняют существа этого вывода, меняя только саму объективную производную.

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \frac{dp_{ij}}{dt} - r_{ik}p_{kj} + p_{ik}r_{kj} = 0. \quad (10)$$

В отличие от производной Яумана в (10) вместо тензора вращений с компонентами w_{ij} используется другой кососимметричный тензор ($r_{ij} = -r_{ji}$), компоненты r_{ij} которого в своей главной линейной части совпадают с w_{ij} . Согласно (10) изменяются компоненты p_{ij} при неизменном в целом данном тензоре. Это обстоятельство предоставляет возможность отождествить компоненты p_{ij} с необратимыми деформациями, а случай с $t_{ij} \equiv 0$ считать процессом обратимого деформирования. При этом необратимые деформации в среде могут присутствовать, но изменяться в соответствии с (10), то есть так, как если бы среда двигалась как жесткое целое, не изменяя тензор необратимых деформаций. Наличие двух последних слагаемых во втором равенстве из (9) связано с геометрической корректностью в «выборе» объективной производной [5] с тем, чтобы тензор необратимых деформаций с компонентами p_{ij} не менялся в случае обратимого деформирования $t_{ij} \equiv 0$. Заметим, что обратимое деформирование таким образом полностью кинематически определено, поскольку оно продолжается в течение такого промежутка времени, когда неизвестный до сих пор тензор остается нулевым ($t_{ij} \equiv 0$). Тогда же, когда необратимые деформации накапливаются, компоненты произвольного симметричного тензора t_{ij} обязаны быть определены из других условий. Заметим, наконец, что компоненты d_{ij} полных деформаций Альманси, следуя (2), (3), вычисляются через зависимости:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}. \quad (11)$$

Согласно (11) при признании p_{ij} необратимыми деформациями в качестве обратимых деформаций следует считать $s_{ij} = e_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj}$.

Определяющие законы. Рассмотрим первоначальный случай, когда необратимые деформации в среде не накапливаются, то есть в случае обратимого деформирования. Исходим из закона сохранения энергии, который запишем в форме:

$$\rho \frac{de}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}. \quad (12)$$

Здесь ρ – плотность среды, e – плотность распределения внутренней энергии, q_i – компоненты вектора потока тепла, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

Рассматривая медленные процессы, в качестве термодинамического потенциала будем использовать свободную энергию, для плотности распределения Ψ которой имеем:

$$\begin{aligned} \Psi(e_{ij}, T) &= e(e_{ij}, s) - sT; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial T} &= -s; \quad \frac{\partial e}{\partial s} = T, \end{aligned} \quad (13)$$

где T – температура, s – плотность распределения энтропии. В (13) принимается гипотеза о том, что термодинамические потенциалы деформирования задаются лишь консервативным механизмом деформирования, а диссипативный механизм полностью ответственен за производство энтропии. Иными словами, полагаем, что Ψ не зависит от необратимых деформаций.

Подстановка (13) в (14) приводит к соотношению:

$$\rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} \frac{de_{ij}}{dt} + T \frac{ds}{dt} \right) + q_{i,j} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = 0. \quad (14)$$

Исключив из (14) производные деформаций с помощью первого равенства из (9), его можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \left(\rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} - \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} e_{kj} + A^{-1} B^2 (e_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial e_{km}} e_{mj} - \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} e_{km} e_{mj}) \right) + \right. \\ & A^{-1} B (e_{ik} e_{km} \frac{\partial \Psi}{\partial e_{mn}} e_{nj} - \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} e_{km} e_{mn} e_{nj}) + A^{-1} (e_{ik} e_{km} \frac{\partial \Psi}{\partial e_{mn}} e_{nt} e_{tj} - e_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial e_{km}} e_{mn} e_{nt} e_{tj}) \left. \right) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ & + \rho r_{ij} \left(e_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial e_{kj}} - \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} e_{kj} \right) + \rho T \frac{dS}{dt} + q_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда в силу независимости процессов, задаваемых e_{ij}, r_{ij} и T , учитывая симметрию тензора напряжений, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}) \\ \rho T \frac{dS}{dt} + q_{i,j} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Первое соотношение из (16) представляет собой аналог известной в нелинейной теории упругости [17] формулы Мурнагана, второе – уравнение баланса энтропии в условиях обратимого деформирования. В областях, где необратимые деформации отсутствуют ($p_{ij} \equiv 0$), формула Мурнагана принимает классическую форму записи:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}) \\ d_{ij} &= e_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, напряжения через деформации вычисляются либо зависимостью (17) при отсутствии необратимых деформаций, либо первым соотношением из (16), когда необратимые деформации в среде присутствуют. При этом конкретные деформационные свойства среды обязаны определять задание конкретной функции $\Psi = \Psi(e_{ij}, T)$ или, в случае отсутствия необратимых деформаций, – функции $\Psi = \Psi(d_{ij}, T)$. Данные функции обязаны совпадать при p_{ij} , стремящемся к нулю. Важно подчеркнуть, что формула Мурнагана задает напряжения в среде в зависимости только от обратимых деформаций, и это справедливо также и тогда, когда необратимые деформации изменяются.

Такое положение вполне аналогично классическому случаю упругопластической среды в математических моделях типа Прандтля-Рейса [11], [18]. В нашем случае задание напряжений уровнем и распределением обратимых деформаций является следствием гипотезы о независимости термодинамических потенциалов (свободная энергия, внутренняя энергия) от необратимых деформаций. Пусть теперь $t_{ij} \neq 0$ в процессе деформирования. В таком случае в среде могут накапливаться необратимые деформации. Теперь вместо первой зависимости (9) в уравнение (14) следует подставить первую же зависимость из (8). Результат такой подстановки запишем в виде:

$$\begin{aligned} & \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} (\delta_{ij} - e_{kj}) - \sigma_{ij} \right) \varepsilon_{ij} + \rho T \frac{dS}{dt} + q_{j,i} = \tau_{ij} t_{ij} \\ \tau_{ij} &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - 2e_{kj} + e_{km} e_{mj}) = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - s_{kj}). \end{aligned} \quad (18)$$

Как и следовало ожидать, из (26) следуют формула Мурнагана (16) и уравнение баланса энтропии с источником. Перепишем последнее уравнение в канонической форме уравнения баланса:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} = -(T^{-1}q_j + \rho S v_j)_j - T^{-2}q_j T_{,j} + T^{-1}\tau_{ij}t_{ji}. \quad (19)$$

В (27) первое слагаемое правой части представляет собой полный поток энтропии, а два последующих задают производство энтропии за счет необратимых процессов теплопроводности и необратимого деформирования соответственно. Ограничимся далее изотермическим процессом деформирования. Обобщение на неизотермический случай, по-видимому, не встретит дополнительных сложностей, как это было в случае, где приобретение необратимых деформаций связывалось только с идеальным пластическим течением [8], [9]. В изотермическом случае производство энтропии осуществляется только за счет необратимого процесса деформирования, то есть за счет пластического течения, либо за счет вязкого сопротивления деформированию, либо процесса ползучести, что также связано с учетом вязких свойств среды. Производство энтропии за счет пластичности и вязкости происходит по-разному, но его можно обобщенно представить одним соотношением:

$$D = \sigma_{ij}\gamma_{ij}. \quad (20)$$

Действительно, если среда не обладает пластическими свойствами, а только вязкими, или пластические свойства не проявляются в процессах, предвещающих течение или при разгрузке, то имеем классическое представление для источника энтропии [19]:

$$D = \sigma_{ij}e_{ij}^v. \quad (21)$$

В случае же идеальной пластичности для производства энтропии (его часто называют диссипативной функцией) также имеем классическое представление [20]:

$$D = \sigma_{ij}e_{ij}^p. \quad (22)$$

В (29) и (22) e_{ij}^v и e_{ij}^p — соответственно скорости деформации ползучести и пластичности. Следовательно $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v$ в областях, где не происходит пластическое течение и $\gamma_{ij} = e_{ij}^p$ при пластическом течении. Более сложное представление для γ_{ij} остается для областей течения, когда такое течение невозможно считать идеальным. Вязкие свойства среды могут тормозить течение, что часто моделируется добавлением соответствующих слагаемых в пластический потенциал (поверхность нагружения). Однако представление (28) будет справедливо и в этом случае; только для γ_{ij} следует находить более точное определение. Согласно (27)–(28) в самом общем случае изотермического деформирования получаем:

$$\sigma_{ij}\gamma_{ij} = T^{-1}\tau_{ij}t_{ij}. \quad (23)$$

Вместе с (16) и (26) последнее соотношение позволяет записать:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= T\sigma_{ik}(\delta_{kj} - e_{kj}), \\ \gamma_{ij} &= t_{ik}(\delta_{kj} - e_{kj}). \end{aligned} \quad (24)$$

Последняя зависимость (24) связывает до настоящего времени неизвестный симметричный тензор с компонентами t_{ik} с компонентами γ_{ij} тензора скоростей необратимых деформаций p_{ij} . Исключая данный неизвестный тензор при помощи второй зависимости из (24), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \\ \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}. \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно его механическому смыслу тензор с компонентами γ_{ij} следует называть тензором скоростей необратимых деформаций.

Последним равенством из (25) введена объективная производная, записанная для компонент некоторого произвольного тензора n_{ij} . Именно с ее помощью обратимые и необратимые деформации оказываются связанными в процессе деформирования с тем, чтобы, выполняя условия геометрической корректности, добиться неизменности тензора необратимых деформаций в тех случаях, когда их источник γ_{ij} тождественен нулю. Обратим еще раз внимание на то обстоятельство, что при равенстве нулю нелинейной части тензора вращений $r_{ij}(z_{ij} \equiv 0)$ введенная объективная производная совпадает с производной Яумана.

Возможные конкретизации определяющих зависимостей. Конкретизация общих зависимостей предыдущих параграфов связана с конкретизацией консервативного (упругого) и диссипативного (вязкопластического) механизмов деформирования. Консервативный механизм задается в рассматриваемом приближении изотермического деформирования заданием функции термодинамического потенциала $\Psi(e_{ij})$ (свободная энергия) в зависимости от обратимых (упругих) деформаций. Данный механизм может существовать независимо от диссипативного механизма деформирования, определяющего накопление необратимых деформаций. Диссипативный механизм определяется пластическими и реологическими свойствами среды, для его конкретизации следует определить скорости γ_{ij} роста необратимых деформаций в зависимости от напряжений в среде. Отметим еще раз принятые гипотезы при математическом моделировании общих соотношений предыдущего параграфа. К ним относятся принимаемые изначально положения о:

- присутствию в среде обратимых и необратимых деформаций;
- возможности существования чисто консервативного процесса деформирования, когда источник γ_{ij} в уравнениях изменения необратимых деформаций равен нулю ($t_{ij} \equiv 0$) и необратимые деформации изменяются при консервативном (упругом) процессе деформирования также, как если бы среда перемещалась как жесткое целое;
- том, что напряжения в среде определяются только уровнем и распределением обратимых деформаций или, что то же, свободная энергия является функцией только обратимых деформаций $\Psi = \Psi(e_{ij})$.

Принятие данных положений заставило в целях геометрической и термодинамической корректности модели принять соответствующий выбор (25) объективной производной по времени.

В целях конкретизации консервативного механизма деформирования зададим, например, термодинамический потенциал в форме его разложения в ряд по инвариантам тензора деформаций:

$$W(I_1, I_2, I_3) = \rho_0^{-1} \Psi(I_1, I_2, I_3) = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \dots \quad (26)$$

$$I_1 = s_{jj}; I_2 = s_{ij} s_{ji}; I_3 = s_{ij} s_{jk} s_{ki}.$$

Зависимость (26) предполагает изотропию среды и присутствие в ней необратимых деформаций, изменяющихся или неизменяющихся, то есть (26) предполагает $p_{ij} \neq 0$. Когда $p_{ij} \equiv 0$, то вместо (26) следует использовать разложение:

$$W(J_1, J_2, J_3) = \rho_0^{-1} \Psi(J_1, J_2, J_3) = \frac{\lambda}{2} J_1^2 + \mu J_2 + l J_1 J_2 + m J_1^3 + n J_3 + \dots \quad (27)$$

$$J_1 = d_{jj}; J_2 = d_{ij} d_{ji}; J_3 = d_{ij} d_{jk} d_{ki}.$$

Очевидно, что зависимость (26) переходит в (27) при $p_{ij} = 0$. В них λ, μ – параметры Ламе, l, m, n – модули третьего порядка, значения которых опытно измерены для широкого класса материалов [17].

Если пластические свойства деформируемой среды проявляются при достижении поверхности нагружения, то вязкие присущи всем этапам процесса деформирования. Только пренебрегая свойством вязкости материала деформируемой среды, ее принимают в качестве упругой. Но свойство вязкости может оказаться определяющим для процесса деформирования причем, как в быстрых, так и в медленных таких процессах. В первом случае это влияние на процесс заметно проявляется в эффектах наклепа и эффекте Баушингера. Во втором данное свойство задает ползучесть материала и его усталостную прочность. Все такие свойства, определяемые вязкостью среды, могут задаваться различным их модельным учетом. Рассмотренные представления оставляют для этого соответствующий простор. Свойство ползучести, например, возможно включить в модель, постулируя закон ползучести конкретизированием источника γ_{ij} необратимых деформаций в форме:

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \\ V(\Sigma) &= B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ \Sigma &= \sqrt{\frac{3}{2}}((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)^{1/2} \\ \sigma &= \frac{1}{3}\sigma_{jj} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).\end{aligned}\tag{28}$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений, B, n – постоянные материала. Инвариант тензора напряжений Σ с точностью до числового множителя совпадает с октаэдрическим напряжением, то есть с интенсивностью напряжений. Зависимости (28) однозначно задают диссипативный механизм деформирования в областях, где пластическое деформирование отсутствует. Эти области соответствуют деформированию, предваряющему течение, и разгрузке. Согласно (28) ползучесть материала деформируемой среды соответствует степенному закону Нортона [23]. Когда в моделировании изотермической ползучести требуется учесть иные зависимости скоростей ползучести от напряжений, то для этого нет препятствий. Достаточно по-иному переписать соотношения (28), ведь последние выписаны только в качестве примера.

Предположим, также в качестве примера, что поверхностью нагружения является цилиндр Мизеса:

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma'_{ij}\sigma'_{ji} - \frac{8}{3}k^2 = 0, \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma,\tag{29}$$

где k – постоянная материала среды (предел текучести). Следуя принципу максимума Мизеса, формулируем ассоциированный закон пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \lambda > 0.\tag{30}$$

Если положить теперь, что $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$, а именно, что единственным источником необратимых деформаций в областях пластического течения является только пластическое течение и следовательно $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$, то приходим к замкнутой математической модели. В такой модели пренебрегают вязкими свойствами среды при ее пластическом течении. Когда вязкими свойствами среды пренебрегают также при деформировании, предваряющем течение и в условиях разгрузки, то получаем математическую модель идеальной упругопластической среды, допускающей большие деформации [7], [9]. Выбор условия пластичности (29) здесь произволен и связывается с дополнительными предпочтениями. Когда вязкие свойства среды не учитываются только в условиях ее пластического течения, то упругопластические границы становятся

местом, где кардинально изменяется механизм накопления необратимых деформаций. Накопленные такие деформации до включения механизма пластического течения оказываются начальными для своего дальнейшего роста уже согласно сменившимся законам.

Учет вязкости среды при ее пластическом течении приводит к замедлению течения. Если такой учет необходим, то его можно включить соответствующим изменением пластического потенциала. Так, условие пластичности можно обобщить, записав его в форме:

$$\begin{aligned} (\sigma'_{ij} - \eta \varepsilon'_{ij}{}^p)(\sigma'_{ij} - \eta \varepsilon'_{ij}{}^p) &= \frac{8}{3} k^2, \\ \varepsilon'_{ij}{}^p &= \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^p \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (31)$$

Постоянная n задает в (31) как раз вязкое сопротивление пластическому течению и называется коэффициентом вязкости. Ассоциированный закон пластического течения (30) в таком случае принимает вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij}{}^p &= \varphi \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}, \\ \varphi &= \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ji}}\right); \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{\eta} \frac{\sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ji}} - \sqrt{\frac{8}{3} k}}{\sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ji}}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Дальнейшее обобщение (29) можно связать с включением в него слагаемых, ответственных за упрочнение:

$$(\sigma'_{ij} - b p_{ij} - \eta \varepsilon'_{ij}{}^p)(\sigma'_{ij} - b p_{ij} - \eta \varepsilon'_{ij}{}^p) = \frac{8}{3} k^2. \quad (33)$$

Здесь параметр b характеризует проявление при деформировании эффекта Баушингера. Когда бы требовалось учесть эффект необратимой сжимаемости в условиях пластического течения, то поверхность нагружения следовало бы принять в форме конуса Мизеса-Шлейхера:

$$\begin{aligned} (\sigma'_{ij} - \eta_1 \varepsilon'_{ij}{}^p)(\sigma'_{ij} - \eta_2 \varepsilon'_{ij}{}^p) &= 2(k - \delta \sigma + \eta_2 |\varepsilon^p|)^2 \\ \varepsilon^p &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}^p. \end{aligned} \quad (34)$$

В (34) η_1, η_2 – коэффициенты вязкости. Иногда более удобными оказываются обобщения кусочно-линейных условий пластичности [21]:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p - \varepsilon_m^p|, \quad (35)$$

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p|, \quad (36)$$

$$\max |\sigma_i - \sigma| = \frac{3}{2} k + \frac{3}{2} \eta \max |\varepsilon_k^p|, \quad (37)$$

$$|(\sigma_i - \eta \varepsilon_i^p) - (\sigma_j - \eta \varepsilon_j^p)| = k. \quad (38)$$

где ε_k^p – главные значения тензора скоростей пластических деформаций. Поверхности нагружения (35)–(37) построены по аналогии с теорией изотропного упрочнения, условие (38) представляет собой видоизмененное условие пластичности, используемое в теории трансляционного упрочнения. Таким образом, в теории больших деформаций возможно использование всех математических моделей, зарекомендовавших себя так или иначе при использовании предположения о малости деформаций. При этом оставляется свобода для построения новых моделей, полагая, например, $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^v$, и задавая в области течения ε_{ij}^p и ε_{ij}^v самостоятельными зависимостями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Олейников, А. И.* Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей / А. И. Олейников, А. И. Пекарш – М. : Эком, 2009. – 109 с.
- [2] *Горев, Б. В.* К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести / Б. В. Горев, И. Д. Клопотов, Г. А. Раевская, О. В. Соснин // ПМТФ. – 1980. – № 5. – С. 185–191.
- [3] *Lee, E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains / E. H. Lee // Trans ASME: J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36 – № 1. – P. 1–6.
- [4] *Кондауров, В. Н.* Об уравнениях упругопластической среды с конечными деформациями / В. Н. Кондауров // ПМТФ. – 1982. – № 4. – С. 133–139.
- [5] *Левитас, В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В. И. Левитас – Киев : Наукова Думка, 1987. – 232 с.
- [6] *Быковцев, Г. И.* Конечные деформации упругопластических сред / Г. И. Быковцев, А. В. Шитиков // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. – № 1. – С. 59–62.
- [7] *Буренин, А. А.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199–201.
- [8] *Ковтанюк, Л. В.* Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае / Л. В. Ковтанюк // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5. – № 1. – С. 104–117.
- [9] *Буренин, А. А.* Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк – Владивосток : Дальнаука, 2013. – 312 с.
- [10] *Xia, Z.* A finite elasticplastic constitutive formulation with new co-rotational stress-rate and strain-hardning rule / Z. Xia, F. Ellain // Trans ASME: J. Appl. Mech. – 1995. – № 3. – P. 733–739.
- [11] *Галин, Л. А.* Упругопластические задачи / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1984. – 232 с.
- [12] *Ковтанюк, Л. В.* О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 2005. – Т. 400. – № 6. – С. 764–767.
- [13] *Буренин, А. А.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // ПММ. – 2003. – Т. 64. – Вып. 2 – С. 316–325.
- [14] *Буренин, А. А.* О точных решениях в теории больших упруговязкопластических деформаций / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Динамика сплошной среды, институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. – Новосибирск. – 2007. – Вып. 125 – С. 28–31.
- [15] *Буренин, А. А.* Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки / А. А. Буренин, А. С. Устинова // Успехи механики сплошных сред. К 70-летию В. А. Левина. – Владивосток : Дальнаука, 2009. – С. 91–102.
- [16] *Ковтанюк, Л. В.* Течение упруговязкопластической среды по трубе в условиях изменяющегося перепада давления / Л. В. Ковтанюк, В. П. Матвеев, А. А. Буренин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1(15). – С. 69–80.
- [17] *Лурье, А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
- [18] *Аннин, Б. Д.* Упругопластическая задача / Л. А. Галин, Г. П. Черепанов – Новосибирск : Наука, 1983. – 240 с.
- [19] *Де Грост, С.* Неравновесная термодинамика / С. де Грост, П. Мазур – М. : Мир, 1964. – 456 с.
- [20] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
- [21] *Знаменский, В. А.* Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных поведении / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114–118.

[22] *Прагер, В.* Введение в механику сплошных сред / В. Прагер. – М. : Изд-во иностр. литер., 1963. – 312 с.

[23] *Локощенко, А. М.* Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов / А. М. Локощенко. – М. : МГИУ, 2007. – 264 с.

[24] *Спорыхин, А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 1997. – 361 с.

Белых Сергей Викторович,

кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: prnir@knastu.ru

Бормотин Константин Сергеевич,

кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: cvmi@knastu.ru

Буренин Анатолий Александрович,

доктор физико-математических наук, член.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: mail@imim.ru

Ковтанюк Лариса Валентиновна,

доктор физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Прокудин Александр Николаевич,

кандидат технических наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: prokudin@imim.ru

S. V. Belykh¹, K. S. Bormotin¹, A. A. Burenin², L. V. Kovtanyuk³, A. N. Prokudin²

ON LARGE ISOTHERMAL DEFORMATION OF MATERIALS WITH ELASTIC, VISCOUS AND PLASTIC PROPERTIES

¹*Komsomolsk-on-Amur state technical university*

²*Institute of machinery and metallurgy FEB RAS*

³*Institute of automation and control processes FEB RAS*

Abstract. Mathematical model of the deformation processes materials with elastic, viscous and plastic properties, the ability to acquire large deformation is proposed. Possible specification of the model to account for the different effects of irreversible deformation indicated.

Keywords: elasticity, creep, plasticity, large strains

REFERENCES

- [1] *Oleinikov, A. I.* Integrated design of processes monolithic panels / A. I. Oleinikov, A. I. Pekarsh – M. : Ekom, 2009. – 109 p.
- [2] *Gorev, B. V.* On the question of the treatment of materials in pressurized creep mode / B. V. Gorev, I. D. Klopotov, G. A. Raevskaya, O. V. Sosnin // PMTF. – 1980. – № 5. – P. 185–191.
- [3] *Lee, E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains / E. H. Lee // Trans ASME: J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36 – № 1. – P. 1–6.
- [4] *Kondaurov, V. N.* On the equations of elastic-plastic medium with finite deformations / V. N. Kondaurov // PMTF. – 1982. – № 4 – P. 133–139.
- [5] *Levitas, V. I.* Large elastic-plastic deformation of materials at high pressure / V. I. Levits – Kiev : Naukova Dumka, 1987. – 232 p.
- [6] *Bykovtsev, G. I.* Finite deformation of elastoplastic media / G. I. Bykovtsev, A. B. Shitikov // DAN USSR. – 1990. – Vol. 311. – № 1. – P. 59–62.
- [7] *Burenin, A. A.* On a simple model for elastoplastic medium with finite deformations / A. A. Burenin, G. I. Bykovtsev, L. V. Kovtanyuk // DAN. – 1996. – Vol. 347. – № 2. – P. 199–201.
- [8] *Kovtanyuk, L. V.* The modeling of elastic-plastic deformations in the case of non-isothermal / L. V. Kovtanyuk // Far-east Mathematical Journal. – 2004. – Vol. 5. – № 1. – P. 104–117.
- [9] *Burenin, A. A.* Large irreversible deformation and springback / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk – Vladivostok : Dalnauka, 2013. – 312 p.
- [10] *Xia, Z.* A finite elasticplastic constitutive formulation with new co-rotational stress-rate and strain-hardning rule / Z. Xia, F. Ellain // Trans ASME: J. Appl. Mech. – 1995. – № 3 – P. 733–739.
- [11] *Galim, L. A.* Elastoplastic problems / L. A. Galim. – M. : Nauka, 1984. – 232 p.
- [12] *Kovtanyuk, L. V.* On the bursting of elastic-visco-plastic material through a rigid cylindrical die / L. V. Kovtanyuk // ДАН. – 2005. – Vol. 400. – № 6. – P. 764–767.
- [13] *Burenin, A. A.* Formation of one-dimensional residual stress field in the vicinity of the cylindrical defect continuity elastoplastic medium / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, M. V. Polonik // PMM. – 2003. – Vol. 64. – № 2. – P. 316–325.
- [14] *Burenin, A. A.* On exact solutions to the theory of large elastic-visco-plastic deformations / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk // Dynamics of continuous medium, Institute of Hydrodynamics. SB RAS, Novosibirsk, Russia. – 2007. – Vol. 125. – P. 28–31.
- [15] *Burenin, A. A.* Development and braking screw viscoplastic flow with calculation of elastic response after stopping the flow and discharge / A. A. Burenin, A. S. Ustinove // The progress in continuum mechanics. On the 70th anniversary of VA Levin. Vladivostok : Dalnauka. – 2009. – P. 91–102.

- [16] *Kovtanyuk, L. V.* During elastoviscoplastic medium through a pipe in a changing differential pressure / L. V. Kovtanyuk, V. P. Matveenko, A. A. Burenin // Vestnik the Chuvash State Pedagogical University of I. J. Jakovleva. Line : Mechanics of a limiting condition. – 2013. – № 1 (15). – P. 69–80.
- [17] *Lurie, A. I.* Nonlinear elasticity / A. I. Lurie. – M. : Nauka, 1980. – 512 p.
- [18] *Annin, B. D.* Elastoplastic problem / B. D. Annin, G. P. Cherepanov – Novosibirsk : Nauka, 1983. – 240 p.
- [19] *de Groste, S.* Non-equilibrium thermodynamics / S. de Groste, P. Mazur – M. : Mir, 1964. – 456 p.
- [20] *Ivlev, D. D.* The theory of perfect plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 232 p.
- [21] *Znamenskii, V. A.* On the equations of the viscoplastic body with piecewise linear potentials / V. A. Znamenskii, D. D. Ivlev // Izv. AN SSR, OTN, Mechanics and Engineering. – 1963. – № 6. – P. 114–118.
- [22] *Prager, V.* Introduction to continuum mechanics / V. Prager. – M. : Izd. inostr. liter., 1963. – 312 p.
- [23] *Lokoshchenko, A. M.* Simulation of Creep and creep rupture of metals/ A. M. Lokoshchenko. – M. : MGiU, 2007. – 264 p.
- [24] *Sporykhin, A. N.* Perturbation method in problems of stability of complex media / A. N. Sporykhin. – Voronezh : Izd. VGU, 1997. – 361 p.

Belyh, Sergej Viktorovich

Candidate of Technical Sciences, Komsomolsk-on-Amur state technical university, Komsomolsk-on-Amur

Bormotin, Konstantin Sergeevich

Candidate of physics-mathematical sciences, Komsomolsk-on-Amur state technical university, Komsomolsk-on-Amur

Burenin, Anatolij Aleksandrovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of machinery and metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur

Kovtanjuk, Larisa Valentinovna

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Institute of automation and control processes FEB RAS, Vladivostok

Prokudin, Aleksandr Nikolaevich

Candidate of Technical Sciences Institute of machinery and metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur

В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В быстро развивающемся современном мире особое место занимают дифференциальные уравнения, которые являются математическими моделями многих процессов и явлений, происходящих в различных сферах деятельности человека. Исследования в физической, экономической и социальной областях часто сталкиваются с необходимостью решения дифференциальных уравнений, что требует развитого аппарата теории дифференциальных уравнений. Но если теория линейных дифференциальных уравнений соответствует предъявляемым к ней требованиям, то нелинейные дифференциальные уравнения изучены недостаточно. Существенным препятствием здесь является наличие подвижных особых точек, которые позволяют относить нелинейные дифференциальные уравнения к категории в общем случае неразрешимых в квадратурах [1]. В статье используется метод решения вышеуказанных уравнений, предложенный в работах [2], [3].

В данной работе дается обобщение результатов, полученных в статье [4], на комплексную область.

Ключевые слова: подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, приближенное решение, окрестность подвижной особой точки, комплексная область, апостериорная оценка погрешности.

УДК: 517.928.4

Материалы и методы решения задачи и принятые допущения. Нелинейные дифференциальные уравнения допускают разрешимость в квадратурах лишь в частных случаях. Наибольших результатов в этой области достигнуты Белорусской школой, в частности [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]. Метод, предложенный в работах [2] и [3], существенно расширяет круг нелинейных дифференциальных уравнений, для которых возможно получение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки с заданной точностью. Для решения задачи использовались методы аналитической теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики, математического анализа и программного обеспечения для персональных компьютеров при получении аналитических выражений коэффициентов.

Результаты. Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(z) = b_0(z)y^5(z) + b_1(z)y^4(z) + b_2(z)y^3(z) + b_3(z)y^2(z) + b_4(z)y(z) + b_5(z), \quad (1)$$

где $b_i, i = 0, 1, \dots, 5$, – аналитические функции в рассматриваемой области. Введя обозначение

$$y(x) = \frac{u(z)}{\sqrt[4]{b_0(z)}} - \frac{b_1(z)}{5b_0(z)},$$

учитывая выполнение условий

$$\frac{b_1(z)}{5b_0(z)} = \frac{b_2(z)}{2b_1(z)} = \frac{b_3(z)}{b_2(z)} = \frac{2 \left(b_4(z) + \frac{b_0^3(z)}{4b_0(z)} - \frac{5}{16} \left(\frac{b_0^2(z)}{b_0(z)} \right)^2 \right)}{b_3(z)},$$

уравнение (1) приводится к нормальной форме [4]:

$$u''(z) = u^5(z) + r(z),$$

где

$$r(z) = -\frac{b_1^5(z) \sqrt[4]{b_0(z)}}{5^5 b_0^4(z)} - \frac{3b_0^2(z) \sqrt[4]{b_0(z)}}{20b_0^2(z)} + b_5(z) \sqrt[4]{b_0(z)} + \frac{b_1^2(z) \sqrt[4]{b_0(z)}}{5b_0(z)} - \frac{2b_0'(z) b_1'(z) \sqrt[4]{b_0(z)}}{5b_0^2(z)} + \\ + \frac{2(b_0'(z))^2 b_1(z) \sqrt[4]{b_0(z)}}{5b_0^3(z)} - \frac{(b_0^2(z))^2 b_1(z) \sqrt[4]{b_0(z)}}{16b_0^3(z)} + \frac{b_0'(z)}{2b_0(z)} u'(z),$$

в каждой области, в которой $b_0(z) \neq 0$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$y''(z) = y^5(z) + r(z), \quad (2)$$

$$y(z_0) = y_0, y'(z_0) = y_1. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть z^* подвижная особая точка $y(z)$ задачи (2)-(3) и функция $r(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$r(z) \in C^1 \text{ в области } |z^* - z| < \rho_0, \quad \rho_0 = \text{const} > 0;$$

$$\exists M_0 : \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!} \leq M_0, \quad M_0 = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши (2)-(3) в виде

$$y(z) = (z^* - z)^{-1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0, \quad (4)$$

правильная часть которого сходится в области

$$|z^* - z| < \rho_2, \quad (5)$$

где $\rho_2 = \min\{\rho_0, \rho_1\}$, $\rho_1 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[5]{(M+1)^2}}$, $M = \max\{M_0, \alpha\}$, где α - параметр, зависящий от условий (3).

Доказательство. В общем случае имеем

$$y(z) = (z^* - z)^\rho \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0, \quad (6)$$

а по условию теоремы

$$r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z^* - z)^n, \quad (7)$$

тогда из уравнения (2) получим

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/2+\rho} \right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/2+\rho} \right)^5 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z^* - z)^n.$$

Продифференцировав левую часть и возведя в пятую степень первое слагаемое правой части, данное уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n/2 + \rho) (n/2 + \rho - 1) (z^* - z)^{n/2+\rho-2} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{**} (z^* - z)^{n/2+5\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z^* - z)^n, \end{aligned} \quad (8)$$

где $D_n^{**} = \sum_{i=0}^n D_{n-i}^* C_i$, $D_n^* = \sum_{i=0}^n D_{n-i} D_i$, $D_n = \sum_{i=0}^n C_{n-i} C_i$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Из равенства (8) получим необходимые условия тождества:

$$n/2 + \rho - 2 = n/2 + 5\rho, \quad (9)$$

$$C_n (n/2 + \rho) (n/2 + \rho - 1) = D_n^{**}, \quad (10)$$

где

$$D_n^{**} = \begin{cases} D_n^*, n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, \dots, 2k\}, \\ D_n^* + B_{n-5}, n \in \{5, 7, 9, \dots, 2k+1\}. \end{cases} \quad (11)$$

Из условия (9) следует $\rho = -1/2$, а из второго равенства можно однозначно определить все коэффициенты C_n . Исходя из предположения о характере особой точки z^* , приходим к выводу, что $C_0 \neq 0$.

Из соотношения (10) следует, что $C_0 = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, $C_5 = -\frac{4}{7}A_0$, $C_6 = \alpha$, $C_7 = \frac{4}{9}A_1$, $C_8 = 0$, $C_9 = \frac{4}{33}A_2$, $C_{10} = \frac{20}{147}\sqrt[4]{\frac{27}{4}}A_0^2$, где α – параметр, зависящий от начальных условий (3). Вышеуказанное позволяет получить однозначно формальное представление решения задачи (2)–(3) в окрестности точки z^* в виде (4).

Докажем сходимость правильной части ряда (4) в области (5). Из условия теоремы имеем

$$M = \sup_n \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

тогда для коэффициентов ряда (6) справедлива оценка

$$|A_n| \leq M. \quad (12)$$

Из выражения (10) с учетом (11)–(12) для коэффициентов C_n предполагаем оценку:

$$|C_n| \leq \frac{1}{(n+2)(n-6)} 2^n M (M+1)^{[n/5]} = v_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

С учетом специфики образования коэффициентов C_n , методом математической индукции докажем эту оценку для C_{n+1} , в случае $n+1 = 5(2k+1) = 10k+5$.

$$|C_{10k+5}((10k+5)/2 + \rho)((10k+5)/2 + \rho - 1)| \leq |D_{10k+5}^{**}| \leq |D_{10k+5}^* + A_{10k}| \leq |D_{10k+5}^*| + |A_{10k}| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \sum_{i=0}^{10k+5} D_{10k+5-i}^* C_i \right| + |A_{10k+5}| \leq \left| \sum_{i=0}^{10k+5} \left(\sum_{j=0}^{10k+5-i} D_{10k+5-i-j} D_j \right) C_i \right| + |A_{10k+5}| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^{10k+5} \left(\sum_{j=0}^{10k+5-i} \left(\sum_{m=0}^{10k+5-i-j} C_{10k+5-i-j-m} C_m \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^j C_{j-l} C_l \right) \right) C_i \right| + |A_{10k+5}|, \end{aligned}$$

тогда при $\rho = -1/2$, после ряда преобразований, следует

$$\begin{aligned} |C_{10k+5}| &\leq \frac{2^2}{(10k+7)(10k-1)} \times \\ &\times \left| \sum_{i=1}^{10k} \left(\sum_{j=1}^{10k-i} \left(\sum_{m=1}^{10k-i-j} \frac{2^{10k-i-j-m} M (M+1)^{\frac{10k-i-j-m}{5}}}{(10k-i-j-m+2)(10k-i-j-m-6)^*} \times \right. \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left. \frac{2^m M (M+1)^{\frac{m}{5}}}{(m+2)(m-6)^*} \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^j \frac{2^{j-l} M (M+1)^{\frac{j-l}{5}}}{(j-l+2)(j-l-6)^*} \cdot \frac{2^l M (M+1)^{\frac{l}{5}}}{(l+2)(l-6)^*} \right) \right) \times \\ &\times \left. \left. \left. \frac{2^i M (M+1)^{\frac{i}{5}}}{(i+2)(i-6)^*} + M \right) \right| \leq \frac{2^2}{(10k+7)(10k-1)} \times \\ &\times \left(\sum_{i=1}^{10k} \left(\sum_{j=1}^{10k-i} \left(2^{10k-i-j} M^2 (M+1)^{\frac{10k-i-j}{5}} \cdot 2^j M^2 (M+1)^{\frac{j}{5}} \times \right. \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left. \left(\sum_{m=1}^{10k-i-j} \frac{1}{(m+2)(m-6)^*(10k-i-j-m+2)(10k-i-j-m-6)^*} \right) \times \right. \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left. \left(\sum_{l=1}^j \frac{1}{(l+2)(l-6)^*(j-l+2)(j-l-6)^*} \right) \right) \right) \cdot \frac{2^i M (M+1)^{\frac{i}{5}}}{(i+2)(i-6)^*} + M \right) \leq \\ &\leq \frac{2^2}{(10k+7)(10k-1)} \cdot 2^{10k} M^5 (M+1)^{2k} \cdot 2 \left(1 + \frac{1}{2^{10k} M^4 (M+1)^{2k}} \right) \leq \\ &\leq \frac{2^{10k+2} M (M+1)^{2k}}{(10k+7)(10k-1)} \cdot 2^2 \leq \frac{2^{10k+5} M (M+1)^{2k+1}}{(10k+7)(10k-1)}, \end{aligned}$$

где $(10k-i-j-m-6)^* = \begin{cases} 1, (10k-i-j-m) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ (10k-i-j-m-6), (10k-i-j-m) = 7, 8, 9, \dots \end{cases}$,
 $(j-l-6)^* = \begin{cases} 1, (j-l) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ (j-l-6), (j-l) = 7, 8, 9, \dots \end{cases}$, $(m-6)^* = \begin{cases} 1, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ (m-6), m = 7, 8, 9, \dots \end{cases}$,
 $(l-6)^* = \begin{cases} 1, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ (l-6), l = 7, 8, 9, \dots \end{cases}$, $(i-6)^* = \begin{cases} 1, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ (i-6), i = 7, 8, 9, \dots \end{cases}$. Аналогичную ситуацию имеем и в случае $n+1 = 10k+1$, $n+1 = 10k+2$, $n+1 = 10k+3$, $n+1 = 10k+4$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n |z^* - z|^{(n-1)/2}, \quad (14)$$

который является мажорирующим для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n |z^* - z|^{(n-1)/2}.$$

Учитывая закономерность структуры коэффициентов C_n , ряд (14) представим в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} v_n |z^* - z|^{(n-1)/2} &= \sum_{k=1}^{\infty} v_{5k} |z^* - z|^{(5k-5)/2} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{5k+1} |z^* - z|^{(5k-4)/2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} v_{5k+2} |z^* - z|^{(5k-3)/2} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{5k+3} |z^* - z|^{(5k-2)/2} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{5k+4} |z^* - z|^{(5k-1)/2}. \end{aligned}$$

Откуда на основании признака Даламбера устанавливаем сходимость ряда (14) в области $\rho_1 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[5]{(M+1)^2}}$. Пологая $\rho_2 = \min \{\rho_0, \rho_1\}$, получаем сходимость ряда (4) в области (5), что доказывает нашу теорему.

Полученные в данной теореме оценки позволяют построить приближенное решение задачи (2)–(3):

$$y_N(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^N C_n (z^* - z)^{\frac{n}{2}}, \quad C_0 \neq 0. \quad (15)$$

Теорема 2. Пусть выполняются п. п. 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения (15) задачи (2)–(3) в области $|z^* - z| < \rho_2$ справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(z) = |y(z) - y_N(z)| \leq \Delta, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \leq \frac{2^{5n} \cdot M (M+1)^n |z^* - z|^{(5n-1)/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5n+2)(5n-6)} + \frac{2 \cdot |z^* - z|^{1/2}}{(5n+3)(5n-5)} + \right. \\ \left. + \frac{2^2 \cdot |z^* - z|}{(5n+4)(5n-4)} + \frac{2^3 \cdot |z^* - z|^{3/2}}{(5n+5)(5n-3)} + \frac{2^4 \cdot |z^* - z|^2}{(5n+6)(5n-2)} \right), \end{aligned}$$

в случае $N+1 = 5n$. Для вариантов $N+1 = 5n+1$, $N+1 = 5n+2$, $N+1 = 5n+3$, $N+1 = 5n+4$ соответственно:

$$\begin{aligned} \Delta \leq \frac{2^{5n+1} \cdot M (M+1)^n |z^* - z|^{5n/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5n+3)(5n-5)} + \frac{2 \cdot |z^* - z|^{1/2}}{(5n+4)(5n-4)} + \right. \\ \left. + \frac{2^2 \cdot |z^* - z|}{(5n+5)(5n-3)} + \frac{2^3 \cdot |z^* - z|^{3/2}}{(5n+6)(5n-2)} + \frac{2^4 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^2}{(5n+7)(5n-1)} \right), \\ \Delta \leq \frac{2^{5n+2} \cdot M (M+1)^n |z^* - z|^{(5n+1)/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5n+4)(5n-4)} + \frac{2 \cdot |z^* - z|^{1/2}}{(5n+5)(5n-3)} + \right. \\ \left. + \frac{2^2 \cdot |z^* - z|}{(5n+6)(5n-2)} + \frac{2^3 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{3/2}}{(5n+7)(5n-1)} + \frac{2^4 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^2}{(5n+8)5n} \right), \\ \Delta \leq \frac{2^{5n+3} \cdot M (M+1)^n |z^* - z|^{(5n+2)/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5n+5)(5n-3)} + \frac{2 \cdot |z^* - z|^{1/2}}{(5n+6)(5n-2)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2^2 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|}{(5n+7)(5n-1)} + \frac{2^3 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{3/2}}{(5n+8)5n} + \frac{2^4 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^2}{(5n+9)(5n+1)} \Bigg), \\
\Delta \leq & \frac{2^{5n+4} \cdot M(M+1)^n |z^* - z|^{(5n+3)/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5n+6)(5n-2)} + \frac{2 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{1/2}}{(5n+7)(5n-1)} + \right. \\
& \left. + \frac{2^2 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|}{(5n+8)5n} + \frac{2^3 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{3/2}}{(5n+9)(5n+1)} + \frac{2^4 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^2}{(5n+10)(5n+2)} \right),
\end{aligned}$$

при этом $\rho_2 = \min \left\{ \rho_0, \frac{1}{4 \cdot \sqrt[5]{(M+1)^2}} \right\}$, $M = \max \{M_0, \alpha\}$, где α – параметр, зависящий от условий (3).

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned}
\Delta y_N(z) = |y(z) - y_N(z)| & = \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{\frac{n-1}{2}} - \sum_{n=0}^N C_n (z^* - z)^{\frac{n-1}{2}} \right| = \\
& = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n (z^* - z)^{\frac{n-1}{2}} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n| \cdot |z^* - z|^{\frac{n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Учитывая закономерность образования коэффициентов C_n из теоремы 1, имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n| \cdot |z^* - z|^{\frac{n-1}{2}} & = \sum_{k=N+1}^{\infty} |C_{5k}| \cdot |z^* - z|^{\frac{5k-1}{2}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} |C_{5k+1}| \cdot |z^* - z|^{\frac{5k}{2}} + \\
& + \sum_{k=N+1}^{\infty} |C_{5k+2}| \cdot |z^* - z|^{\frac{5k+1}{2}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} |C_{5k+3}| \cdot |z^* - z|^{\frac{5k+2}{2}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} |C_{5k+4}| \cdot |z^* - z|^{\frac{5k+3}{2}},
\end{aligned}$$

в случае $N+1 = 5k$ получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta = \sum_{k=N+1}^{\infty} |C_{5k}| \cdot |z^* - z|^{\frac{5k-1}{2}} & \leq \frac{2^{5k} \cdot M(M+1)^k |z^* - z|^{(5k-1)/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot |z^* - z|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5k+2)(5k-6)} + \right. \\
& \left. + \frac{2 \cdot |z^* - z|^{1/2}}{(5k+3)(5k-5)} + \frac{2^2 \cdot |z^* - z|}{(5k+4)(5k-4)} + \frac{2^3 \cdot |z^* - z|^{3/2}}{(5k+5)(5k-3)} + \frac{2^4 \cdot |z^* - z|^2}{(5k+6)(5k-2)} \right).
\end{aligned}$$

Аналогично получаем оценки для коэффициентов $N+1 = 5k+1$, $N+1 = 5k+2$, $N+1 = 5k+3$, $N+1 = 5k+4$.

Пример. Найдем приближенное решение задачи (2)–(3) в случае $r(z) = 0$ при начальных данных $y(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = 1 + i$, $y'(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$ и $\alpha = 0,001$. Данная задача имеет точное решение $y = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{1 + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot i - 2z}}$. Найдем радиус аналитичности $\rho_2 \approx 0,175723455$.

Точное значение подвижной особой точки $z^* = \frac{1}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{4}i$. Выберем значение аргумента $z = \frac{1}{2} + \frac{4}{5}i \in |z^* - z| < \rho_2$. Применяя (14), $N = 12$, вычислим приближенное значение функции. Произведенные расчеты приведены в таблице 1:

Таблица 1

z	y_{12}	y	Δy_{12}	Δy	$\Delta_1 y$
$0,5+0,8i$	$1,804233648- 1,8043249i$	$1,804279274- 1,804279274i$	0,0239	0,0000645	0,008

где y_{12} – приближенное решение (14); y – значение точного решения; Δy_{12} – оценка погрешности приближенного решения (15) по теореме 2; Δy – абсолютная погрешность приближенного решения y_{12} ; $\Delta_1 y$ – апостериорная оценка погрешности, которая определяется путем решения обратной задачи теории погрешности. При апостериорной оценке погрешности равной $\varepsilon = 0,008$ получаем структуру приближенного решения (14) с $N = 20$, но с учетом того, что для номеров $n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20$ коэффициенты $C_n = 0$, а при $N = 18$ добавка не превышает $\varepsilon = 0,008$. Следовательно, приходим к выводу, что приближенное решение y_{12} имеет погрешность $\varepsilon = 0,008$.

Выводы. В статье доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, технология доказательства которого позволяет построить приближенное решение в окрестности подвижной особой точки в комплексной области. Получено практическое применение представления решения нелинейного дифференциального уравнения в ряд по дробным степеням.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов, В. Н. Связь нелинейного дифференциального уравнения с наличием и характером подвижных особых точек / В. Н. Орлов // *Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий* : сб. статей по материалам междунар. научно-практ. конференции (Чебоксары, 12–15 августа, 2013 г.). – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 30–35.
- [2] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля / В. Н. Орлов. – М. : МПГУ, 2013. – 174 с.
- [3] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов. – Чебоксары : Перфектум, 2012. – 112 с.
- [4] Орлов, В. Н. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области голоморфности / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева*. – 2013. – № 4 (80). – С. 156–162.
- [5] Яблонский, А. И. К вопросу о числе полюсов решения второго уравнения Пенлеве / А. И. Яблонский // *Докл. АН БССР*. – 1959. – Т. 3. – № 6. – С. 237–238.
- [6] Дежурко, Ю. И. О решениях с заданными свойствами у класса дифференциальных систем с рациональными правыми частями / Ю. И. Дежурко, Н. А. Лукашевич, А. В. Чичурин // *Научно-техническая конференция “Памяти академика Л. П. Кравчука”*. – 12–15 мая, 1992. – Киев : КПИ. – С. 5–6.
- [7] Самодуров, А. А. Простой способ определения времени задержки сверх-излучательной бозонной лавины / А. А. Самодуров, В. М. Чудновский // *Докл. АН БССР*. – 1985. – Т. 29. – № 1. – С. 9–10.
- [8] Мызгаева, С. А. О подвижных особенностях решений системы Эйлера в одном частном случае / С. А. Мызгаева, А. И. Яблонский // *Дифференциальные уравнения*. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С. 1824–1826.
- [9] Мататов, В. И. О подвижных особенностях автономных систем Гамильтона / В. И. Мататов, Л. В. Сабынич // *Вестник Белорусск. ун-та. Серия 1*. – Минск, 1991. – 8 с.
- [10] Еругин, Н. П. Проблема Римана / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.
- [11] Лукашевич, Н. А. Интегрируемость уравнений Абеля общего вида через функции решения линейных уравнений / Н. А. Лукашевич, А. А. Самодуров // *Дифференциальные уравнения*. – 1977. – Т. 13. – № 5. – С. 859–863.

Орлов Виктор Николаевич,

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: orlowvn@rambler.ru

Леонтьева Татьяна Юрьевна,

аспирант кафедры алгебры, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: betty2784@mail.ru

V. N. Orlov, T. Y. Leonteva

CONSTRUCTION OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF ONE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER IN THE NEIGHBORHOOD OF THE MOVABLE SINGULAR POINT IN THE COMPLEX REGION

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In the rapidly developing modern world occupy a special place differential equations, which are mathematical models of many processes and phenomena occurring in various spheres of human activity. Research in the physical, economic and social areas are often faced with the necessity of solving differential equations, which requires the development of the theory of differential equations. But if the theory of linear differential equations corresponds to more demands placed upon it, the nonlinear differential equations are studied not enough. A significant obstacle is the presence of movable singular points, which nonlinear differential equations relate to the category in general is not solvable in quadratures [1]. In the paper we use the method of solving the above equations, which proposed by Orlov V. N. [2], [3].

This article provides a summary of the results obtained in [4] to the complex region.

Keywords: movable singular point, nonlinear differential equation of the second order, approximate solution, neighborhood of the movable singular point, the complex region, posteriori error estimate.

REFERENCES

- [1] Orlov, V. N. Communication of the nonlinear differential equation with existence and character of mobile special points / V. N. Orlov // International scientific-practical conference "Fundamental and applied problems of solid mechanics, mathematical modeling and information technology." – 12–15 August, 2013. – Cheboksary. – P. 30–35.
- [2] Orlov, V. N. Method of approximate solutions of first, second Painlevé and Abel differential equations / V. N. Orlov. – M. : MPGU, 2013. – 174 p.
- [3] Orlov, V. N. Method of approximate solutions of scalar and matrix Riccati differential equation / V. N. Orlov. – Cheboksary : Perfectum, 2012. – 112 p.
- [4] Orlov, V. N. Construction of approximate solutions of a nonlinear differential equation of second order in a domain of holomorphy / V. N. Orlov, T. Y. Leonteva // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – No. 4 (80). – P. 156–162.
- [5] Yablonsky, A. I. On the number of poles of solutions of the second Painlevé equation / A. I. Yablonsky // Dokl. BSSR. – 1959. – Vol. 3. – № 6. – P. 237–238.
- [6] Dezhurko, Y. I. On solutions with desired properties in a class of differential systems with rational right side / Y. I. Dezhurko, N. A. Lukashevich, A. V. Chichurin // Scientific and Technical Conference "A Memory of Academician. P. Kravchuk". – May 12–15, 1992. – Kiev : KPI. – P. 5–6.
- [7] Samodurov, A. A. Simple way to determine the time delay over-boson radiative avalanche / A. A. Samodurov, V. M. Chudnovsky // Dokl. BSSR. – 1985. – Vol. 29. – № 1. – P. 9–10.
- [8] Myzgaeva, S. A. On the movable singularities of solutions of the Euler system in a particular case / S. A. Myzgaeva, A. I. Yablonsky // Differential equations. – 1988. – 24. – № 11. – P. 1824–1826.
- [9] Matatov, V. I. On mobile features of autonomous Hamiltonian systems / V. I. Matatov, L. V. Sabynich // Bulletin of the Belarusian. Univ. Series 1. – Minsk, 1991. – 8 p.
- [10] Erugin, N. P. The Riemann problem / N. P. Erugin. – Minsk : Science and Technology, 1982. – 336 p.

[11] *Lukashevich, N. A.* Integrability of Abel equations of the general form of the functions for solving linear equations / N. A. Lukashevich, A. A. Samodurov // Differential equations. – 1977. – Vol. 13. – № 5. – P. 859–863.

Orlov, Victor Nikolayevich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Leonteva, Tatyana Yorevna

Postgraduate Student, Department of Algebra, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Рассматривается задача о поперечном изгибе тонкой пластины, защемленной по краям отверстий и ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных сквозных трещин вдоль осей абсцисс и ординат неравной длины. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением моментов вне круговых отверстий и прямолинейных трещин. Удовлетворяя граничным условиям, решение задачи теории изгиба пластин сводится к двум бесконечным системам алгебраических уравнений и двум сингулярным интегральным уравнениям. Затем каждое сингулярное интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений без промежуточного этапа приведения его к уравнению Фредгольма. Приводится процедура нахождения коэффициентов интенсивности напряжений (моментов). Найдены коэффициенты интенсивности напряжений.

Ключевые слова: перфорированная тонкая пластина, прямолинейные трещины, поперечный изгиб, коэффициенты интенсивности напряжений.

УДК: 539.375

Постановка задачи. Изотропная перфорированная упругая пластина, опертая или защемленная по краям, изгибается двоякопериодической поперечной нагрузкой. В этом случае имеет место двоякопериодическое распределение смещений.

Рассмотрим задачу изгиба пластины под действием равномерной поперечной нагрузки, когда края круговых отверстий жестко заделаны.

Считаем, что круговые отверстия имеют радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках

$$P_{m,n} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$
$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2h_* \exp(i\alpha), \quad h_* > 0, \quad \operatorname{Im}\omega_2 > 0.$$

Пластина ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных трещин и изгибается равномерно распределенной по поверхности пластины поперечной нагрузкой с постоянной интенсивностью q . Берега трещин свободны от внешних усилий (рис. 1). Принимаем, что в процессе изгиба пластины противоположные берега не контактируют между собой. Требуется определить напряженное и деформированное состояние пластины по краевым условиям, выражающим отсутствие упругих смещений вдоль обвода круговых отверстий и внешних нагрузок на берегах двоякопериодической системы разрезов.

Для рассматриваемой задачи на контурах круговых отверстий $L_{m,n}$ должны выполняться краевые условия

$$\frac{\partial W(\tau)}{\partial x} + i \frac{\partial W(\tau)}{\partial y} = 0; \quad \tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2, \quad (1)$$

а на берегах двоякопериодической системы разрезов должны выполняться граничные условия

$$M_n(t) = 0, \quad N_n(t) + \frac{\partial H_{nt}}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

t – аффикс точек берегов разрезов.

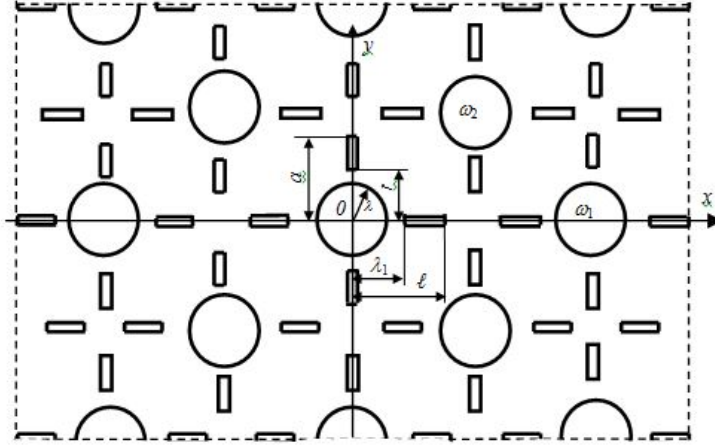


Рис. 1

Общее решение неоднородного бигармонического уравнения при условии $q = const$ можно представить в виде [1]:

$$W(x, y) = W_0(x, y) + W_1(x, y) \quad (3)$$

$$W_0(x, y) = \frac{q(z\bar{z})^2}{64D} + \frac{2q}{D} Re[\bar{z}\varphi_0(z) + \chi_0(z)]; \quad (4)$$

$$W_1(x, y) = \frac{2q}{D} Re[\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)] \quad (5)$$

$$D = Eh^3/12(1 - \nu^2).$$

E и ν – модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, h – толщина пластины

Здесь $W_0(x, y)$ можно рассмотреть как некоторое частное решение уравнения поперечного изгиба пластины, $W_1(x, y)$ – общее решение однородного бигармонического уравнения.

На основании граничных условий на жестко защемленных краях отверстий (1) имеем

$$\frac{\tau^2 \bar{\tau}}{32} + \varphi(\tau) + \tau \overline{\Phi(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя (6) по направлению s , касательному к контуру $L_{m,n}$, находим

$$\frac{\tau \bar{\tau}}{32} + \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau} \Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = 0. \quad (7)$$

С помощью соотношений Колосова-Мусхелишвили [2] и граничных условий (2) на берегах трещин будем иметь

$$\varepsilon \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} + \frac{3t^2}{32} = iC; \quad (8)$$

$$\varepsilon \Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} + t_1 \overline{\Phi'(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} + \frac{3t_1^2}{32} = iC_1,$$

где t и t_1 – аффиксы точек берегов трещин, направленных по осям абсцисс и ординат соответственно; C и C_1 – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи из условия равенства нулю скачка прогиба $[w]$ в вершинах разрезов.

Постановка задачи охватывает одновременно случаи дефектов типа жесткого включения ($\varepsilon = 1$) и трещин ($\varepsilon = -(3+v)/(1-v)$).

Решение краевой задачи. Аналитические функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ ищем в виде [1], [3]:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z); \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z); \quad (9)$$

$$\Phi_0(z) = \varphi'_0(z); \quad \Psi_0(z) = \chi''_0(z);$$

$$\varphi_0(z) = \varphi_{01}(z) + \varphi_{10}(z); \quad \chi_0(z) = \chi_{01}(z) + \chi_{10}(z);$$

$$\varphi_{01}(z) = A_1 z + A_2 z^3 + A_0 \xi(z) - \alpha_2 \lambda^2 \zeta(z); \quad (10)$$

$$\chi_{01}(z) = B_0 + B_1 z^2 + B_2 z^4 - A_0 \xi_*(z) - \beta_2 \lambda^2 v(z) + \alpha_2 \lambda^2 \zeta_*(z);$$

$$v(z) = \int \zeta(z) dz; \quad \xi(z) = \int v(z) dz; \quad \zeta_*(z) = - \int Q(z) dz;$$

$$\xi_*(z) = - \int v_*(z) dz; \quad v_*(z) = - \int \zeta_*(z) dz$$

$$\varphi_{10}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!};$$

$$\chi_{10}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k-2)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!}; \quad (11)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\pi i (1+k_0)} \int_{L_1} g(t) \zeta(t-z) dt + A'; \quad (12)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{\pi i (1+k_0)} \int_{L_1} g(t) [k_0 \zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] dt + B';$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{\pi (1+k_0)} \int_{L_2} g_1(t_1) \zeta(it_1-z) dt_1 + A'';$$

$$\Psi_2(z) = - \frac{1}{\pi (1+k_0)} \int_{L_2} \left\{ \overline{g_1(t_1)} k_0 \zeta(it_1-z) - [Q(it_1-z) + it_1 \gamma(it_1-z)]_1^g(t_1) \right\} dt_1 + B''.$$

Интегралы в (12) берутся по линиям L_1 и L_2 :

$$L_1 = [-\ell, -\lambda_1] + [\lambda_1, \ell]; \quad L_2 = [-a, -r] + [r, a]$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n} \left[\frac{1}{z - P_{mn}} + \frac{1}{P_{mn}} + \frac{z}{P_{mn}^2} \right];$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n} \left[\frac{1}{(z - P_{mn})^2} - \frac{1}{P_{mn}^2} \right];$$

$$\frac{\gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^{2k+2}} + \sum'_{m,n} \frac{1}{(z - P_{mn})^{2k+2}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$Q(z) = \sum'_{m,n} \left[\frac{\bar{P}_{mn}}{(z - P_{mn})^2} - 2z \frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^3} - \frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^2} \right];$$

$$\frac{Q^{(k)}(z)}{(k+1)!} = (-1)^k \sum'_{m,n} \frac{\bar{P}_{mn}}{(z - P_{mn})^{k+2}} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Функции (9)–(12) выбраны так, что функция $W(x, y)$ является двоякопериодической. Постоянные A_i, B_i нужно подобрать так, чтобы функция $W_0(x, y)$ была бы двоякопериодической. Используя условия периодичности функции $W_0(x, y)$ и свойства введенных функций, находим, что

$$A_0 = \frac{\omega_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \omega_2}{32\pi i}; \quad A_2 = \frac{1}{96} \left[\delta_1 \frac{\bar{\omega}_1 \omega_2 - \bar{\omega}_2 \omega_1}{2\pi i \omega_1} - 1 \right] \quad (13)$$

$$B_2 = \frac{\gamma_2 \bar{\omega}_1 - \gamma_1 \bar{\omega}_2}{\omega_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \omega_2},$$

$$\beta_2 \lambda^2 \delta_1 + \alpha_2 \lambda^2 (\gamma_1 + \bar{\delta}_1) - 2A_1 \bar{\omega}_1 - 2B_1 \omega_1 = A_0 L_1(\omega);$$

$$\beta_2 \lambda^2 \delta_2 + \alpha_2 \lambda^2 (\gamma_2 + \bar{\delta}_2) - 2A_1 \bar{\omega}_2 - 2B_1 \omega_2 = A_0 L_2(\omega) \quad ;$$

$$L_1(\omega) = \bar{\xi}_1 - \gamma_1^{**} - \pi i \bar{\omega}_1 + \frac{1}{6} (\delta_1 \omega_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\delta}_1 \bar{\omega}_1^2 - \gamma_1 \omega_1^2);$$

$$L_2(\omega) = \bar{\xi}_2 - \gamma_2^{**} - \pi i \bar{\omega}_2 + \frac{1}{6} (\delta_2 \omega_2 \bar{\omega}_2 - \bar{\delta}_2 \bar{\omega}_2^2 - \gamma_2 \omega_2^2);$$

$$\xi_1 = 2\xi \left(\frac{\omega_1}{2} \right) + \frac{\delta_1 \omega_1^2}{8}; \quad \xi_2 = 2\xi \left(\frac{\omega_2}{2} \right) + \frac{\delta_2 \omega_2^2}{8};$$

$$\gamma_1^{**} = 2v_* \left(\frac{\omega_1}{2} \right) - \bar{\omega}_1 v \left(\frac{\omega_1}{2} \right) + \pi i \bar{\omega}_1 + \frac{\gamma_1 \omega_1^2}{8} - \frac{\gamma_1^* \omega_1}{2};$$

$$\gamma_2^{**} = 2v_* \left(\frac{\omega_2}{2} \right) - \bar{\omega}_2 v \left(\frac{\omega_2}{2} \right) + \pi i \bar{\omega}_2 + \frac{\gamma_2 \omega_2^2}{8} - \frac{\gamma_2^* \omega_2}{2}.$$

Таким образом, соотношения (9)–(12) с учетом выражений (13) дают двоякопериодическую функцию $W(x, y)$. Постоянная B_0 в формуле для функции $\chi_0(z)$ находится из условия равенства нулю $W(x, y)$ на контуре кругового отверстия $L_{0,0}$.

Из условий симметрии относительно координатных осей, найдем, что

$$Im \alpha_{2k} = 0; \quad Im \beta_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Можно убедиться, что представления (9)–(12) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением смещений. Незвестные искомые функции $g(x), g_1(y)$ и коэффициенты α_{2k}, β_{2k} ($k = 1, 2, \dots$) должны быть найдены из граничных условий (7)–(8). В силу выполнения условия двоякопериодичности система краевых условий (7) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре $L_{0,0}$ ($\tau = \lambda e^{i\theta}$), а система граничных условий (9) вырождается в краевое условие на L_1 и L_2 . К основным представлениям задачи (9)–(12) следует добавить дополнительные условия

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{-\lambda_1} g(t) dt = 0; \quad \int_{\lambda_1}^{\ell} g(t) dt = 0; \\ \int_{-a}^{-r} g_1(t_1) dt_1 = 0; \quad \int_r^a g_1(t_1) dt_1 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

которые обеспечивают однозначность углов поворота срединной плоскости при обходе контуров трещин [4].

Граничное условие (7) преобразуем относительно аналитических функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta} = \\ = f_1(\theta) + f_2(\theta) - \frac{\tau\overline{\tau}}{32} + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$f_1(\theta) + f_2(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \overline{\Phi_1(\tau)} + [\overline{\tau}\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} \quad (16)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\overline{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta}.$$

Относительно функций $f_1 + if_2$ и $\varphi_1 + i\varphi_2$ будем считать, что они на контуре кругового отверстия $|\tau| = \lambda$ разлагаются в комплексные ряды Фурье. На основании симметрии задачи эти ряды имеют вид

$$f_1(\theta) + f_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im} F_{2k} = 0; \quad (17)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im} D_{2k} = 0$$

$$F_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-2ki\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (18)$$

$$D_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_1 + i\varphi_2) e^{-2ki\theta} d\theta.$$

Для нахождения величин F_{2k} , D_{2k} подставим в (18) выражения (16) и, поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов находим:

$$F_{2k} = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g_*(t) f_{2k}(t) dt; \quad g_*(t) = \frac{g(t)}{i(1+k_0)}; \quad (19)$$

$$D_{2k} = -\frac{1}{2\pi(1+k_0)} \int_{L_2} g_1(t_1) \varphi_{2k}(t_1) dt_1.$$

Ввиду громоздкости функций $f_{2k}(t)$ и $\varphi_{2k}(t_1)$ в явном виде не приводятся.

Для получения алгебраических уравнений, определяющих коэффициенты α_{2k} , β_{2k} , применим метод степенных рядов. Для этого подставим в левую часть граничного условия (15) вместо аналитических функций $\Phi_0(\tau)$, $\overline{\Phi_0(\tau)}$, $\Phi_0'(\tau)$ и $\Psi_0(\tau)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а правую часть (15) вместо $f_1 + if_2$ и $\varphi_1 + i\varphi_2$ – ряды Фурье (16).

Применяя процедуру метода степенных рядов, получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} . После некоторых преобразований получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k} :

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2j+2} + b_j (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Неизвестные коэффициенты β_{2k} определяются из следующих уравнений:

$$\beta_2 = \frac{1}{1 - \lambda 2\varepsilon_3} \left\{ \varepsilon_1 - A'_0 + \varepsilon_2 \alpha_2 \lambda^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot \lambda 2k + 2}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right\}; \quad (21)$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3) \alpha_{2j+2} - A'_{-2j-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda 2j + 2k + 4}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2}.$$

Таким образом, с помощью решения краевой задачи (7) удалось определение искомым коэффициентов α_{2k} , β_{2k} свести к бесконечным алгебраическим уравнениям, в правой части которых содержатся величины, зависящие в виде интегралов от искомым функций $g(x)$ и $g_1(y)$. Для определения искомым функций $g(x)$ и $g_1(y)$ мы располагаем краевыми условиями (8) на берегах трещин.

Требую, чтобы функции (9) удовлетворяли граничному условию на контуре трещины L_1 , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $g_*(x)$:

$$\frac{1+\varepsilon}{\pi} \int_{L_1} g_*(t) \zeta(t-x) dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) [k_0 \zeta(t-x) + Q(t-x) - (t-x)\gamma(t-x)] dt + H(x) = iC_1 \quad (22)$$

$$H(x) = \frac{3x^2}{32} - k_0 A' + \bar{A}' + \bar{B}' + (1+\varepsilon) \Phi_*(x) + x \Phi'_*(x) + \Psi'_*(x),$$

$$\Phi'_*(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x); \quad \Psi'_*(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x).$$

Аналогично, удовлетворяя краевому условию на контуре L_2 , после некоторых преобразований получаем еще одно сингулярное интегральное уравнение относительно искомым функции $g_1(y)$:

$$-\frac{(1+\varepsilon)}{\pi i (1+k_0)} \int_{L_2} \left\{ g_1(t_1) \left[i\zeta(it-iy) - i\overline{\zeta(it-iy)} \right] + \right. \quad (23)$$

$$\left. + \overline{g_1(t_1)} \left[iQ(it-iy) + (it-iy)\gamma(it-iy) - i\overline{\zeta(it-iy)} \right] \right\} dt_1 + N(y) = iC_1$$

$$N(y) = -k_0 A'' + \bar{A}'' + \bar{B}'' - \frac{3y^2}{32} + \varepsilon \overline{\Phi_*(iy)} + iy \overline{\Phi'_*(iy)} + \overline{\Psi_*(iy)},$$

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z); \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z).$$

Для определения постоянных C и C_1 были использованы соотношения [4]

$$Re \int_{-\ell}^{-\lambda_1} \bar{t} g(t) dt = 0; \quad Re \int_{\lambda_1}^{\ell} \bar{t} g(t) dt = 0,$$

$$\operatorname{Re} \int_{-a}^{-r} \bar{t}_1 g_1(t_1) dt_1 = 0; \quad \operatorname{Re} \int_r^a \bar{t}_1 g_1(t_1) dt_1 = 0.$$

Удовлетворяя этим условиям, обеспечивающим равенство нулю скачка прогиба в вершинах разрезов L_1 и L_2 , находим, что $C = 0$; $C_1 = 0$.

Для решения каждого сингулярного интегрального уравнения воспользуемся разложением функций $\zeta(z)$, $\gamma(z)$, $Q(z)$ в основном параллелограмме периодов. Используя замену переменных, каждое сингулярное интегральное уравнение приводим к стандартному виду. Затем применяя процедуру алгебраизации [5], [6] вместо каждого интегрального уравнения получим конечную систему линейных алгебраических уравнений.

Наибольшее практическое применение имеют правильные решетки:

а) правильная треугольная решетка ($\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 2 \exp(i\pi/3)$).

По предыдущим формулам находим значения постоянных A_0 , A_2 и B_2 :

$$A_0 = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi}; \quad A_2 = 0; \quad B_2 = 0.$$

Постоянные $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$ в системе для определения A_1 и B_1 имеют вид:

$$L_1(\omega) = \bar{\xi}_1 - \gamma_1^{**} - \pi i \bar{\omega}_1; \quad L_2(\omega) = e^{-\pi i/3} L_1(\omega).$$

Постоянные ε_i для рассматриваемого частного случая имеют вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} L_1(\omega); \quad \varepsilon_2 = 0; \quad \varepsilon_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}};$$

$$\varepsilon_4 = 0; \quad \varepsilon_5 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; \quad \varepsilon_6 = 0;$$

б) квадратная решетка ($\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$).

$$A_0 = -\frac{1}{4\pi}; \quad A_2 = 0; \quad B_2 = \frac{\gamma_1}{192\pi};$$

$$L_1(\omega) = \bar{\xi}_1 - \gamma_1^{**} - \pi i \bar{\omega}_1 - \frac{2}{3} \gamma_1; \quad L_2(\omega) = -i L_1(\omega);$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{8\pi} L_1(\omega); \quad \varepsilon_2 = 0; \quad \varepsilon_3 = \frac{\pi}{4}; \quad \varepsilon_4 = 0;$$

$$\varepsilon_5 = \frac{2\gamma_1 + \pi}{4}; \quad \varepsilon_6 = 0.$$

Численные результаты. Для определения искомых величин α_{2k} , β_{2k} , $g_*(t_k)$, $g_1(t_k)$ необходимо совместно решить линейные системы, полученные на основании алгебраизации основных уравнений.

Эти системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента. Не останавливаясь на подробностях решения объединенной алгебраической системы, приведем результаты по определению коэффициентов интенсивности напряжений.

Для коэффициентов интенсивности напряжений получены следующие результаты:

$$K_I^{\lambda_1} = q\sqrt{\pi\ell} \sqrt{\frac{1-h_1^2}{h_1}} F_1(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a); \quad K_I^r = q\sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{1-\lambda_2^2}{\lambda_2}} F_3(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a);$$

$$K_I^\ell = q\sqrt{\pi\ell} \sqrt{1-h_1^2} F_2(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a); \quad K_I^a = q\sqrt{\pi a} \sqrt{1-\lambda_2^2} F_4(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a);$$

$$h_1 = \lambda_1/\ell; \quad \lambda_1 = r/a.$$

В таблице приводятся результаты расчетов функций $F_1(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$ и $F_2(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$ для коэффициента Пуассона, равного 0,3 при изменении параметра λ_1 и разных значений длины трещины.

Для треугольной решетки значения в таблице даны в знаменателе.

Таблица 1

λ		h_1							
		0,11	0,15	0,19	0,23	0,27	0,31	0,35	0,39
0,1	$F_1(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$	2,0161	1,3874	1,0017	0,7897	0,5916	0,4241	0,2432	0,0761
		2,2432	1,4897	1,1802	0,9456	0,7543	0,5152	0,3638	0,1832
	$F_2(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$	1,3352	0,8271	0,4948	0,2291	0,0332	0,2561	0,3654	0,5641
		1,8541	1,2567	0,9078	0,6112	0,3612	0,1432	0,0882	0,2918
λ		h_1							
		0,21	0,25	0,29	0,33	0,37	0,41	0,45	0,49
0,2	$F_1(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$	1,4182	0,8453	0,6921	0,4921	0,3281	0,2184	0,1211	0,2715
		1,5876	1,9987	0,8377	0,6734	0,4823	0,3245	0,1968	0,2114
	$F_2(\lambda, \lambda_1, \ell, r, a)$	0,5272	0,2681	0,2997	0,4387	0,4781	0,6178	0,6713	0,8712
		0,9887	0,6517	0,5291	0,4781	0,4193	0,3841	0,4741	0,5721

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк, Э. И. Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.
- [2] Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [3] Мирсалимов, В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Элм, 1984. – 124 с.
- [4] Саврук, М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев : Наукова думка, 1981. – 324 с.
- [5] Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [6] Ladopoulos, E. G. Singular Integral Equations, Linear and Non-Linear Theory and its Applications in Science and Engineering / E. G. Ladopoulos. – New York ; Berlin : Springer Verlag, 2000. – 547 p.

Казбеков Бабек Билал оглы,

аспирант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: irakon63@hotmail.com

B. B. Kazbekov

**LATERAL BENDING OF PERFORATED PLATE WEAKENED BY
RECTILINEAR CRACKS**

Institute of mathematics and mechanics of NAS of Azerbaijan

Abstract. The transverse bending problem for the thin plate jammed along the holes edges and weakened by doubly periodic system of unequal length rectilinear through cracks along axes of absciss and ordinate, is considered. The general solution representations describing a class of problems with doubly periodic moments distribution out of circular holes and rectilinear cracks are constructed. Satisfying the boundary conditions, the solution of the plates bending theory problem is reduced to two infinite systems of algebraic equations and two singular integral equations. Everyone of singular integral equation is reduced to system of linear algebraic equations without the intermediate step of its reduction to a Fredholm equation. Procedure of the finding of stress intensity factors (moments) is described. The stress intensity factors are found.

Keywords: perforated thin plate, rectilinear cracks, lateral bending, stress intensity factors.

REFERENCES

- [1] *Grigolyuk, E. I.* Perforated plates and Shells / E. I. Grigolyuk, L. A. Fil'shtinskii. – M. : Nauka, 1970. – 556 p.
- [2] *Muskhelishvili, N. I.* Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – Amsterdam : Kluwer, 1977. – 707 p.
- [3] *Mirsalimov, V. M.* Fracture of Elastic and Elastoplastic Bodies with Cracks / V. M. Mirsalimov. – Baku : Science, 1984. – 124 p.
- [4] *Savruk, M. P.* Two-dimensional problem of Elasticity for Bodies with Cracks / M. P. Savruk. – Kiev : Naukova Dumka, 1981. – 324 p.
- [5] *Mirsalimov, V. M.* Non-one dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [6] *Ladopoulos, E. G.* Singular Integral Equations, Linear and Non-Linear Theory and its Applications in Science and Engineering / E. G. Ladopoulos. – New York, Berlin : Springer Verlag, 2000. – 547 p.

Kazbekov, Babek Bilal oglu

Postgraduate student, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku

А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЮ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ НЕПОДВИЖНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Европейский университет информатики и экономики

Брестский государственный технический университет

Аннотация. В работе построены системы двух дифференциальных уравнений, эквивалентные дифференциальному уравнению Шазы третьего порядка с шестью постоянными полюсами. Коэффициенты построенных систем найдены с помощью аналитического метода. Приведен пример эквивалентной системы для заданного набора постоянных полюсов.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Шазы, эквивалентные системы третьего порядка, подвижные критические особые точки.

УДК: 517.91

Актуальность исследуемой проблемы. Исследуя уравнения вида

$$w''' = P(w'', w', w, z), \quad (1)$$

где P – полином по w'', w', w с аналитическими коэффициентами по z , Шазы надеялся найти новые уравнения достаточно простого вида, решения которых не были бы классическими функциями и которые не приводились бы к каноническим уравнениям Пенлеве. Как отмечено в работе В. А. Добровольского [1], результаты этих исследований оказались мало обнадеживающими. Тогда Шазы стал рассматривать уравнения

$$w''' = R(w'', w', w, z) \quad (2)$$

(R – рациональная функция по w'', w', w с аналитическими коэффициентами по z), решения которых не имели бы подвижных критических особых точек [2].

Согласно методу Пенлеве [2] сначала необходимо было найти упрощенное уравнение для уравнения (2) с неподвижными критическими точками. Шазы получил такое уравнение в виде

$$w''' = \frac{PQ'' - QP''}{PQ' - QP'} w' w'' - \frac{P'Q'' - Q'P''}{PQ' - QP'} \frac{w^3}{2}, \quad (3)$$

где P, Q – два полинома четвертой степени по w с постоянными коэффициентами, а P'', Q'', P', Q' – производные полиномов P, Q по w [3]. В этой же работе он показал, что уравнение (3) имеет не более шести полюсов, а также то, что уравнение P -типа [2], которое допускает в качестве своего упрощения уравнение (3), причем все корни относительно переменной w уравнения $PQ' - QP' = 0$ простые, необходимо имеет вид

$$\begin{aligned}
 w''' = & \sum_{k=1}^6 \frac{(w'-a'_k)(w''-a''_k) + A_k(w'-a'_k)^3 + B_k(w'-a'_k)^2 + c_k(w'-a'_k)}{w-a_k} + D w'' + \\
 & + E w' + \prod_{i=1}^6 (w-a_i) \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w-a_k}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнение (4) содержит 32 коэффициента – функции по z : a_k, A_k, B_k, c_k, F_k ($k = \overline{1, 6}$), D, E . Шази получил следующую систему алгебраических и дифференциальных уравнений, связывающую эти коэффициенты:

$$\sum_{k=1}^6 A_k = 0, \quad \sum_{k=1}^6 a_k A_k = -6, \quad \sum_{k=1}^6 a_k^2 A_k = -2 \sum_{k=1}^6 a_k, \tag{5}$$

$$2D + \sum_{k=1}^6 (B_k - 3a'_k A_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^6 F_k = \sum_{k=1}^6 a_k F_k = \sum_{k=1}^6 a_k^2 F_k = 0. \tag{6}$$

$$2A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0 (k, j = \overline{1, 6}; j \neq k), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{5}{2} A_k - \sum_j \frac{1}{a_k - a_j} \right) B_k + \sum_j \left(\frac{1}{2} A_k + \frac{1}{a_k - a_j} \right) B_j = -A'_k + A_k \sum_j \frac{a'_k - a'_j}{a_k - a_j} - \\
 & - 3 \sum_j A_j \frac{a'_k - a'_j}{a_k - a_j} + \frac{3}{2} A_k \sum_{i=1}^6 a'_i A_i,
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(2A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j} \right) c_k + \sum_j c_j \frac{1}{a_k - a_j} = B_k^2 - B'_k - B_k \sum_j \frac{a'_k - a'_j}{a_k - a_j} - \\
 & - \sum_j \frac{3A_j (a'_k - a'_j)^2 + 2B_j (a'_k - a'_j)}{a_k - a_j} + B_k D - E - \sum_j \frac{a''_k - a''_j}{a_k - a_j},
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & - a'''_k - B_k c_k + c'_k + \sum_j \frac{(a'_k - a'_j)(a''_k - a''_j - c_k) + A_j (a'_k - a'_j)^3}{a_k - a_j} + \\
 & + \sum_j \frac{B_j (a'_k - a'_j)^2 + c_j (a'_j - a'_k)}{a_k - a_j} + E a'_k + D (a''_k - c_k) + F_k \prod_j (a_k - a_j) = 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $k, j = \overline{1, 6}$; $j \neq k$, которую он определил как необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнения (4) [3].

Отметим, что большой интерес здесь может представлять исследование различных классов уравнения (4)–(10) с использованием метода приближенного решения В. Н. Орлова [4], [5], основанного на разделении области поиска решений в регулярной области и окрестности подвижных особых точек, и в построении последовательности аналитических продолжений.

Материал и методика исследований. Исследуя уравнение (4), Шази построил эквивалентные ему системы. Так, например, в окрестности точки голоморфности функции $w(z)$ решения уравнения (4) им была построена система вида

$$\begin{cases} \frac{w'}{2} + P_3 w' + Q_3 + P v - Q u = 0, \\ w'' + P_2 w' + Q_2 + \frac{\partial P}{\partial w} v - \frac{\partial Q}{\partial w} u = 0, \end{cases}$$

где P_3, Q_3, P_2, Q_2 – полиномы от w , степень которых равна нижнему индексу, и коэффициенты которых голоморфны в каждой точке, где голоморфны коэффициенты уравнения (4). Другие эквивалентные системы были построены Н. А. Лукашевичем в работе [6], где доказано, что решение шести неприводимых уравнений Пенлеве выражается через решения систем вида

$$\begin{cases} uu'' - u'^2 = a_0uu' + a_1uv' + a_2u'v + a_3vv' + a_4u^2 + a_5uv + a_6v^2, \\ vv'' - v'^2 = b_0uu' + b_1uv' + b_2u'v + b_3vv' + b_4u^2 + b_5uv + b_6v^2 \end{cases} \quad (11)$$

с аналитическими коэффициентами a_i, b_i ($i = \overline{0,6}$) по z . Там же [6] было доказано, что если $w(z)$ – решение уравнения Пенлеве, то это решение можно представить в виде

$$w(z) = \frac{u(z)}{v(z)}, \quad (12)$$

где $u(z)$ и $v(z)$ – целые функции, удовлетворяющие системе (11). Подстановка (12) сводит систему (11) к дифференциальному уравнению третьего порядка, которое можно записать в виде (4). Изучение системы (11) было проведено В. И. Ляликовой [7].

Шази не удалось найти решения системы (5)–(10), но он показал, что некоторые случаи вырождения уравнения (4) являются уравнениями Пенлеве и, следовательно, решение уравнения (4) может быть рассмотрено как существенно новое по сравнению с трансцендентными функциями Пенлеве [1], [6].

Необходимые и достаточные условия того, чтобы система (11) принадлежала к P -типу были получены Н. А. Лукашевичем в [8].

Шази не исследовал систему (5)–(10), а потому он явно не выделил классы уравнений вида (4), решения которых не имеют подвижных критических особых точек [1]. Изучение свойств решений системы (5) – (6) было проведено Н. А. Лукашевичем в работе [6]. Решение систем (5), (6) имеет вид [9], [10]

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1a_k^4 + 4\sigma_2a_k^3 - 3\sigma_3a_k^2 + 2\sigma_4a_k - \sigma_5} \quad (k = \overline{1,6}), \quad (13)$$

где основные симметрические многочлены σ_k , составленные из элементов a_k ($k = \overline{1,6}$), связаны с величинами $\alpha_2, \beta_2, \beta_3$ соотношениями

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2}, \\ \beta_3 &= \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\alpha_2\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}, \end{aligned} \quad (14)$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению пятой степени

$$\begin{aligned} &1296\alpha_2^5 - 1296\sigma_2\alpha_2^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 + (432\sigma_2^2 + 216\sigma_1\sigma_3 - 432\sigma_4)\alpha_2^3 + 2\sigma_1^3\sigma_3\sigma_4 + \\ &+ 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - 8\sigma_1^2\sigma_4^2 - 6\sigma_1^2\sigma_3\sigma_5 - 36\sigma_2\sigma_3\sigma_5 + 48\sigma_1\sigma_4\sigma_5 - 72\sigma_5^2 + 4\sigma_1^4\sigma_6 - \\ &- 48\sigma_1^2\sigma_2\sigma_6 + 144\sigma_2^2\sigma_6 + \alpha_2^2(-48\sigma_2^3 - 144\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 24\sigma_1^2\sigma_4 + 288\sigma_2\sigma_4 - \\ &- 216\sigma_1\sigma_5 + 1296\sigma_6) + \alpha_2(24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_3^2 - 8\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4 - 48\sigma_2^2\sigma_4 - \\ &- 36\sigma_1\sigma_3\sigma_4 - 4\sigma_1^3\sigma_5 + 72\sigma_1\sigma_2\sigma_5 + 108\sigma_3\sigma_5 + 144\sigma_1^2\sigma_6 - 864\sigma_2\sigma_6) = 0. \end{aligned}$$

Если же выполняются условия $18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2 = 0$, то величины A_k имеют вид

$$A_k = \frac{(\sigma_1 - 6a_k)(108a_k^3 - 108\alpha_3 - 54\sigma_1a_k^2 - \sigma_1^3 - 6(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)a_k + 6\sigma_1\sigma_2 - 27\sigma_3)}{108(6a_k^5 - 5\sigma_1a_k^4 + 4\sigma_2a_k^3 - 3\sigma_3a_k^2 + 2\sigma_4a_k - \sigma_5)} \quad (k = \overline{1,6}),$$

$$\alpha_1 = -\frac{\sigma_1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{6}, \quad \beta_2 = -2\alpha_3 - \frac{\sigma_3}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_4}{3} - \frac{\sigma_1}{324}(108\alpha_3 + \sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3),$$

$$\sigma_1^5 + 27\sigma_3\sigma_1^2 + 324\sigma_5 = 6\sigma_2\sigma_1^3 + 108\sigma_1\sigma_2.$$

Параметр α_3 определяется как решение уравнения второй степени

$$\frac{1}{2}\alpha_3(4\alpha_3 + \sigma_3) + \frac{1}{5832}(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)(\sigma_1(108\alpha_3 + \sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3) - 108\sigma_4) - \sigma_6 = 0.$$

Замечание 1. Подробный вывод условий, который отсутствует в работе Шази [3], приведен в работах [9], [11]. Решение уравнения (4) с постоянными коэффициентами $a_k (k = \overline{1, 6})$ приведено в работе [10].

Результаты исследований и их обсуждение. Построим новую эквивалентную систему для дифференциального уравнения (4) при условии, что его коэффициенты $a_k (k = \overline{1, 6})$ являются постоянными величинами [12], [13]. Уравнения (8) при таком предположении примут вид

$$\left(\frac{5}{2} A_k - \sum_j \frac{1}{a_k - a_j} \right) B_k + \sum_j \left(\frac{1}{2} A_k + \frac{1}{a_k - a_j} \right) B_j = 0 \quad (k, j = \overline{1, 6}; j \neq k).$$

Последняя система относительно неизвестных $B_k (k = \overline{1, 6})$ является линейной однородной, главный определитель которой не равен нулю, а, следовательно, $B_k = 0 (k = \overline{1, 6})$. Из первого уравнения системы (6) следует, что в этом случае функция $D = 0$. Так как $a_k (k = \overline{1, 6})$ – постоянные величины, то система (10) примет вид

$$F_k \prod_j (a_k - a_j) = 0 \quad (k, j = \overline{1, 6}; j \neq k).$$

Откуда получаем, что $F_k = 0 (k = \overline{1, 6})$. В результате уравнение (4) запишется в виде

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{w'w'' + A_k(w')^3 + c_k w'}{w - a_k} + E w'. \tag{15}$$

Пусть коэффициенты уравнения (15) связаны соотношением $\sum_{k=1}^6 a_k = 0$ и точки, соответствующие величинам $a_k (k = \overline{1, 6})$, расположены на комплексной плоскости симметрично относительно начала координат. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} w'' = f_1(z, w)w'^2 + f_2(z, w)v + f_3(w), \\ v' = -2f_1(z, w)w'v, \end{cases} \tag{16}$$

где $f_i (i = \overline{1, 3})$ – функции по z и w . Из сделанного предположения о симметричности коэффициентов $a_k (k = \overline{1, 6})$ и из определения основных симметрических многочленов $\sigma_k (k = \overline{1, 6})$ получаем, что

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0. \tag{17}$$

Продифференцируем первое уравнение системы (16) по z и подставим его правую часть уравнения (15) вместо w''' . Подставим также правые части уравнений системы (16) в уравнение (15) вместо w'' и v' . Приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях функций w и v . В результате получим систему дифференциальных уравнений для отыскания коэффициентов $f_i (i = \overline{1, 3})$ системы (16)

$$\begin{aligned} f_2 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w - a_k} - \frac{\partial f_2}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\ -2f_1^2 + f_1 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w - a_k} + \sum_{k=1}^6 \frac{A_k}{w - a_k} - \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0, \\ e - 2f_3 f_1^+ f_3 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w - a_k} + \sum_{k=1}^6 \frac{C_k}{w - a_k} + \frac{\partial f_3}{\partial w} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Из первых двух уравнений системы (18) находим функцию $f_2(z, w)$

$$f_2(z, w) = \prod_{k=1}^6 (w - a_k) \cdot C_2, \quad (19)$$

где C_2 – произвольная постоянная. Из третьего уравнения системы (18) находим функцию $f_1 = f_1(w)$, которую подставим в четвертое уравнение системы (18). В результате получим уравнение Риккати, для которого найдем шесть частных решений вида

$$T(w) = \frac{b_0 w^5 + b_1 w^4 + b_2 w^3 + b_3 w^2 + b_4 w + b_5}{w^6 - w^5 \sigma_1 + w^4 \sigma_2 - w^3 \sigma_3 + w^2 \sigma_4 - w \sigma_5 + \sigma_6}, \quad (20)$$

соответствующих шести наборам значений a_k ($k = \overline{1, 6}$). Приведем ниже значения параметров σ_k ($k = \overline{1, 6}$) и b_j ($j = \overline{0, 5}$) и вид функции $f_1(z, w)$ для соответствующего частного решения (20):

$$1) \quad b_2 = \frac{6}{17} (16 \pm \sqrt{154}) \alpha_2, \quad b_3 = b_5 = 0, \quad b_4 = \frac{2}{17} (1 \pm \sqrt{154}) \alpha_2^2, \quad \sigma_6 = -\frac{1}{289} (155 \mp 2\sqrt{154}) \alpha_2^3, \quad \sigma_2 = \frac{\alpha_2}{17} (49 \pm 2\sqrt{154}), \quad \sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{2023} (49 \pm 2\sqrt{154})^2;$$

$$f_1(z, w) = \frac{34w}{17w^2 + \alpha_2(1 \mp \sqrt{154})} + \frac{e^{\nu_1(w)}}{c + 2 \int e^{\nu_1(w)}}, \quad (21)$$

где c – произвольная постоянная и

$$\nu_1(w) = \int (-9826w^7 - 578(95 \pm 7\sqrt{154})w^5 \alpha_2 + 170(155 \mp 2\sqrt{154})w^3 \alpha_2^2 + 6(4807 \pm 89\sqrt{154})w \alpha_2^3) / (17w^2 + \alpha_2 \mp \sqrt{154} \alpha_2) (289w^6 + 17(49 \pm 2\sqrt{154})w^4 \alpha_2 - (431 \pm 28\sqrt{154})w^2 \alpha_2^2 - (2\sqrt{154} \mp 155) \alpha_2^3) dw;$$

$$2) \quad \sigma_4 = \frac{1}{4} (14\alpha_2 \sigma_2 - 3\sigma_2^2 - 15\alpha_2^2); \quad b_2 = 3(\sigma_2 - \alpha_2), \quad b_3 = b_5 = 0, \quad b_4 = \alpha_2(\sigma_2 - 3\alpha_2), \quad \sigma_6 = -\frac{\alpha_2}{4} (\sigma_2 - 3\alpha_2)^2.$$

$$f_1(z, w) = \frac{2w(6\alpha_2 c + w(4cw - 3)) - 2\alpha_2 - 4c\sigma_2 w}{9\alpha_2^2 c + 4w^3(cw - 1) + c\sigma_2(\sigma_2 - 6\alpha_2 - 4w^2) + 4\alpha_2 w(3cw - 1)}, \quad (22)$$

где c – произвольная постоянная;

$$3) \quad \sigma_2 = \frac{\alpha_2}{4} (7 \pm i\sqrt{11}), \quad \sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{64} (7 \pm i\sqrt{11})^2; \quad b_2 = \frac{3}{4} (3 \pm i\sqrt{11}) \alpha_2, \quad b_3 = b_5 = 0, \quad b_4 = \frac{1}{4} (-5 \pm i\sqrt{11}) \alpha_2^2, \quad \sigma_6 = \frac{1}{32} (-7 \pm 5i\sqrt{154}) \alpha_2^3.$$

$$f_1(z, w) = \frac{16w}{8w^2 + \alpha_2(5 \mp i\sqrt{11})} + \frac{e^{-8\nu_2(w)}}{c + 2 \int e^{-8\nu_2(w)}}, \quad (23)$$

где c – произвольная постоянная и

$$\nu_2(w) = \int w (64w^6 + 8(13 \pm 7i\sqrt{11})w^4 \alpha_2 + 10(-7 \pm 5i\sqrt{11})w^2 \alpha_2^2 + 9(-11 \pm 4i\sqrt{11}) \alpha_2^3) / (8w^2 + 5\alpha_2 \mp i\sqrt{11} \alpha_2) (32w^6 + 8(7 \pm 5i\sqrt{11})w^4 \alpha_2 + (19 \pm 7i\sqrt{11})w^2 \alpha_2^2 - (7 \mp 5i\sqrt{11}) \alpha_2^3) dw;$$

$$4) \quad \sigma_2 = 2\alpha_2, \quad \sigma_4 = \alpha_2^2;$$

$$f_1(z, w) = \frac{1}{w} \left(1 + \frac{1}{cw - 2} + \frac{w^2}{w^2 + \alpha_2} \right), \quad (24)$$

где c – произвольная постоянная;

$$5) \quad b_2 = \alpha_2 + \sigma_2, \quad b_3 = 2\alpha_2 \sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2}, \quad b_4 = \alpha_2(\sigma_2 - \alpha_2), \quad b_5 = \alpha_2^2 \sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2}, \quad \sigma_4 = \alpha_2(2\sigma_2 - 3\alpha_2), \quad \sigma_6 = \alpha_2^2(\sigma_2 - 2\alpha_2).$$

$$f_1(z, w) = \frac{2c\sigma_2 - 4c\alpha_2 + \sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2} e^{\nu_2(w)}}{(w^2 - 2\alpha_2 + \sigma_2)(2c\sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2} + e^{\nu_2(w)})} + w \left(\frac{1}{w^2 + \alpha_2} + \frac{1}{w^2 - 2\alpha_2 + \sigma_2} \right), \quad (25)$$

где c – произвольная постоянная и

$$\nu_1(w) = \frac{4\sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2} \operatorname{arctg}(w/\sqrt{\sigma_2 - 2\alpha_2})}{\sqrt{\sigma_2 - 2\alpha_2}};$$

$$6) \quad b_2 = -\alpha_2 + \sigma_2, \quad b_3 = -2\alpha_2\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2}, \quad b_4 = -\alpha_2(\sigma_2 + \alpha_2), \quad b_5 = \alpha_2^2\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2},$$

$$\sigma_4 = -\alpha_2\sigma_2, \quad \sigma_6 = -\alpha_2^3.$$

$$f_1(z, w) = \frac{1}{w^4 + w^2\alpha_2 + \alpha_2^2 + w^2\sigma_2} (2w^3 + w\alpha_2 - w^2\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2} + \alpha_2\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2} + w\sigma_2 - \frac{2(\alpha_2 - w^2)\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2}}{1 + 8c_1 e^{\nu_3(w)}\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2}}), \quad (26)$$

где c – произвольная постоянная и

$$\nu_3(w) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2}}{\xi} \left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}w}{\sqrt{\alpha_2 + \sigma_2 - \xi}}\right) (3\alpha_2 + \sigma_2 - \xi)}{\sqrt{\alpha_2 + \sigma_2 - \xi}} - \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}w}{\sqrt{\alpha_2 + \sigma_2 + \xi}}\right)}{\sqrt{\alpha_2 + \sigma_2 + \xi} (3\alpha_2 + \sigma_2 + \xi)} \right),$$

$$\xi = \sqrt{-3\alpha_2^2 + 2\alpha_2\sigma_2 + \sigma_2^2}.$$

Зная вид функции $f_1(z, w)$ из формул (21)–(26), определим функцию $f_3(w)$ из пятого уравнения системы (18) как решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Подставив затем найденные функции $f_i(z, w)$ ($i = \overline{1, 3}$) в систему (16), найдем ее явный вид.

Замечание 2. Построенная система (16) будет эквивалентной дифференциальному уравнению (15) в следующем смысле: если продифференцировать первое уравнение системы (16) и затем подставить вместо w''' , w'' и v' их значения в уравнение (15), то мы получим тождество.

Проверим выполнение этого условия эквивалентности системы (16) уравнению (15). Продифференцируем первое уравнение системы (16) по z и подставим правые части равенств системы (16) в уравнение (15). Сгруппируем слагаемые относительно выражений w'' , $w'v$, $(w')^2$, $(w')^3$, w' , v . После упрощений получим, что коэффициенты при выражениях $w'v$, v , $(w')^2$, $(w')^3$, w' равны левым частям системы (18). Что и требовалось доказать.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения (15) удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^6 a_k = 0$ и точки, соответствующие a_k ($k = \overline{1, 6}$), расположены симметрично относительно начала координат. Если для параметров σ_2 , σ_4 , α_2 имеет место одно из соотношений

$$\sigma_2 = \frac{\alpha_2}{17} (49 \pm 2\sqrt{154}), \quad \sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{2023} (49 \pm 2\sqrt{154})^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{\alpha_2}{4} (7 \pm i\sqrt{11}), \quad \sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{64} (7 \pm i\sqrt{11})^2;$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{4} (14\alpha_2\sigma_2 - 3\sigma_2^2 - 15\alpha_2^2);$$

$$\sigma_2 = 2\alpha_2, \quad \sigma_4 = \alpha_2^2;$$

$$\sigma_4 = \alpha_2(2\sigma_2 - 3\alpha_2);$$

$$\sigma_4 = -\alpha_2\sigma_2,$$

то уравнение (15) эквивалентно системе вида (16), где функция $f_2(z, w)$ имеет вид (19), $f_1(z, w)$ определяются соответственно одной из формул (20)–(25), $f_3(z, w)$ – решение линейного дифференциального уравнения (18)₅.

Замечание 3. Построение эквивалентной системы для коэффициентного соотношения $\sigma_4 = -\alpha_2\sigma_2$ проведено в работе [12]. Для остальных пяти случаев (21)–(25) применим аналогичный метод.

С помощью так построенной системы (16) можно свести интегрирование дифференциального уравнения (15) к интегрированию линейного дифференциального уравнения первого порядка. Действительно, поскольку получившаяся система (16) является автономной, то из второго уравнения этой системы найдем

$$v = c_1 \exp\left(-2 \int f_1(w) dw\right),$$

где c_1 – произвольная постоянная. Подставим найденное выражение в первое уравнение системы (16), введем замену

$$(w'(z))^2 = y(w), \quad w''(z) = \frac{1}{2}y'(w). \quad (27)$$

В результате получим линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'(w) = 2 \left(f_1(w)y(w) + f_2(w)\exp\left(-2 \int f_1(w) dw\right) + f_3(w) \right),$$

которое интегрируется и его общее решение имеет вид

$$y(w) = c_2 \cdot \exp\left(-2 \int f_1(w) dw\right) \cdot \int \left(c_1 f_2(w) + f_3(w)\exp\left(2 \int f_1(w) dw\right) \right) dw,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Используя замену (27), найдем функцию $w(z)$ в квадратурах в замкнутой форме, которая является решением системы (16) и уравнения (15).

Пример. Зададим некоторый набор значений полюсов a_k , ($k = \overline{1, 6}$)

$$a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{3}, a_5 = -1, a_6 = -3. \quad (28)$$

Для значений a_k , ($k = \overline{1, 6}$) (28) выполняется соотношение $\sigma_4 = -\alpha_2\sigma_2$ и, следовательно, уравнению (15) с такими a_k , ($k = \overline{1, 6}$) соответствует система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} w'' = & \frac{18w^3 + 93w^2 + 118w + 31}{9w^4 + 62w^3 + 118w^2 + 62w + 9} w'^2 + v(w-3)(w-1)\left(w - \frac{1}{3}\right) \times \\ & \times \left(w + \frac{1}{3}\right)(w+1)(w+3) - \left((w-1)(2(3w-1)(12(3E+4)w^3 + (163E-312)w^2 + \right. \\ & \left. + 2(85E-216)w + 40E + 36w^4 - 108) - 15c_2(27w^3 + 133w^2 + 158w + 40)) + \right. \\ & \left. + c_1(3w-1)(81w^3 + 393w^2 + 454w + 112)\right) \left(24\left((3w^2 + 10w + 3)^2 + 2(w^3 + w)\right)\right)^{-1}, \end{aligned}$$

$$v' = -2 \frac{18w^3 + 93w^2 + 118w + 31}{9w^4 + 62w^3 + 118w^2 + 62w + 9} w'v, \quad (29)$$

где c_1, c_2, E – коэффициенты уравнения (15).

Проинтегрируем систему (29), например, для значений параметров $c_1 = 1, c_2 = -1, E = 1$. Решая второе уравнение системы, находим

$$v = \frac{C_1}{9w^4 + 62w^3 + 118w^2 + 62w + 9}, \quad (30)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Подставим затем соотношение (30) в первое уравнение системы (29), которое после упрощений примет вид

$$\begin{aligned} w'' = & \frac{w^2}{72} (728C_1 + 6696w'^2 + 5676) + (72C_1 - 648)w^6 + (7884C_1 - 728)w^4 - 72C_1 + \\ & + w^3(1296w'^2 - 15288) + w(8496w'^2 - 6432) + 2232w'^2 - 648w^5 - \\ & - 2400 / (9w^4 + 62w^3 + 118w^2 + 62w + 9). \end{aligned} \quad (31)$$

Применим замену вида (27) для уравнение (31). В результате получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $y(w)$. После интегрирования этого линейного уравнения и возвращения к исходной функции $w(z)$ получим уравнение

$$w'^2 = 9C_2w^4 + \left(62C_2 - \frac{2}{9}(C_1 - 9)\right)w^3 + (118C_2 + 1)w^2 - \left(\frac{5}{3} + \frac{2C_1}{9} - 62C_2\right)w + \frac{5}{6} + 9C_2, \quad (32)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Общй интеграл уравнения (32) примет вид

$$\begin{aligned} &6\sqrt{2} \left((r_1 - r_2) F \left[\operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{(r_2 - r_4)(w - r_1)}{(r_1 - r_4)(w - r_2)}} \mid \frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_4)}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)} \right] \sqrt{\frac{(w - r_1)(w - r_2)}{(r_1 - r_3)}} \times \right. \\ &\times \left. \sqrt{(w - r_3)(w - r_4)} \right) \cdot (3(54C_2 + 5) - 2(2C_1 - 558C_2 + 15)w + \\ &+ 18(118C_2 + 1)w^2 - 4(C_1 - 279C_2 - 9)w^3 + 162C_2w^4)^{-1/2} = \\ &= (r_2 - r_1)(r_2 - r_4)(\pm z + C_3), \end{aligned} \quad (33)$$

где $F[\phi|m]$ – неполный эллиптический интеграл первого рода [14], а именно:

$$F[\phi|m] = \int_0^\phi (1 - m \sin^2(\theta))^{-1/2} d\theta, \quad -\pi/2 < \phi < \pi/2,$$

$$r_i = \operatorname{Root}[15 + 162C_2 - (30 + 4C_1 - 1116C_2)\#1 + (18 + 2124C_2)\#1^2 + (36 - 4C_1 + 1116C_2)\#1^3 + 162C_2\#1^4, i] \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

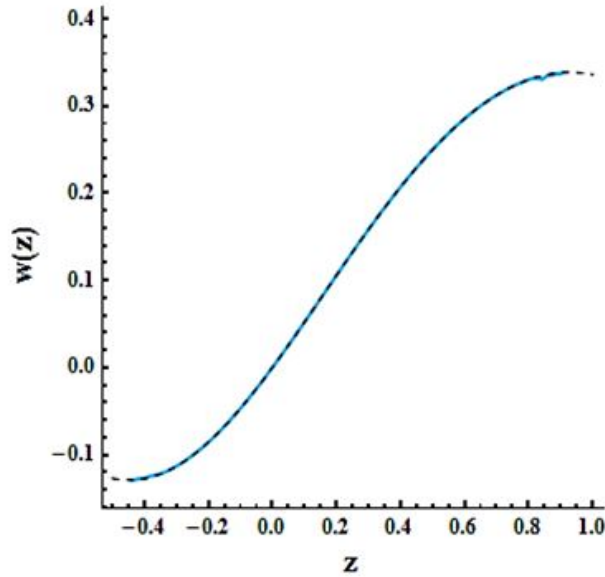


Рис. 1. График функции $w(z)$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (15) с начальными условиями

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0.5, \quad w''(0) = 0.5. \quad (34)$$

Для системы (29) начальные условия (34) примут вид

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0.5, \quad v(0) = -\frac{361}{108}.$$

Найдем соответствующие значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3

$$C_1 = -\frac{361}{12}, C_2 = -\frac{7}{108}, C_3 \approx 2,96809270936 \times 10^{-9}.$$

Замечание 4. Точное значение C_3 выражается через Root-объекты [15], здесь приведено лишь его приближенное значение. Вид полученного частного решения изображен на рис. 1.

Резюме. В данной работе построены системы дифференциальных уравнений третьего порядка, эквивалентные дифференциальному уравнению Шази с шестью полюсами при условии, что все его коэффициенты являются постоянными. Приведены коэффициентные соотношения, которые устанавливают эквивалентность построенных систем и исходного дифференциального уравнения. Интегрируя найденные системы для заданного набора постоянных полюсов, удастся проинтегрировать нелинейное уравнение третьего порядка (15) в квадратурах в замкнутой форме.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Добровольский, В. А.* Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений / В. А. Добровольский. – Киев : Вища школа, 1974. – 456 с.
- [2] *Голубев, В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
- [3] *Chazy, J.* Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317–385.
- [4] *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля / В. Н. Орлов. – М. : МГПУ, 2013 – 174 с.
- [5] *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов. – Чебоксары : Перфектум, 2012. – 110 с.
- [6] *Лукашевич Н. А.* К теории уравнения Шази / Н. А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 2. – С. 353–357.
- [7] *Ляликова, В. И.* Специальное дифференциальное уравнение третьего порядка с неподвижными критическими особыми точками / В. И. Ляликова // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 6. – С. 1090–1092.
- [8] *Лукашевич Н. А.* Уравнения третьего порядка без подвижных критических точек (п.к.т.) // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 5. – С. 778–785.
- [9] *Мартынов, И. П.* О решении системы уравнений Шази / И. П. Мартынов, А. В. Чичурин // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12. – № 1. – С. 92–98.
- [10] *Чичурин, А. В.* О точных решениях нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с шестью особыми точками / А. В. Чичурин // Динамика неоднородных систем : тр. ИСА РАН ; ред. Ю. С. Попков. – Москва, 2010. – Т. 56. – № 1. – С. 20–29.
- [11] *Чичурин, О.* Про дослідження одного класу рівнянь Шази / О. Чичурин // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. Математика. Механіка. – 2010. – № 24. – С. 14–20.
- [12] *Швычкина, Е. Н.* О представлении дифференциального уравнения Шази с шестью постоянными полюсами в виде системы двух дифференциальных уравнений с помощью системы Mathematica / Е. Н. Швычкина // Динамика неоднородных систем : тр. ИСА РАН ; ред. Ю. С. Попков. – Москва, 2010. – Т. 53. – № 1. – С. 250–258.
- [13] *Shvychkina, H.* Building the third order differential system with Mathematica / H. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics; Eds. : L. Gadowski [and others]. – Siedlce, 2011. – P. 136–140.
- [14] *Янке, Э.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Э. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 344 с.
<http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Root.html>.

Чичурин Александр Вячеславович,

доктор физико-математических наук, профессор, Европейский университет информатики и экономики, г. Варшава

e-mail: achichurin@gmail.com

Швычкина Елена Николаевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета, г. Брест

e-mail: shvychkina@yandex.ru

A. V. Chichurin, A. N. Shvychkina

ON INTEGRABLE SYSTEMS OF THE THIRD ORDER WHICH ARE EQUIVALENT OF THE CHAZY EQUATION WITH SIX FIXED POLES

European University of Information Technology and Economics

Brest State Technical University

Abstract. In the paper we construct a system of two differential equations that is equivalent of the Chazy differential equation of the third order with six fixed poles. Coefficients of the constructed systems are found by the analytical method. Example of the equivalent system for the given set of six fixed poles is considered.

Keywords: Chazy differential equation, equivalent systems of the third order, movable critical singularities.

REFERENCES

- [1] *Dobrovolsky, V. A.* Sketches of development of the analytical theory of the differential equations / V. A. Dobrovolsky. – Kiev : Vishcha school, 1974. – 456 p.
- [2] *Golubev, V. V.* Lectures on the analytical theory of the differential equations / V. V. Golubev. – M. ; L. : GITTL, 1950. – 436 p.
- [3] *Chazy, J.* Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317–385.
- [4] *Orlov, V. N.* Method of the approximate solution of the first, second differential equations of Painleve and Abel / V. N. Orlov. – M. : МИИУ, 2013 – 174 p.
- [5] *Orlov, V. N.* Method of the approximate solution of the scalar and matrix differential equations of Rikcati / V. N. Orlov. – Cheboksary : Perfektum, 2012. – 110 p.
- [6] *Lukashevich, N. A.* To the theory of the equation of Shazi / N. A. Lukashevich // Differents. equations. – 1993. – Vol. 29. – № 2. – P. 353–357.
- [7] *Lyalikova, V. I.* The special differential equation of the third order with motionless critical special points / V. I. Lyalikova // Differents. equations. – 1984. – Vol. 20. – № 6. – P. 1090–1092.
- [8] *Lukashevich, N. A.* The equations of the third order without mobile critical points / N. A. Lukashevich // Differents. equations. – 1982. – Vol. 18. – № 5. – P. 778–785.
- [9] *Martynov, I. P.* About the decision of system of the equations of Shazi / I. P. Martynov, A. V. Chichurin // Neliniyni kolivannya. – 2009. – Vol. 12. – № 1. – P. 92–98.
- [10] *Chichurin, A. V.* About exact solutions of the nonlinear differential equation of the third order with six special points / A. V. Chichurin // Dynamics of non-uniform systems : work IZA of the Russian Academy of Sciences; edition Yu. S. Popkov. – M., 2010. – Vol. 56. – № 1. – P. 20–29.
- [11] *Chichurin, O.* About doslidszhennya to one class rivnyan Shazi / O. Chichurin // Visnik KNU of T. Shevchenk. Mathematics series. Mechanics. – 2010. – № 24. – P. 14–20.
- [12] *Shvychkina, E. N.* About representation of the differential equation of Shazi with six constant poles in the form of system of two differential equations by means of Mathematica system / E. N. Shvychkina // Dynamics of non-uniform systems : work IZA of the Russian Academy of Sciences; edition Yu. S. Popkov. – M., 2010. – Vol. 53. – № 1. – P. 250–258.
- [13] *Shvychkina, H.* Building the third order differential system with Mathematica / H. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics; Eds. : L. Gadowski [and others]. – Siedlce, 2011. – P. 136–140.
- [14] *Janka, E.* Special functions. Formulas, schedules, tables / E. Janka, F. Emde, F. Lesh. – M. : Nauka, 1968. – 344 p.

Chichurin, Alexander Vjacheslavovich

*Doctor of Phys.&Math., Professor, European University of Information Technology and Economics,
Warsaw, Poland*

Shvychkina, Alena Nikolaevna

*Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Mathematics, Brest State Technical
University, Brest*

А. В. Пилягин

ПОВЫШЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЯ ДЕФОРМАЦИИ ГРУНТОВ ПО ДАННЫМ ПРЕССИОМЕТРИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

*Чебоксарский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВПО "Московский
государственный машиностроительный университет (МАМИ)"*

Аннотация. Приводится методика определения модуля деформации грунтов по данным прессиометрических испытаний с использованием задачи Ламе о напряжениях и перемещениях толстостенного полого цилиндра под действием внутреннего и внешнего давлений.

Ключевые слова: задача Ламе, модуль деформации, напряжение, скважина, грунт, основание, перемещение.

УДК: 624.131.54: 624.131.38

Для определения напряженно-деформированного состояния оснований (грунтов) фундаментов используется математический аппарат теории упругости (закон Гука, законы: Буссинеска, Миндлина, Кельвина т.д.) с соответствующими оговорками. Грунт не является упругим материалом, но является линейно деформационным до определенного давления. Поэтому основная деформационная характеристика – модуль упругости заменяется модулем общей деформации, а грунт рассматривается как линейно деформируемая среда.

Существующие ГОСТы по определению модуля деформации грунтов включают и прессиометрический метод.

В пробуренную на площадке скважину опускают цилиндрический аппарат (прессиометр), имеющий эластичную камеру, давление в которой создается гидравлическим (вода) или пневматическим путем. При этом измеряется давление радиуса скважины.

Методика определения модуля деформации по данным прессиометрических испытаний изложена в ГОСТ 20276-99 [1]. В соответствии с данным ГОСТом модуль деформации определяется по линейному участку кривой зависимости изменения радиуса скважины в зависимости от приложенного давления по формуле

$$E = k_z r_0 \frac{\Delta P}{\Delta r}, \quad (1)$$

где r_0 – радиус скважины после приложенного давления, ΔP – приращение давления, Δr – увеличение радиуса скважины в интервале указанных давлений.

Коэффициент k_z рассматривается как корректирующий коэффициент, принимающий при испытании в медленном режиме следующие значения: для песка и супеси $k_z = 1,3$ для суглинка $k_z = 1,35$ и для глин $k_z = 1,42$. В быстром режиме значения k_z принимаются по таблице 1.

Таблица 1

Значение коэффициента k_z

Наименование грунта	Глубины испытаний	
	до 10 м	10÷20 м
Глинистый грунт при I_L равном:		
$I_L < 0,25$	2	1,75
$0,25 \leq I_L < 0,5$	3	2,5
$I_L > 0,5$	4	3,5

Анализ таблицы 1 показывает, что с ростом показателя текучести J_L увеличивается значение k_z , а следовательно, и модуль общей деформации, что не соответствует действительности.

Кроме того, значение k_z снижается с увеличением глубины скважины, что приводит к снижению модуля общей деформации. Фактически модуль общей деформации грунтов с увеличением глубины должен возрастать. Как известно, формула определения модуля общей деформации грунта по данным прессиометрических испытаний базируется на осесимметричной задаче Ламе о напряжениях и перемещениях толстостенного бесконечно длинного цилиндра под действием внутреннего и внешнего давлений.

Полное решение задачи Ламе можно найти в курсах теории упругости. Нас интересуют перемещения цилиндра под действием внутреннего давления P_v и наружного давления P_n от собственного веса грунта на глубине проведения испытаний.

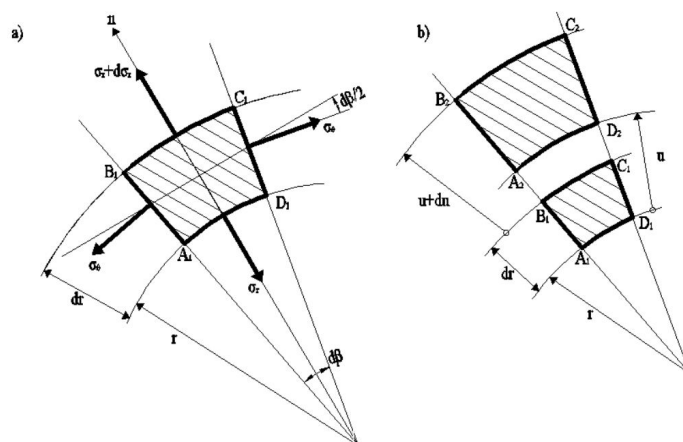


Рис. 1. Схема нагруженного (а) и деформированного (б) состояния части цилиндра

Обратимся к выводу формулы Ламе (рис. 1а), для чего рассмотрим равновесие элементарной трапеции $A_1B_1C_1D_1$ сечения цилиндра с центральным углом $d\beta$. На боковых гранях A_1B_1 и C_1D_1 будут действовать окружные напряжения σ_θ ; а на внутренней поверхности элемента A_1D_1 радиальные $-\sigma_r$. На внешней границе B_1C_1 радиальные напряжения будут равны $\sigma_r + d\sigma_r$. В виду симметрии кольца и нагрузок выделенный элемент не будет перекашиваться, следовательно, на его гранях будут отсутствовать касательные напряжения. Поэтому напряжения σ_r и σ_θ будут главными, а величина σ_θ не будет зависеть от полярного угла β .

Уравнение равновесия для элемента $A_1B_1C_1D_1$ в виде суммы всех сил на нормаль к цилиндрической поверхности выглядит следующим образом:

$$-\sigma_r \cdot r \cdot d\beta + (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) \cdot d\beta - 2\sigma_\theta \cdot dr \cdot \sin \frac{d\beta}{2} = 0, \quad (2)$$

Данное выражение приводится к виду

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим деформации элемента $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 1б). Ввиду симметрии увеличение внутреннего давления приведет к радиальному перемещению всех точек цилиндра. Так, точки A_1 и D_1 сместятся в радиальном направлении на величину (u) в положения A_2 и D_2 , а точки B_1 и C_1 – на величину $u + du$ в положения B_2 и C_2 .

Тогда относительная радиальная деформация грани A_1B_1 будет равна

$$\varepsilon_r = \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \frac{BB_1 - AA_1}{AB} = \frac{(u + du) - u}{dr} = \frac{du}{dr}, \quad (4)$$

относительная окружная деформация грани A_1D_1 равна

$$\varepsilon_\theta = \frac{A_2D_2 - A_1D_1}{A_1D_1} = \frac{(r + u) \cdot d\beta - r \cdot d\beta}{r \cdot d\beta} = \frac{u}{r}. \quad (5)$$

В соответствии с законом Гука для плоского напряженного состояния можно записать

$$\sigma_r = \frac{E}{(1 - \mu^2)} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta). \quad (6)$$

С учетом вышеизложенного получим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами относительно радиальных перемещений, т. е.

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (7)$$

Общее решение данного уравнения сводится к виду

$$u = A \cdot r + B/r, \quad (8)$$

где A и B – постоянные интегрирования, вычисляемые с учетом граничных условий.

Постоянные интегрирования A и B вычисляются при совместном решении следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_n, \quad \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[A(1 + \mu) - B \frac{1 - \mu}{r_n^2} \right] = \sigma_n, \\ \text{при } r = r_b, \quad \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[A(1 + \mu) - B \frac{1 - \mu}{r_b^2} \right] = \sigma_b. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение данных уравнений дает следующие значения:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \mu}{E} \left(\frac{r_b^2 \cdot \sigma_b - r_n^2 \cdot \sigma_n}{r_n^2 - r_b^2} \right), \\ B &= \frac{1 - \mu}{E} \left(\frac{r_b^2 \cdot r_n^2 (\sigma_b - \sigma_n)}{r_n^2 - r_b^2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для возможности использования решения данной задачи применительно к прессиометрическим испытаниям необходимо принять значение наружного радиуса $r_n = \infty$ (бесконечное распространение грунта) и вычислить пределы выражений

$$\begin{aligned} \lim_{r_n \rightarrow \infty} (\sigma_b \cdot r_b^2 - \sigma_n \cdot r_n^2) / (r_n^2 - r_b^2) &= \sigma_n, \\ \lim_{r_n \rightarrow \infty} (r_b^2 \cdot r_n^2 (\sigma_b - \sigma_n)) / (r_n^2 - r_b^2) &= r_b^2 (\sigma_b - \sigma_n). \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда радиальные перемещения можно вычислить по формуле

$$u = \frac{r_{\text{в}}}{E} [(1 + \mu)(\sigma_{\text{в}} - \sigma_{\text{н}}) - \sigma_{\text{н}}(1 - \mu^2)]. \quad (12)$$

Зная горизонтальные перемещения стенок камеры прессиометра (увеличение радиуса скважины) и давление внутри камеры $\sigma_{\text{в}}$ и снаружи $\sigma_{\text{н}}$ (давление грунта), модуль деформации грунта можно определить по следующей формуле

$$E = \frac{(1 + \mu)(\sigma_{\text{в}} - \sigma_{\text{н}}) - \sigma_{\text{н}}(1 - \mu^2)}{u}. \quad (13)$$

В качестве наружного давления $P_{\text{н}}$ принимали величину природного давления от собственного веса грунта на глубине расположения прессиометра. При горизонтальной поверхности грунта вертикальные и горизонтальные напряжения от собственного веса грунта будут равны

$$\sigma_{zy} = \sigma_{zg} = \gamma \cdot h, \quad (14)$$

где γ – удельный вес грунта в пределах глубины расположения (h) прессиометра.

Полученная формула учитывает коэффициент Пуассона грунта и глубину погружения прессиометра путем приложения внешнего давления, равного природному. Природное давление увеличивается пропорционально глубине погружения прессиометра, что ведет к снижению горизонтальных (радиальных) перемещений, а следовательно, и увеличению модуля деформации грунта. Следовательно, в однородных грунтах модуль деформации грунта должен возрастать с увеличением глубины скважины (расположение прессиометра). В существующем ГОСТе эта зависимость обратная.

Выводы:

1. Аналитически показано увеличение модуля деформации однородного грунта от глубины проведения прессиометрических испытаний.
2. Внешнее давление при проведении прессиометрических испытаний равно природному давлению на глубине расположения прессиометра.
3. Прессиометрические испытания характеризуют сжимаемость грунта в горизонтальном направлении. Сжимаемость грунта в вертикальном направлении может быть оценена с учетом коэффициента анизотропии, полученного по данным компрессионных испытаний для образцов грунта, взятых в указанных направлениях (горизонтальное и вертикальное).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Грунты*. Методы полевого определения характеристик прочности и деформируемости. – М. : ГУП ЦПП, 2000. – 86 с.
- [2] *Пилягин, А. В.* Определение модуля общей деформации грунтов с использованием задачи Ламе / А. В. Пилягин // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 16–21 июня 2014 г.): в 2 ч. Ч. 2. – С. 143–149.

Пилягин Алексей Васильевич,

доктор технических наук, профессор, Чебоксарский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВПО "Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)", г. Чебоксары

e-mail: pilyagin.alexei@yandex.ru

A. V. Pilyagin

**IMPROVING THE OF DETERMINATION OF MODULUS OF DEFORMATION
OF SOILS ACCORDING TO TESTS IN WELLS**

*Cheboksary Polytechnical Institute (Branch) of "Moscow state machine-building university
(MAMI)"*

Abstract. The methods of determining the modulus of deformation of soils tests results in welles using tasks Lama about the stresses and displacements of a hollow cylinder under internal and external pressures.

Keywords: task Lama, the modulus of deformation, stress, dispalacements, well, soil.

REFERENCES

[1] *Soil*. Methods of field definition of characteristics of durability and deformability. – М. : STATE UNITARY ENTERPRISE OF TSPP, 2000. – 86 p.

[2] *Pilyagin, A. V.* Definition of the module of the general deformation of soil with use of a task to Lama / A. V. Pilyagin // Materials VIII of the All-Russian conference on mechanics of a deformable solid body (Cheboksary, on June 16–21, 2014): в 2 p. Part 2. – P. 143–149.

Pilyagin, Alexey Vasilyevich

Doctor of Engineering, Professor, Cheboksary Polytechnical Institute (Branch) of "Moscow state machine-building university (MAMI)", Cheboksary

А. В. Никитин, М. Д. Коваленко

ПОЛУПОЛОСА, ЗАЩЕМЛЕННАЯ ПО ПРОДОЛЬНЫМ СТОРОНАМ. ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассмотрена известная краевая задача для полуполосы, длинные стороны которой заштылены, т.е. перемещения здесь равны нулю, а на торце заданы напряжения. В предлагаемой работе дается точное решение задачи. Оно строится в виде разложений по функциям Фадля – Папковича. Однако коэффициенты разложений находятся не из решения бесконечной не распадающейся системы алгебраических уравнений, а в явном виде, при помощи систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича. Поэтому решение получается точным.

Ключевые слова: полуполоса, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу теории упругости в полуполосе $\Pi : x \geq 0, |y| \leq 1$:

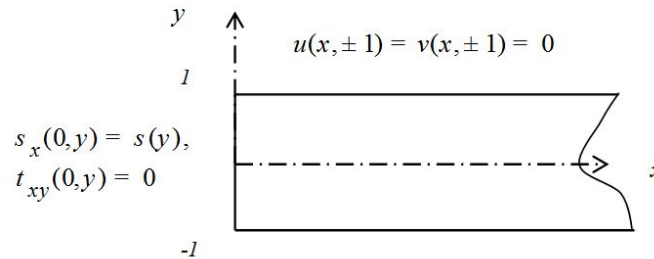


Рис. 1. Заштыленная полуполоса

Будем считать, что на длинных сторонах полуполосы $y = \pm 1$ продольные $u(x, y)$ и поперечные $v(x, y)$ перемещения равны нулю, т. е.

$$u(x, \pm 1) = v(x, \pm 1) = 0, \quad (1.1)$$

а на торце $x = 0$ заданы нормальные и касательные напряжения (рис. 1)

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \quad (1.2)$$

Поступила 10.11.2014

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (код проекта 08-13-00118).

Удовлетворим граничным условиям (1.1) с помощью соотношений метода начальных функций [1]:

$$\begin{cases} L_{UU}(1)U_0(x) + L_{UY}(1)Y_0(x) = 0 \\ L_{VU}(1)U_0(x) + L_{VY}(1)Y_0(x) = 0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

где $L_{UU}(1), L_{UY}(1), \dots$ – соответствующие операторы метода начальных функций, определенные при $y = 1$. Вводя разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$U_0(x) = L_{UY}(1)F(x), \quad Y_0(x) = -L_{UU}(1)F(x), \quad (1.4)$$

тождественно удовлетворим первому уравнению (1.3), а второе примет такой вид:

$$(L_{VU}(1)L_{UY}(1) - L_{VY}(1)L_{UU}(1))F(x) = 0. \quad (1.5)$$

Раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим

$$\frac{(3 - \nu) \sin 2\alpha}{8\alpha} - \frac{1 + \nu}{4} = 0. \quad (1.6)$$

Разыскивая решение обыкновенного дифференциального уравнения бесконечного порядка (1.5) в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}, \quad (1.7)$$

получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$L(\lambda) = \frac{(3 - \nu) \sin 2\lambda}{8\lambda} - \frac{1 + \nu}{4} = 0. \quad (1.8)$$

Оно имеет два вещественных корня $\pm\lambda_1$ и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=2}^{\infty} = \Lambda$. В таблице 1 для иллюстрации приведены значения первых 5 корней уравнения (1.8), у которых $Re\lambda_k < 0$.

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k = c_k$	$Im\lambda_k = b_k$
1	-0.947747133516995	0
2	-3.79089897751953	-1.02335732321128
3	-6.97383851621760	-1.32418968179723
4	-10.13593380316843	-1.508955002915726
5	-13.29009003306721	-1.643198413758431

Тогда функция $F(x)$ имеет такой вид:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k x}, \quad (1.9)$$

где $a_k (k \geq 1)$ – неизвестные коэффициенты разложений, причем, $Ima_1 = 0$. Подставляя функцию $F(x)$ в формулы (1.4), найдем начальные функции, а затем, в соответствии с зависимостями метода начальных функций, – все перемещения и напряжения.

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \xi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},$$

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \chi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},$$

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \quad (1.10)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_y(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}.$$

Функции Фадля – Папковича $\xi(\lambda_k, y)$, $\chi(\lambda_k, y)$ и т.д. имеют такой вид:

$$\xi(\lambda_k, y) = -\frac{1}{4}(1 + \nu)(\sin \lambda_k \cos \lambda_k y - y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y)$$

$$\chi(\lambda_k, y) = \left[\frac{\nu + 1}{4} \sin \lambda_k + \frac{\nu - 3}{4\lambda_k} \cos \lambda_k \right] \sin \lambda_k y + \frac{\nu + 1}{4} y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y,$$

$$s_x(\lambda_k, y) = \left[-\nu \cos \lambda_k - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \cos \lambda_k y + \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \quad (1.11)$$

$$s_y(\lambda_k, y) = \left[\frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k - \cos \lambda_k \right] \cos \lambda_k y - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y,$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = \left[\frac{\nu - 1}{2} \cos \lambda_k + \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \sin \lambda_k y + \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y.$$

2. Построение систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича

Удовлетворим с помощью выражений (1.10) граничным условиям на торце полуполосы (1.2), полагая, что касательные напряжения равны нулю. В результате получим систему из двух функциональных уравнений, из которых должны быть определены неизвестные коэффициенты разложений $\{a_k, \overline{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y), \\ 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Искомые коэффициенты разложений определяются отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций. Общая схема решения краевых задач в полуполосе следующая. Вначале изучаются разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича. К ней строится биортогональная система функций, с помощью которой находятся коэффициенты разложений. Полученные так разложения одной функции называются разложениями Лагранжа. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений в тригонометрические ряды Фурье и играют такую же роль при определении коэффициентов разложений, какую ряды Фурье играют в решениях Файлона и Рибьера. В краевых разложениях двух функций, в отличие от разложения Лагранжа одной функции, нужно найти такой набор коэффициентов $\{a_k, \overline{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$, который был бы общим для этих двух разложений. Недостающий необходимый произвол при этом обеспечивается существованием чисто мнимых векторов, входящих в состав разложений по функциям Фадля – Папковича. Так как их проекции на вещественное направление равны нулю, то эти разложения называются нуль-рядами. В окончательных выражениях для напряжений и перемещений в полуполосе нуль-ряды нужно выделять, приводя тем самым формулы к разложениям Лагранжа. В классических решениях Файлона – Рибьера тригонометрические системы функций двукратно полны, что обеспечивает необходимый произвол в этом случае. Нуль-рядов здесь нет, т.к. базисные

функции вещественны. Поэтому ситуация оказывается тривиальной: удовлетворяя заданным на торце полуполосы нормальным напряжениям, получим равенство, содержащее два набора (для каждого номера $k = 1, 2, \dots$) неизвестных коэффициентов разложений. Второе граничное условие (для касательных напряжений) фактически позволяет установить связь между каждой парой неизвестных коэффициентов.

Биортогональные системы функций $U_k(y)$, $T_k(y)$ и т.д. находятся как решения функциональных уравнений

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda, y) U_k(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy = \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda, y) V_k(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\lambda, y) Y_k(y) dy &= \frac{\lambda^4 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\xi(\lambda, y)$, $\chi(\lambda, y)$ и т.д. – функции, порождающие соответствующие функции Фадля – Папковича.

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (2.2) получаются соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T \chi(\lambda_m, t) V_k(t) dt &= \int_T s_x(\lambda_m, t) X_k(t) dt = \begin{cases} N_k & (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \\ \int_T \xi(\lambda_m, t) U_k(t) dy &= \int_T t_{xy}(\lambda_m, t) T_k(t) dy = \begin{cases} \lambda_k N_k & (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \\ \int_T s_y(\lambda_m, t) Y_k(t) dt &= \begin{cases} \lambda_k^2 N_k & (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$N_k = \lambda_k L'(\lambda_k)/2.$$

$L'(\lambda_k)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_k$. Для комплексных значений λ прямая интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (2.2) заменяется T -образным контуром, лежащим в плоскости $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ (подробнее об этом в статье [2]).

Из уравнений (2.2) также вытекают такие равенства, справедливые при всех $\overline{\lambda_m}$:

$$\begin{aligned} \int_T \xi(\overline{\lambda_m}, t) U_k(t) dt &= \int_T \xi(\lambda_m, t) \overline{U_k(t)} dt = 0, \\ \int_T \chi(\overline{\lambda_m}, t) V_k(t) dt &= \int_T \chi(\lambda_m, t) \overline{V_k(t)} dt = 0, \\ \int_T s_x(\overline{\lambda_m}, t) X_k(t) dt &= \int_T s_x(\lambda_m, t) \overline{X_k(t)} dt = 0, \\ \int_T t_{xy}(\overline{\lambda_m}, t) T_k(t) dt &= \int_T t_{xy}(\lambda_m, t) \overline{T_k(t)} dt = 0, \\ \int_T s_y(\overline{\lambda_m}, t) Y_k(t) dt &= \int_T s_y(\lambda_m, t) \overline{Y_k(t)} dt = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Элементы $U_k(y)$, $V_k(y)$, $X_k(y)$, $T_k(y)$ и $Y_k(y)$ биортогональных систем функций можно представить в виде сумм финитных, равных нулю вне отрезка $|y| \leq 1$, и нефинитных частей. Причем, нечетные и четные нефинитные части ортогональны соответственно функциям $\{\sin q_m y\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos q_m y\}_{m=1}^{\infty}$, $q_m = (2m-1)\pi/2$. При решении краевых задач, как правило, используются финитные части биортогональных функций, поэтому важно знать их явное представление. Покажем, как строятся финитные части на двух примерах. Построим вначале функцию $x_k(y)$ – финитную часть биортогональной функции $X_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$). Полагая в соотношении биортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (2.5)$$

$\lambda = q_m$ и учитывая, что все $\cos q_m y$ ортогональны нефинитным частям функций $X_k(y)$, получим

$$\int_{-1}^1 s_x(q_m, y) x_k(y) dy = \frac{q_m^2 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2} \quad (2.6)$$

или

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) x_k(y) dy = -\frac{(-1)^m q_m}{2(q_m^2 - \lambda_k^2)}. \quad (2.7)$$

Но

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy = -\frac{2(-1)^m q_m \cos \lambda_k}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (2.8)$$

Сравнивая (2.7), (2.8), заключаем, что

$$x_k(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k}. \quad (2.9)$$

Построим функцию $t_k(y)$ – финитную часть функции $T_k(y)$. Полагая в соответствующем равенстве (2.2) $\lambda = q_m$, получим

$$\int_{-1}^1 t_{xy}(q_m, y) t_k(y) dy = \frac{q_m^3 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2} \quad (2.10)$$

или

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) t_k(y) dy = \frac{(-1)^m}{2} \left(1 + \frac{\lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2}\right). \quad (2.11)$$

Учитывая, что

$$-\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sin(q_m y) \frac{\lambda_k \sin(\lambda_k y)}{\cos \lambda_k} dy = \frac{(-1)^m \lambda_k^2}{2(q_m^2 - \lambda_k^2)},$$

$$-\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sin(q_m y) [\delta(y-1) - \delta(y+1)] dy = \frac{(-1)^m}{2} \quad (2.12)$$

и сравнивая (2.12) с (2.11), находим

$$t_k(y) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_k \sin \lambda_k y}{\cos \lambda_k} + [\delta(y-1) - \delta(y+1)] \right) \quad (2.13)$$

где δ – дельта функция. Заметим, что $t_k(y) = x'_k(y)$

Из формулы (2.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (2.14)$$

разлагая функции, стоящие в левой и правой частях равенства (2.14), в ряды по степеням λ и полагая $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\nu) X_k(y) dy = 0, \quad (2.15)$$

т. е. все функции $X_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots$) ортогональны к $(-\nu)$. В силу этого, ряды по системе функций $\{s_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$, в общем, будут отличаться от раскладываемой функции на некоторую постоянную, за исключением случая, когда функция $\sigma(y)$ самоуравновешена. Приняв в формуле (2.14) $\lambda_k = 0$ при $\lambda_k \rightarrow 0$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\nu) X_0(y) dy = \frac{1-\nu}{2}. \quad (2.16)$$

Финитную часть функции $X_0(y)$ найдем, воспользовавшись по прежнему уравнением (2.14), в котором примем $\lambda_k = 0$, $\lambda = q_m$. Тогда вместо (2.14) получим такое уравнение:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+\nu)}{2} q_m (-1)^m \cos(q_m y) x_0(y) dy = -\frac{(1+\nu)}{4}. \quad (2.17)$$

Откуда видно, что

$$x_0(y) = \frac{1}{4}. \quad (2.18)$$

3. Решение краевой задачи. Схема определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 1, 2, \dots$) из разложений (2.1) следующая. Продолжим равенства (2.1) на всю вещественную ось следующим образом: функции, стоящие справа – аналитически, а функции стоящие слева – периодически с периодом, равным 4. После этого спроектируем их на вещественные подпространства: первое на $X_m(y) + \overline{X_m(y)}$, второе – на $T_m(y) + \overline{T_m(y)}$, и рассмотрим интегралы

$$\int_T s_x(\lambda_k, t) [X_m(t) + \overline{X_m(t)}] dt, \quad \int_T t_{xy}(\lambda_k, t) [T_m(t) + \overline{T_m(t)}] dt \quad (3.1)$$

$$\int_T s_x(\bar{\lambda}_k, t) [X_m(t) + \overline{X_m(t)}] dt, \quad \int_T t_{xy}(\bar{\lambda}_k, t) [T_m(t) + \overline{T_m(t)}] dt \quad (3.2)$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(y) \left[X_m(y) + \overline{X_m(y)} \right] dy \quad (3.3)$$

В последнем интеграле $\sigma(y)$ – периодическая функция, которую можно представить тригонометрическим рядом по системе функций $\cos q_m y$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Но эти функции, как было сказано выше, ортогональны к нефинитным частям функций $X_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots$). Поэтому вместо (3.3) получим

$$\sigma_m^* = \int_{-1}^1 \sigma(t) \left[x_m(t) + \overline{x_m(t)} \right] dt = \sigma_m + \overline{\sigma_m}. \quad (3.4)$$

Учитывая соотношения биортогональности (2.3) и (2.4), в результате получим следующую систему из двух алгебраических уравнений ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} \sigma_k^* = a_k N_k + \overline{a_k} \overline{N_k}, \\ \tau_k^* = a_k N_k \lambda_k + \overline{a_k} \overline{N_k} \lambda_k. \end{cases} \quad (3.5)$$

Решая ее, найдем

$$a_k = \frac{\sigma_k^* \overline{\lambda_k}}{(\lambda_k - \overline{\lambda_k}) N_k}. \quad (3.6)$$

Подставляя эти выражения в формулы (1.10) и избавляясь в них от нуль-рядов (разложений чисто мнимых функций) так, как это сделано в статье [2], получим искомые выражения для напряжений и перемещений в полуполосе ($c_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $b_k = \operatorname{Im} \lambda_k$):

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{\xi(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1 \lambda_1} \sigma_1 c_1 (1 + c_1 x) + \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{\xi_{xy}(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k \lambda_k} \sigma_k \overline{\lambda_k} \left(\cos(b_k x) + c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) \right] \right], \\ V(x, y) &= \frac{\chi(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1} \sigma_1 (1 - c_1 x) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{\chi(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k} \sigma_k \left(\cos(b_k x) - c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) \right] \right], \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{s_x(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1} \sigma_1 (1 - c_1 x) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_x(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k} \sigma_k \left(\cos(b_k x) - c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) \right] \right], \\ \sigma_y(x, y) &= -\frac{s_y(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1 \lambda_1^2} \sigma_1 (1 - c_1 x) c_1^2 + \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_y(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k \lambda_k^2} \sigma_k (\lambda_k \overline{\lambda_k}) \left(\cos(b_k x) + c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) \right] \right], \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{t_{xy}(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1 \lambda_1} \sigma_1 c_1^2 x - \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{t_{xy}(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k \lambda_k} \sigma_k (\lambda_k \overline{\lambda_k}) \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right] \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

Слагаемые, стоящие перед знаками суммирования, отвечают отрицательному вещественному корню. Они получаются из соответствующих представлений, стоящих внутри сумм при $b_k \rightarrow 0$.

Рассмотрим пример. Пусть на торце полуполосы нормальные напряжения представлены ступенчатой самоуравновешенной функцией

$$\sigma(y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & |y| \leq d \\ -\frac{1}{2d} & 2d \geq |y| > d \\ 0 & 2d < |y| \leq 1 \quad (0 < d < 1). \end{cases} \quad (3.8)$$

Тогда

$$\sigma_k = \frac{2}{2d} \int_0^d \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k} dy - \frac{2}{2d} \int_d^{2d} \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k} dy = \frac{2 \sin d \lambda_k - \sin 2d \lambda_k}{4d \lambda_k \cos \lambda_k}. \quad (3.9)$$

Подставляя числа (3.9) в формулы (3.7), получим полное решение краевой задачи. Ниже оно проиллюстрировано графиками распределения напряжений (рис. 2), а также продольных и поперечных перемещений (рис. 3) на торце полуполосы и в сечении $x = 0.02$ (рис. 4, 5). На рис. 6 показано поведение напряжений в заделке.

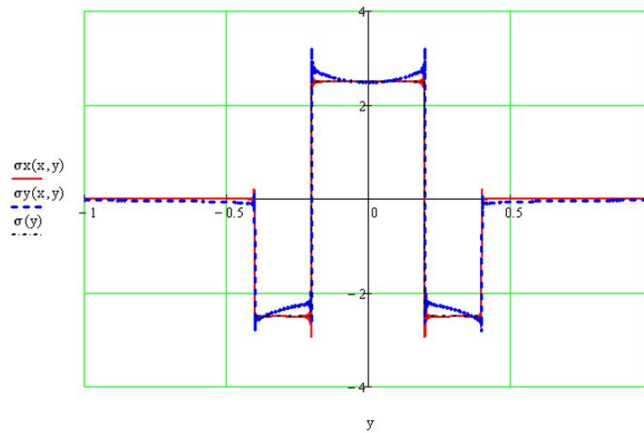


Рис. 2. Напряжения и раскладываемая функция на торце полуполосы

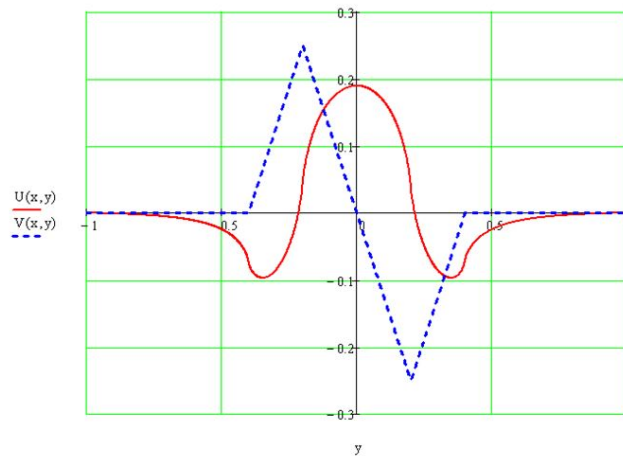


Рис. 3. Распределение продольных и поперечных перемещений на торце полуполосы

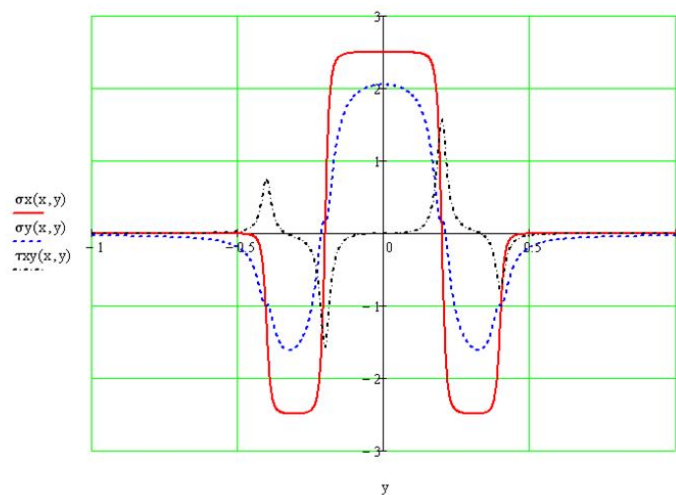


Рис. 4. Распределение напряжений в сечении $x = 0.02$

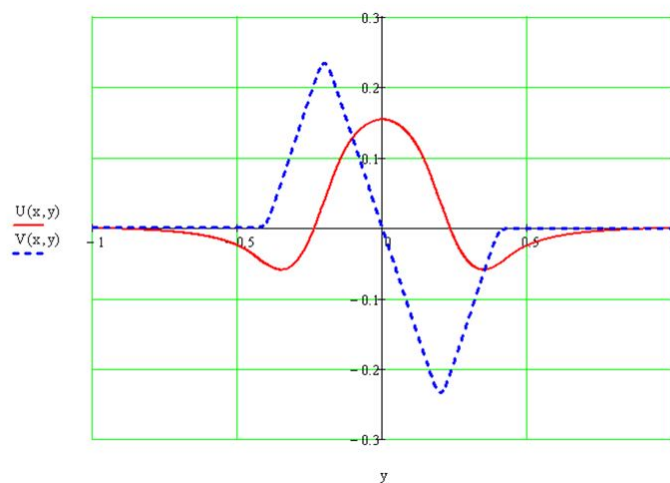


Рис. 5. Распределение перемещений сечения $x = 0.02$

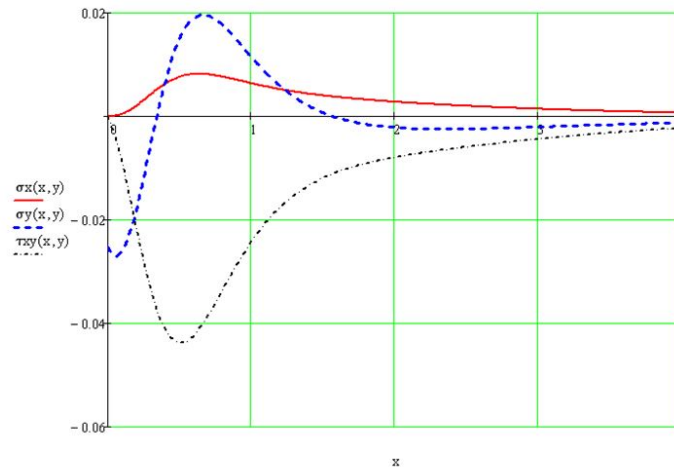


Рис. 6. Распределение напряжений в заделке

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
 [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МГТ. – 2011. – № 5. – С. 78–98.

Коваленко Михаил Денисович,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: kov08@inbox.ru

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ligalas5@mail.ru

A. V. Nikitin, M. D. Kovalenko

**SEMI-STRIP BEND WITH THE FREE LONGITUDINAL EDGES AT WHICH
END FACE THE MOMENT OF DEFLECTION AND THE GENERALIZED
TRANSVERSAL FORCE ARE SET. PRECISE SOLUTION OF A BOUNDARY
VALUE PROBLEM**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The well known boundary value problem for the semi-strip, the long sides of which are fixed, i.e. displacement is equal to zero. And at the end face the normal strain given. In the present paper we give an exact solution of the problem. It is constructed in the form of expansions on the Fadde – Papkovich functions. However, the expansions coefficients are not the solution of the infinite algebraic equations system. We determine them using the biorthogonal systems of functions. Therefore, the solutions are exact.

Keywords: semi-strip, Fadde – Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] Vlasov, V. V. Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
[2] Kovalenko, M. D. Decomposition on Faddeya – Papkovich’s functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.

Kovalenko, Mikhail Denisovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Nikitin, Andrey Vitalevich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

В. Н. Орлов, С. А. Иванов

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В статье приводится доказательство теоремы существования решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с полиномиальной правой частью четвертой степени и получена структура его аналитического приближенного решения в области аналитичности. В доказательстве теоремы существования применен метод мажорант не к правой части дифференциального уравнения, как это делается в классической литературе, а к решению рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, подвижная особая точка, аналитическое приближенное решение.

УДК: 517.928.4

Введение. Многие задачи из разных областей приводят к решению нелинейных дифференциальных уравнений, в частности к дифференциальному уравнению Риккати приводит задача построения оптимальных фильтров Кальмана – Бьюси [1], [2]. В последнее время решение задач в экономике приводит не только к скалярным [3], но и матричным дифференциальным уравнениям Риккати [4]. Ряд задач теории эволюционных процессов [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] приводят к уравнениям Пенлеве, задача нелинейной оптики для описания сверхизлучательной лавины [13] приводит к уравнению Абеля. Перечисленные виды нелинейных дифференциальных уравнений относятся к категории неразрешимых в общем случае в квадратурах, так как обладают подвижными особыми точками. Следует отметить частные случаи разрешимости в квадратурах таких уравнений, развиваемые Белорусской школой аналитической теории дифференциальных уравнений [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24]. На данный момент в работах [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37] предлагается приближенный аналитический метод для решения такой категории дифференциальных уравнений, состоящей из следующих задач:

1. Доказательство теоремы существования решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности.
2. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности.
3. Исследование влияния возмущения исходных данных на приближенное решение в области аналитичности.
4. Доказательство теоремы существования решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки.

5. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки.

6. Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение.

7. Получение точных границ области применения приближенного решения в окрестности подвижной особой точки.

8. Получение точных критериев существования подвижных особых точек решения нелинейного дифференциального уравнения.

9. Разработка алгоритма и программы вычисления координат подвижной особой точки решения нелинейного дифференциального уравнения.

В данной работе предлагается решение первых двух задач из перечисленного списка, основанное на известных фактах и методах аналитической теории дифференциальных уравнений, математического анализа и вычислительной математики.

Выбор рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения связан с тем, что оно является одной из основ для более сложных нелинейных дифференциальных уравнений. Имея возможность приближенно решать рассматриваемое уравнение, мы получим возможность решать более сложные нелинейные дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение

$$y'' = a_0(x)y^4 + a_1(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y + a_4(x).$$

С помощью некоторой замены переменной, при условии

$$-\frac{a_1}{4a_0} = -\frac{2a_2}{3a_1} = -\frac{3a_3}{2a_2},$$

приводится к виду

$$y'' = y^4(x) + r(x).$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$y'' = y^4(x) + r(x), \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases} \quad (2)$$

Теорема. Пусть

1) $r(x) \in C^\infty$ в области:

$$|x - x_0| < \rho_1,$$

где $\rho_1 = \text{const}$;

2) $\left| \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} \right| \leq M_1$,

где $M_1 = \text{const}$, $n=0,1,2, \dots$.

Тогда решение задачи Коши является аналитической функцией

$$y(x) = \sum_0^{\infty} C_n(x - x_0)^n \quad (3)$$

в области

$$|x - x_0| < \rho_2,$$

где $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt{(2M)^3 + 1}} \right\}$, $M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, \sup_n \left| \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} \right| \right\}$, $n=0,1,2, \dots$.

Доказательство.

В доказательстве теоремы используется метод мажорант к решению рассматриваемого уравнения, а не к правой части дифференциального уравнения, как это дается в классической литературе [38].

Функцию $r(x)$ в силу условия теоремы можно представить в виде степенного ряда

$$r(x) = \sum_0^{\infty} A_n (x - x_0)^n. \quad (4)$$

Выражения (3), (4) и выражение

$$y''(x) = \sum_2^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2}$$

подставляем в (1):

$$\sum_2^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2} = \sum_0^{\infty} C_n^{**} (x - x_0)^n + \sum_0^{\infty} A_n (x - x_0)^n.$$

Требование тождества в последнем соотношении приводит к равенству коэффициентов при соответствующих степенях переменных.

Таким образом, имеем рекуррентное соотношение для получения коэффициентов C_n

$$(n+1)(n+2)C_{n+2} = C_n^{**} + A_n,$$

где

$$\begin{aligned} C_n^{**} &= \sum_0^n C_i^* \cdot C_{n-i}^*, \\ C_n^* &= \sum_0^n C_i \cdot C_{n-i}, \\ C_0 &= y_0, \\ C_1 &= y_1. \end{aligned}$$

Последнее рекуррентное соотношение позволяет однозначно определить выражения всех коэффициентов C_n .

Обозначим

$$M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, \sup_n \left| \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} \right| \right\}, n=0, 1, 2, \dots$$

и, учитывая закономерность структуры выражений коэффициентов C_n , полученных с помощью программного обеспечения, приходим к следующим гипотезам оценок:

$$\begin{aligned} |C_{2n}| &\leq \frac{M((2M)^3 + 1)^n}{2n(2n-1)}, \\ |C_{2n+1}| &\leq \frac{M((2M)^3 + 1)^n}{2n(2n+1)}. \end{aligned}$$

Докажем справедливость гипотез оценок методом математической индукции для случая четного n :

$$\begin{aligned} |C_{2n}^*| &= \sum_{k=0}^{2n} |C_{2n-k}| \cdot |C_k| \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{M((2M)^3 + 1)^{\lfloor \frac{2n-k}{2} \rfloor}}{(2n-k)(2n-k-1)} \cdot \frac{M((2M)^3 + 1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}{2k(2k-1)} \leq \\ &\leq (2n+1) \frac{M^2((2M)^3 + 1)^n}{2n(2n-1)} \leq \frac{2M^2((2M)^3 + 1)^n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |C_{2n}^{**}| &= \sum_{k=0}^{2n} |C_{2n-k}^*| \cdot |C_k^*| \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{2M^2((2M)^3 + 1)^{\lfloor \frac{2n-k}{2} \rfloor}}{2n-k-1} \cdot \frac{2M^2((2M)^3 + 1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}{k-1} \leq \\ &\leq (2n+1) \frac{4M^4((2M)^3 + 1)^n}{2n-1} \leq 8M^4((2M)^3 + 1)^n. \end{aligned}$$

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$(2n+1)(2n+2)C_{2n+2} = C_{2n}^{**} + A_{2n},$$

откуда

$$\begin{aligned} |C_{2n+2}| &= \frac{|C_{2n}^{**}| + A_{2n}}{(2n+1)(2n+2)} \leq \frac{8M^4((2M)^3 + 1)^n + M}{(2n+1)(2n+2)} \leq \\ &\leq \frac{M((2M)^3((2M)^3 + 1)^n + 1)}{(2n+1)(2n+2)} \leq \frac{M((2M)^3 + 1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем оценку в случае нечетного индекса:

$$|C_{2n+1}| \leq \frac{M((2M)^3 + 1)^n}{2n(2n+1)}.$$

Составим вспомогательный ряд

$$\sum_0^{\infty} V_n(x - x_0)^n,$$

который является мажорирующим для ряда (3).

В нашем случае

$$V_{2n} = \frac{M((2M)^3 + 1)^n}{2n(2n-1)}, V_{2n+1} = \frac{M((2M)^3 + 1)^n}{2n(2n+1)}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_0^{\infty} V_{2n}(x - x_0)^{2n},$$

для которого по признаку Даламбера получаем область сходимости:

$$|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{(2M)^3 + 1}},$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволяет получить структуру приближенного решения в области аналитичности.

Теорема 2. *Для приближенного решения*

$$y_N(x) = \sum_0^N C_n(x - x_0)^n$$

задачи Коши (1)–(2) в области

$$|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{(2M)^3 + 1}}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N \leq \frac{M((2M)^3 + 1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} |x - x_0|^N}{N(N-1)(1 - (2M)^3 + 1)(x - x_0)^2}$$

Доказательство. Из теоремы 1 имеем:

$$\Delta y_N = |y(x) - y_N(x)| = \sum_N^{\infty} |C_n(x - x_0)^n| = R_N(x)$$

Учитывая оценки C_n из теоремы 1, получим

$$\begin{aligned} R_N(x) &= \sum_N^{\infty} |C_n(x - x_0)^n| \leq \sum_N^{\infty} \frac{M((2M)^3 + 1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n(n-1)} |x - x_0|^n \leq \\ &\leq \frac{M((2M)^3 + 1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{N(N-1)} |x - x_0|^N \sum_0^{\infty} ((2M)^3 + 1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |x - x_0|^n. \end{aligned}$$

Ряд в последнем выражении является геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = (2M)^3 + 1)(x - x_0)^2,$$

откуда следует

$$R_N(x) \leq \frac{M((2M)^3 + 1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} |x - x_0|^N}{N(N-1)(1 - (2M)^3 + 1)(x - x_0)^2}.$$

Таким образом, значение $y(x)$ можно приближенно вычислить как сумму первых N слагаемых ряда (3) с точностью $\varepsilon = R_N(x)$.

Пример

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = y^4(x), \\ y(0) = \frac{2}{5}, \\ y'(0) = \left(\frac{2}{5}\right)^3. \end{cases}$$

Точным решением является функция

$$y(x) = \frac{\sqrt[3]{5(6x - 25)^4}}{3(6x - 25)^2}.$$

В данном примере $M = \frac{2}{5}, \rho = \sqrt{\frac{125}{189}}$. Выберем $x_1 = x_0 + \frac{\rho}{2} = \sqrt{\frac{125}{378}}$, которое находится в области представления решения в виде ряда (3). Расчеты приведены в таблице 1.

Таблица 1.

x_1	$y(x_1)$	$y_7(x_1)$	Δy_7	Δy	$\Delta_1 y$
$\sqrt{\frac{125}{378}}$	0,4283420664232419425	0,428342052	0,00008	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-6}$

где $y(x_1)$ – точное решение, $y_7(x_1)$ – приближенное решение, Δy_7 – априорная погрешность, Δy – абсолютная погрешность, $\Delta_1 y$ – апостериорная погрешность.

Апостериорная погрешность $\Delta_1 y$ предполагает в структуре приближенного решения 13 слагаемых. Однако, слагаемые в структуре приближенного решения с 8 по 13, в сумме не превышает 10^{-6} . Заключаем, что приближенное решение $y_7(x_1)$ имеет погрешность 10^{-6} .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Kalman, R.* New results in linear filtering and predication theory / K. Kalman, R. Bucy // J. Basic Engr. (ASME Trans.). – 1961. – Vol. 83D. – P. 95–108.
- [2] *Bucy, R. S.* Optimal Filtering for correlated Noise / R.S. Bucy // J. of Mat. Analysis and Applications. – 1967. – Vol. 20. – No. 1. – P. 1–8.
- [3] *Shi, M.* On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sensitive portfolio optimization problem / M. Shi // Repts Fac. Sci. and Eng. Soga Univ. Math. – 2005. – Vol. 34. – No. 1. – C. 17–24.
- [4] *Lystad, L. P.* The Riccati equation — an economic fundamental equation which describes marginal movement in time / L. P. Lystad, P. O. Nyman, R. Heibakk // Model., Identif. and Contr. – 2006. – Vol. 27. – No. 1. – C. 31–41.
- [5] *Airault, H.* Rational Solutions of Painleve Equations / H. Airault // Studies in applied mathematics. – 1979. – Vol. 61. – No. 1 July. – P. 31–53.
- [6] *Ablowitz, M. I.* Exact linearization of a Painleve transcendent / M. I. Ablowitz, H. Segur // Phys. Rev. Lett. – 1977. – Vol. 38. – No. 20. – P. 1103–1106.
- [7] *Ablowitz, M.* Nonlinear evolutions and ordinary differential equations of Painleve type / M. Ablowitz, A. Romani, H. Segur // Lett. alNuovoCim. – 1978. – Vol. 23. – No. 9. – P. 333–338.
- [8] *Ablowitz, M.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II / M. Ablowitz, A. Romani, H. Segur // J. Mat. Phys. – 1980. – Vol. 21. – P. 715–721, 1006–1015.
- [9] *Сулейманов, Б. И.* Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустик / Б. И. Сулейманов // Зап. науч. семинара ЛОМИ. — 1991. — 187. — С. 110–128.
- [10] *Ockendon, J. R.* Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / J. R. Ockendon // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. – P. 129–145.
- [11] *Axford, R. A.* The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization / R. A. Axford // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee, 1974. P. 1–14.
- [12] *Hill, J. M.* Abel's Differential Equation / J. M. Hill // J. Math. Scientist. – 1982. – Vol. 7. – № 2. – S. 115–125.
- [13] *Чудновский, В. М.* Теория сверхизлучательных лавин радиоволнового диапазона / В. М. Чудновский, Е. Д. Холодкевич // Физика твердого тела. – 1982. – Т. 24. – № 4. – С. 1118–1123.
- [14] *Синявский, М. Т.* Про один численный метод визначення особливих точок інтегралів систем нелинейних дифференціальних рівнянь / М. Т. Синявский // Докл. АН УССР, сер. А. – 1969. – № 7. – С. 597–599.
- [15] *Белов, А. М.* Численная реализация А-метода решения одного класса дифференциальных уравнений Риккати / А. М. Белов, В. И. Биленко, А. И. Кашни ровский // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложение. – 1988. – С. 12–23.
- [16] *Callier, F. M.* Report on a convergence criterion of the solution of the Riccati differential equation / F.M. Callier, J.L. Willems // Circuit Theory and Design : Proc. Eur. Conf., The Hague, 25–28 Aug. 1981. – Amsterdam a.o. – 1981. – P. 526–530.
- [17] *Laub, A.* Schur techniques for Riccati differential equations / A. Laub // J. Lect. Notes and Inf. Sci. – 1982. – Vol. 39. – P. 165–174.
- [18] *Еругин, Н. П.* К теории первого уравнения Пенлеве / Н. П. Еругин // Докл. АН БССР. – 1958. – Т. 2. – № 1. – С. 3–6.
- [19] *Еругин, Н. П.* Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка / Н. П. Еругин // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 3. — С. 387–416.
- [20] *Яблонский, А. И.* Асимптотическое разложение правильных решений некоторых классов дифференциальных уравнений / А. И. Яблонский // Докл. АН БССР. – 1964. – Т. 8. – № 2. – С. 77–80.

- [21] Яблонский, А. И. К вопросу о числе полюсов решения второго уравнения Пенлеве / А. И. Яблонский // Докл. АН БССР. – 1959. – Т. 3. – № 6. – С. 237–238.
- [22] Воробьев, А. П. О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве / А. П. Воробьев // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1. – № 1. – С. 79–81.
- [23] Чичурин, А. В. Уравнение Шазы и линейные уравнения класса Фукса: Монография. 2-е изд., доп. и перераб. / А. В. Чичурин – М. : Изд-во РУДН, 2003. – 163 с.
- [24] Прокопеня, А. Н. Применение системы “Mathematica” к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Н. Прокопеня, А. В. Чичурин. – Мн. : БГУ, 1999. – 265 с.
- [25] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов // Известия ИТА ЧР. – № 4. – 2001. – С. 182–188.
- [26] Орлов, В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Самарского ГУ. Естеств. научная серия. – 2006. – № 6/1(46). – С. 64–69.
- [27] Орлов, В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник МАИ. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.
- [28] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1829–1832.
- [29] Орлов, В. Н. Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. – 1998. – Т. 19. – С. 155–165.
- [30] Орлов, В. Н. Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для уравнения P_1 / В. Н. Орлов // Известия НАНИ ЧР. – 2000. – № 4. – С. 43–49.
- [31] Орлов, В. Н. Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич, А. А. Самодуров // Вестник БГУ. Сер. 1 Физика, математика, информатика. – 2002. – С. 79–85.
- [32] Орлов, В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Известия Тул. ГУ. Сер. Дифф. уравнения и прикладные задачи. – Вып. 1. – Тула : Изд-во Тул. ГУ, 2006. – С. 26–29.
- [33] Орлов, В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.
- [34] Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – № 4 (35). – 2009. – С. 23–32.
- [35] Орлов, В. Н. Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5. – № 10. – С. 192–195.
- [36] Орлов, В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). – С. 399–405.
- [37] Орлов, В. Н. Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, С. А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. – 2010. – № 4(18). – С. 2–6.
- [38] Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 436 с.

Орлов Виктор Николаевич,

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Иванов Сергей Анатольевич,

аспирант кафедры алгебры и геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

V. N. Orlov, S. A. Ivanov

NUMERICAL SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF SEISMIC STABILITY OF LARGE STRUCTURES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The theorem of solving the second-order nonlinear differential equation with polynomial part of the fourth degree is proved and the structure of analytical approximate solution in analyticity region is presented in the article. When proving the theorem the majorant method is applied not to the right side of differential equation, but to the whole solution of differential equation. The results are provided with calculations.

Keywords: nonlinear differential equation, moving singular point, analytical approximate solution.

REFERENCES

- [1] *Kalman, R.* New results in linear filtering and prediction theory / K. Kalman, R. Bucy // J. Basic Engr. (ASME Trans.). — 1961. — Vol. 83D. — P. 95–108.
- [2] *Bucy, R. S.* Optimal Filtering for correlated Noise / R.S. Bucy // J. of Mat. Analysis and Applications. — 1967. — Vol. 20. — N 1. — P. 1–8.
- [3] *Shi, M.* On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sensitive portfolio optimization problem / M. Shi // Repts Fac. Sci. and Eng. Soga Univ. Math. — 2005. — Vol. 34. — N 1. — C. 17–24.
- [4] *Lystad, L. P.* The Riccati equation — an economic fundamental equation which describes marginal movement in time / L.P. Lystad, P.-O. Nyman, R. Heibakk // Model., Identif. and Contr. — 2006. — Vol. 27. — N 1. — C. 31–41.
- [5] *Airault, H.* Rational Solutions of Painleve Equations / H. Airault // Studies in applied mathematics. — 1979. — Vol. 61. — N 1 July. — P. 31–53.
- [6] *Ablowitz, M. I.* Exact linearization of a Painleve transcendent / M. I. Ablowitz, H. Segur // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Vol. 38. — N 20. — P. 1103–1106.
- [7] *Ablowitz, M.* Nonlinear evolutions and ordinary differential equations of Painleve type / M. Ablowitz, A. Romani, H. Segur // Lett. alNuovoCim. — 1978. — Vol. 23, N 9. — P. 333–338.
- [8] *Ablowitz, M.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II / M. Ablowitz, A. Romani, H. Segur // J. Mat. Phys. — 1980. — Vol. 21. — P. 715–721, 1006–1015.
- [9] *Suleymanov, B. I.* The second equation of Painleve in one task about the nonlinear effects near caustics / B. I. Suleymanov // Western scientific a seminar ACHE. — 1991. — Vol. 187. — P. 110–128.
- [10] *Ockendon, J. R.* Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / J. R. Ockendon // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. — P. 129–145.
- [11] *Axford, R. A.* The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization / R. A. Axford // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee, 1974. — P. 1–14.
- [12] *Hill, J. M.* Abel's Differential Equation / J. M. Hill // J. Math. Scientist. — 1982. — Vol. 7. — № 2. — S. 115–125.
- [13] *Chudnovsky, V. M.* Theory of superradiating avalanches of radio wave range / V. M. Chudnovsky, E. D. Holodkevich // Physics of a solid body. — 1982. — Vol. 24. — № 4. — P. 1118–1123.
- [14] *Sinyavsky, M. T.* About one numerical method визначення особливих точок integrals of systems nonlinear differential rivnyan / M. T. Sinyavsky // Reports of AN of USSR, series A. — 1969. — № 7. — P. 597–599.

- [15] *Belov, A. M.* Numerical realization of the A-method of the solution of one class differential equations of Rikkati / A. M. Belov, V. I. Bilenko, A. I. Kashnirovsky // Some questions of the theory of approach of functions and them appendix. — Kiev, 1988. — P. 12–23.
- [16] *Callier, F. M.* Report on a convergence criterion of the solution of the Riccati differential equation / F. M. Callier, J. L. Willems // Circuit Theory and Design : Proc. Eur. Conf., The Hague, 25–28 Aug. 1981. — Amsterdam a.o. — 1981. — P. 526–530.
- [17] *Laub, A.* Schur techniques for Riccati differential equations / A. Laub // J. Lect. Notes and Inf. Sci. — 1982. — Vol. 39. — P. 165–174.
- [18] *Erugin, N. P.* To the theory of the first equation of Painleve / N. P. Erugin // Reports of AN of BSSR. — 1958. — Vol. 2. — № 1. — P. 3–6.
- [19] *Erugin, N. P.* Theory of mobile special points of the equations of the second order / N. P. Erugin // Differential equations. — 1976. — Vol. 12. — № 3. — P. 387–416.
- [20] *Yablonsky, A. I.* Asymptotic decomposition of the correct decisions of some classes of the differential equations / A. I. Yablonsky // Reports of AN of BSSR. — 1964. — Vol. 8. — № 2. — P. 77–80.
- [21] *Yablonsky, A. I.* To a question of number of poles of the solution of the second equation Painleve / A. I. Yablonsky // Reports of AN of BSSR. — 1959. — Vol. 3. — № 6. — P. 237–238.
- [22] *Vorobyov, A. P.* About rational solutions of the second equation of Painleve / A. P. Vorobyov // Differential equations. — 1965. — Vol. 1. — № 1. — P. 79–81.
- [23] *Chichurin, A. V.* Equation of Shazi and linear equations of a class of Fuchs: Monograph. 2nd prod., additional and reslave / A. V. Chichurin. — M. : Publishing house of RUDN, 2003. — 163 p.
- [24] *Prokopenya, A. N.* Use of Mathematica system to the solution of the ordinary differential equations / A. N. Prokopenya, A. V. Chichurin. — Minsk : BSU, 1999. — 265 p.
- [25] *Orlov, V. N.* Research of the approximate decision in the vicinity of a mobile special point for the differential equations of Rikkati / V. N. Orlov // ITA ChR news. — № 4. — 2001. — P. 182–188.
- [26] *Orlov, V. N.* Criteria of existence of mobile special points of solutions of the differential equations of Rikkati / V. N. Orlov // Vestnik Samara State University. Naturally scientific series. — 2006. — № 6/1(46). — P. 64–69.
- [27] *Orlov, V. N.* About one method of the approximate solution of the matrix differential equations of Rikkati / V. N. Orlov // Vestnik MAI. — 2008. — Vol. 15. — № 5. — P. 128–135.
- [28] *Orlov, V. N.* Research of the approximate solution of the second equation of Painleve / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich // Differential equations. — 1989. — Vol. 25. — № 10. — P. 1829–1832.
- [29] *Orlov, V. N.* About one constructive method of construction of the first and second meromorphic transcendental Painleve / V. N. Orlov, V. P. Filchakova // Simetriyni that analitichnimetodi in matematichnyfizitsi. — 1998. — Vol. 19. — P. 155–165.
- [30] *Orlov, V. N.* Creation of the approximate decision in the vicinity of a mobile special point for the equation P_1 / V. N. Orlov // News NANI CHR. — 2000. — № 4. — P. 43–49.
- [31] *Orlov, V. N.* Creation of the approximate decision in the vicinity of a mobile special point for the second equation of Painleve / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich, A. A. Samodurov // Vestnik BSU. Series 1. Physics, mathematics, informatics. — 2002. — P. 79–85.
- [32] *Orlov, V. N.* Criteria of existence of mobile special points of solutions of the second equation of Painleve / V. N. Orlov // News TSU. Series Differential equations and applied tasks. — 2006. — Issue 1. — P. 26–29.
- [33] *Orlov, V. N.* About the approximate solution of the first equation of Painleve / V. N. Orlov // Vestnik A. Tupoleva KSTU. — 2008. — № 2. — P. 42–46.
- [34] *Orlov, V. N.* Research of the approximate solution of the differential equation of Abel in the vicinity of a mobile special point / V. N. Orlov // Vestnik N. Bauman MSTU. Series Natural sciences. — 2009. — № 4 (35). — P. 23–32.

[35] *Orlov, V. N.* Exact borders of a scope of the approximate solution of the differential equation of Abel in the vicinity of approximate value of a mobile special point / V. N. Orlov // Vestnik Voronezh State Technical University. – 2009. – Vol. 5. – № 10. – P. 192–195.

[36] *Orlov, V. N.* Exact borders for the approximate solution of the differential equation of Abel in the vicinity of approximate value of a mobile special point in complex area / V. N. Orlov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2(8). – P. 399–405.

[37] *Orlov, V. N.* Mathematical modeling of the solution of the differential equation of Abel in the vicinity of a mobile special point / V. N. Orlov, S. A. Redkozubov // News of institute of engineering physics. – 2010. – № 4(18). – P. 2–6.

[38] *Golubev, V. V.* Lectures on the analytical theory of the differential equations / V. V. Golubev. – M. ; L. : Gostekhizdat, 1950. – 436 p.

Orlov, Victor Nikolayevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Algebra & Geometry Department, Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Ivanov, Sergey Anatolyevich

Postgraduate Student of Algebra & Geometry Department, Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

ПРИМЕРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНО СИММЕТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПОЛОСЕ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Проблеме решения бигармонического уравнения в конечных канонических областях с угловыми точками границы (бигармоническая проблема) почти 200 лет (см. обзор [3]). В теории упругости она обычно формулируется в простейшей постановке следующим образом: найти решение бигармонического уравнения в прямоугольной полуполосе, продольные стороны которой не нагружены, а на торце заданы нормальное и касательное напряжения. Если решение для полуполосы построено, то решение для прямоугольника уже не представляет труда получить. В серии публикаций, подытоженных статьей [13], была развита общая теория, дана схема решения задачи в полуполосе и рассмотрены различные примеры. Но только для симметричной деформации полуполосы. В этой работе даются примеры решения обратнo-симметричной задачи для полуполосы. Продольные стороны полуполосы свободны, а на торце заданы нормальные и касательные напряжения. Решение представляется в виде явных разложений по функциям Фадля – Папковича, коэффициенты которых определяются как интегралы Фурье от заданных на торце полуполосы граничных функций. Работа базируется на статье [13] и на статье [18], в которых даны соотношения биортогональности и разложения Лагранжа для обратнo симметричной задачи.

Ключевые слова: полуполоса, краевая задача, функции Фадля – Папковича, точные аналитические решения, обратнo симметричная задача.

УДК: 539.3

Материал и методика исследований. Рассмотрим решение первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе $\{ \Pi : x \geq 0, |y| \leq 1 \}$, у которой продольные стороны $y = \pm 1$ не нагружены, т. е. напряжения (рис.1)

$$\sigma_y(y, \pm 1) = \tau_{xy}(y, \pm 1) = 0, \quad (1)$$

а на торцах заданы нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \quad (2)$$

Поступила 10.11.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-31-50033 мол_нр).

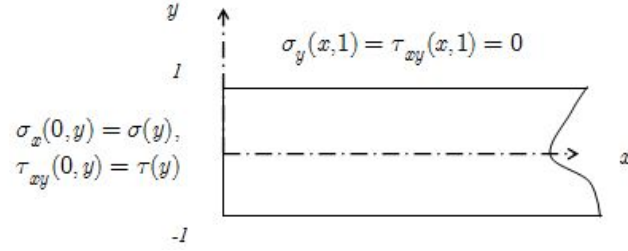


Рис. 1

При построении решения будем пользоваться методом начальных функций [2], в соответствии с которым все перемещения и напряжения в полуполосе находятся по формулам:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= L_{UU}(y)U_0(x) + L_{UV}(y)V_0(x) + L_{UY}(y)Y_0(x) + L_{UX}(y)X_0(x), \\
 V(x, y) &= L_{VU}(y)U_0(x) + L_{VV}(y)V_0(x) + L_{VY}(y)Y_0(x) + L_{VX}(y)X_0(x), \\
 Y(x, y) &= L_{YU}(y)U_0(x) + L_{YV}(y)V_0(x) + L_{YY}(y)Y_0(x) + L_{YX}(y)X_0(x), \\
 X(x, y) &= L_{XU}(y)U_0(x) + L_{XV}(y)V_0(x) + L_{XY}(y)Y_0(x) + L_{XX}(y)X_0(x),
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\sigma_x(x, y) = L_{XU}(y)U_0(x) + L_{XV}(y)V_0(x) + L_{XY}(y)Y_0(x) + L_{XX}(y)X_0(x),$$

в которых используются принятые в методе начальных функций следующие обозначения: $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, $Y(x, y) = \sigma_y(x, y)$, $X(x, y) = \tau_{xy}(x, y)$. Здесь G – модуль сдвига, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения. Через $U_0(x)$, $V_0(x)$, ... обозначены начальные функции, а через $L_{UU}(y)$, и т. д. – операторы метода начальных функций:

$$\begin{aligned}
 L_{UU}(\alpha, y) &= L_{XX}(\alpha, y) = \cos \alpha y - \frac{1 + \nu}{2} \alpha y \sin \alpha y, \\
 L_{UV}(\alpha, y) &= L_{YX}(\alpha, y) = -\frac{1}{2} [(1 - \nu) \sin \alpha y + (1 + \nu) \alpha y \cos \alpha y], \\
 L_{UY}(\alpha, y) &= L_{VX}(\alpha, y) = -\frac{1 + \nu}{4} y \sin \alpha y, \\
 L_{UX}(\alpha, y) &= \frac{1}{4} \left[\frac{3 - \nu}{\alpha} \sin \alpha y + (1 + \nu) y \cos \alpha y \right], \\
 L_{VU}(\alpha, y) &= L_{XY}(\alpha, y) = \frac{1}{2} [(1 - \nu) \sin \alpha y - (1 + \nu) \alpha y \cos \alpha y], \\
 L_{VV}(\alpha, y) &= L_{YY}(\alpha, y) = \frac{1}{2} (1 + \nu) \alpha y \sin \alpha y + \cos \alpha y, \\
 L_{YU}(\alpha, y) &= L_{XU}(\alpha, y) = (1 + \nu) \alpha^2 y \sin \alpha y, \\
 L_{YV}(\alpha, y) &= (1 + \nu) \alpha (\alpha y \cos \alpha y - \sin \alpha y), \\
 L_{XU}(\alpha, y) &= -(1 + \nu) \alpha (\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y),
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$A_U(\alpha, y) = (1 + \nu)\alpha(2 \cos \alpha y - \alpha y \sin \alpha y),$$

$$A_V(\alpha, y) = -(1 + \nu)\alpha(\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y),$$

$$A_Y(\alpha, y) = \nu \cos \alpha y - \frac{1}{2}(1 + \nu)\alpha y \sin \alpha y,$$

$$A_X(\alpha, y) = \frac{1}{2} [(1 + \nu)\alpha y \cos \alpha y + (3 + \nu) \sin \alpha y],$$

в которых $\alpha = \partial/\partial x$ [2].

В силу обратной симметрии задаचितные начальные функции $U_0(x) = Y_0(x) = 0$. Удовлетворяя с помощью зависимостей (3) граничным условиям (1), получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций $V_0(x)$, $X_0(x)$:

$$\begin{cases} L_{YV}(1)V_0(x) + L_{YX}(1)X_0(x) = 0, \\ L_{XV}(1)V_0(x) + L_{XX}(1)X_0(x) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Если ввести разрешающую функцию $F(x)$ по формулам:

$$V_0 = L_{YX}(1)F(x), \quad X_0 = -L_{YV}(1)F(x), \quad (6)$$

то тем самым первое уравнение (5) будет тождественно удовлетворено, а из второго, раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим

$$-(1 + \nu)\alpha(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)F(x) = 0. \quad (7)$$

Разыскивая решение его решение в виде $F(x) = e^{\lambda x}$, получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$-(1 + \nu) \lambda(\lambda - \sin \lambda \cos \lambda) = 0, \quad (8)$$

которое имеет четыре нулевых корня и бесконечное множество комплексно-сопряженных корней $\{\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Следовательно, невозрастающая на бесконечности часть решения представима в виде

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k = 1 \quad (9)$$

(решение сопротивления материалов, отвечающее нулевым корням, можно считать известным и оно не рассматриваются).

Подставляя (9) в (6), найдем начальные функции, а затем по формулам (3) все перемещения и напряжения:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \quad x < 0, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}.$$

Функции $\xi(\lambda_k, y)$, $\chi(\lambda_k, y)$, $s_x(\lambda_k, y)$, $s_y(\lambda_k, y)$, $t_{xy}(\lambda_k, y)$, входящие в эти формулы, называются функциями Фадля – Папковича. Они таковы, что граничные условия по продольным сторонам полуполосы удовлетворяются автоматически, поскольку для всех $k = 1, 2, \dots$ $\sigma_y(\lambda_k, \pm 1) = \tau_{xy}(\lambda_k, \pm 1) = 0$. Входящие сюда функции Фадля – Папковича имеют вид

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_k, y) &= \left(\sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\ \chi(\lambda_k, y) &= - \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \end{aligned} \quad (11)$$

$$s_x(\lambda_k, y) = (1+\nu) \lambda_k ((2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y),$$

$$s_y(\lambda_k, y) = (1+\nu) \lambda_k^2 (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y),$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = (1+\nu) \lambda_k ((\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y).$$

Удовлетворим граничным условиям на торце полуполосы (2) с помощью соответствующих выражений (3). В результате приходим к задаче определения коэффициентов $\{a_k, \overline{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$ из разложений:

$$\begin{cases} \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y), \\ \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y). \end{cases} \quad (12)$$

Коэффициенты a_k и $\overline{a_k}$ определяются отсюда в явном виде с помощью систем функций $\{X_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{T_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$, биортогональных к функциям Фадля – Папковича $\{s_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{t_{xy}(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно. Эти функции находятся, как решения функциональных уравнений ($m \geq 1$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_m(y) dy = \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_m(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)}. \quad (13)$$

Здесь $s_x(\lambda, y)$ и $t_{xy}(\lambda, y)$ – порождающие функции. Они получаются из соответствующих функций Фадля – Папковича (11) заменой λ_k на некоторый параметр $\lambda \in \mathbb{C}$. Функция

$$L(\lambda) = \lambda - \sin \lambda \cos \lambda \quad (14)$$

целая, экспоненциального типа, равно 2 [4]. Для комплексных значений λ прямую интегрирования в формулах (13) нужно заменить T -образным контуром, лежащим в плоскости $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [5].

Принимая в формулах (13) $\lambda = \lambda_k$, получим такие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T s_x(\lambda_k, y) X_m(y) dy &= \begin{cases} L'(\lambda_m)/2\lambda_m & (\lambda_k = \lambda_m); \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m), \end{cases} \\ \int_T t_{xy}(\lambda_k, y) T_m(y) dy &= \begin{cases} L'(\lambda_m)/2 & (\lambda_k = \lambda_m); \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m), \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

где $L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_m$. Из формул (13) также получаем следующие равенства, справедливые при всех $m, k \geq 1$:

$$\int_T s_x(\bar{\lambda}_k, y) X_m(y) dy = \int_T s_x(\lambda_k, y) \overline{X_m(y)} dy = 0,$$

$$\int_T t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) T_m(y) dy = \int_T t_{xy}(\lambda_k, y) \overline{T_m(y)} dy = 0.$$

Функции $X_m(y)$ и $T_m(y)$ можно представить в виде суммы финитных $x_m(y)$ и $t_m(y)$, т. е. не равных нулю на отрезке $|y| \leq 1$, и не финитных частей. При решении краевых задач, как правило, используются финитные части биортогональных функций. Окончательные формулы для них (они строятся так же, как и для симметричной задачи [2]) имеют такой вид

$$x_m(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_m^2} \left(\frac{\sin \lambda_m y}{\sin \lambda_m} - y \right), \quad t_m(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_m} \frac{\cos \lambda_m y}{\sin \lambda_m}. \quad (16)$$

Схема определения коэффициентов a_k из разложений (12) для симметричной задачи подробно описана в статье [18]. Для обратно симметричной задачи она остается той же. Поэтому приведем сразу формулы для напряжений и перемещений в полуполосе, разделяя два случая: а) когда на торце заданы ненулевые нормальные напряжения, а касательные равны нулю и б) когда на торце заданы ненулевые касательные напряжения, а нормальные равны нулю ($c_k = Re\lambda_k < 0$, $b_k = Im\lambda_k$).

$$\begin{aligned} a) \quad U(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{M_k \lambda_k^2} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Другая форма представления формул(17) более общая, хотя и менее наглядная:

$$\begin{aligned} a) \quad U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{Im(-e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{M_k \lambda_k^2} \frac{Im(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{Im(-e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{Im(-e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}.$$

Здесь числа

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) x_k(y) dy, \quad M_k = \sin^2 \lambda_k / \lambda_k. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} b) \quad U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \left(2c_k \cos b_k x + \frac{c_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin b_k x \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \tau_k &= \int_{-1}^1 \tau(y) t_k(y) dy \end{aligned} \quad (21)$$

или

$$\begin{aligned} b) \quad U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \frac{Im(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим пример, когда на торце полуполосы заданы самоуравновешенные касательные напряжения

$$\tau(y) = \text{sign}(y) \sin(2\pi y). \quad (23)$$

По формуле (21) найдем

$$\tau_k = \frac{2\pi(\cos \lambda_k - 1)}{(\nu + 1)\lambda_k \sin \lambda_k (\lambda_k^2 - 4\pi^2)}. \quad (24)$$

Подставляя числа (24) в формулы (20), получим решение задачи. На рис.2 показано распределение напряжений в сечении $x = 0.02$, где кривые распределения нормальных и касательных напряжений обозначены как $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ и $\tau_{xy}(x, y)$ на торце полуполосы, обозначенные как $sx(x, y)$, $sy(x, y)$ и $txy(x, y)$ соответственно.

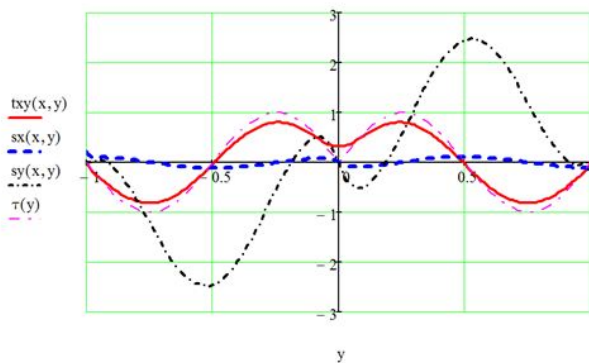


Рис. 2

Приведем еще один пример, когда на торце полуполосы в начале координат приложена изгибающая сосредоточенная сила интенсивности, равная 1. Сила приложена по касательной к торцу и направлена вниз. Ниже изображен график для данного случая в сечении $x = 0.02$.

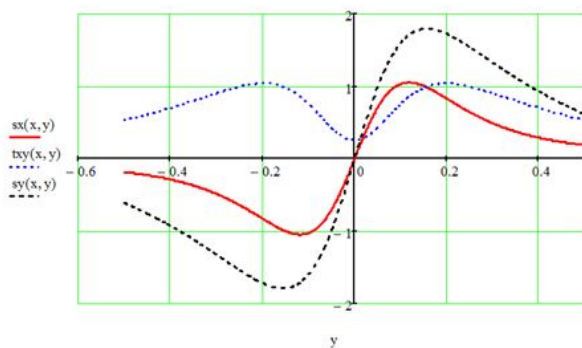


Рис. 3

Результаты исследований и их обсуждение. Получены интегральные соотношения для определения систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича, возникающих в обратно-симметричной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
 [2] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.

- [3] *Meleshko, V. V.* Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – No. 1. – P. 33–85.
- [4] *Тимошенко, С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
- [5] *Меньшова, И. В.* Разложения по функциям Фадля – Папковича в полуполосе. Обратносимметричная задача / И. В. Меньшова, И. А. Семенова, Н. В. Храмова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2 (20). – С. 119–130.
- [6] *Леонтьев, А. Ф.* Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1976. – 536 с.
- [7] *Коробейник, Ю. Ф.* Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Изв. АН СССР. Математика. – 1980. – Т. 44. – № 5. – С. 1066–1114.
- [8] *Коробейник, Ю. Ф.* Представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // УМН. – 1981. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 73–126.
- [9] *Коробейник, Ю. Ф.* Представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Изв. АН СССР. Математика. – 1978. – Т. 42. – № 2. – С. 325–355.
- [10] *Левин, Б. Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.
- [11] *Ахиезер, Н. И.* Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М. : Наука, 1965. – 407 с.
- [12] *Ибрагимов, И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И. И. Ибрагимов. – М. : Наука, 1971. – 518 с.
- [13] *Коваленко, М. Д.* Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.
- [14] *Pflüger A.* Ubereine " Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen // Commentarii Mathem. Helv. – 1935/36. – Vol. 8. – P. 89–129.
- [15] *Коваленко, М. Д.* О преобразовании Бореля в классе W квазицелых функций / М. Д. Коваленко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – № 3. – С. 761–774.
- [16] *Шемякин, Е. И.* О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) / Е. И. Шемякин // Доклады РАН. – 1996. – Т. 347. – № 3. – С. 342–345.
- [17] *Маркушевич, А. И.* Целые функции. Элементарный очерк / А. И. Маркушевич. – М. : Наука, 1965. – 108 с.
- [18] *Коваленко, М. Д.* Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича в обратносимметричной задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 5(15). – С. 81–89.

Семенова Ирина Александровна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: irishka_g_05@mail.ru

I. A. Semenova

**EXAMPLES OF ANALYTICAL SOLUTIONS IS INVERSELY SYMMETRIC
BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY IN POLOPOLO**

Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The problem of solving the biharmonic equation in a finite canonical domains with corner points of the boundary (biharmonic problem) exists almost 200 years (see the review [3]). In the theory of elasticity it is usually formulated as the problem of finding the solution of the biharmonic equation in rectangular half-strip, the longitudinal sides of which are not loaded, and at the end the normal and tangential stresses are set. If the decision to half-strip is built, the decision for a rectangle is not difficult already. In the series of publications, summarized the articles [13], the general theory was developed, the scheme of the solution of the problem in half-strip was given and various examples were considered (looked through). But it was done only for symmetric deformation of half-strip. In this work the examples of solutions the back-symmetric problem for half-strip are provided. The longitudinal sides of half-strip are free, and at the end the normal and shear stresses are set. The solution is appeared in the form of explicit expansions for Fadle-Papkovich functions which coefficients are defined as Fourier integrals given at the end of half-strip boundary functions. The work is based on the article [13] and the article [18], in which the ratio of biorthogonality and decomposition Lagrangian for backward symmetric tasks are given.

Keywords: semistrip, boundary-value problem, Fadle-Papkovich functions, analytical solutions, antisymmetric boundary-value problem.

REFERENCES

- [1] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadlya – Papkovich’s functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.
- [2] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
- [3] *Meleshko, V. V.* Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – P. 33–85.
- [4] *Tymoshenko, S. P.* Theory of Elasticity / S. P. Tymoshenko, J. Goodier. – M. : Nauka, 1975. – 576 p.
- [5] *Menshova, I. V.* Decompose in funktsiyamFadlan – Papkovicha in polupolos. Baksimmetrichnoy problems / I. V. Menshova, I. A. Semenova, N. V. Khramova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2014. – № 2 (20). – P. 119–130.
- [6] *Leontiev, A. F.* Exponential series / A. F. Leontiev. – M. : Nauka, 1976. – 536 p.
- [7] *Korobeynik, Yu. F.* Interpolation problems, nontrivial expansions of zero, and representing systems / Yu. F. Korobeynik // Math. USSR Academy of Sciences. Mathematics. – 1980. – Vol. 44. – № 5. – P. 1066–1114.
- [8] *Korobeynik, Yu. F.* Representing systems / Yu. F. Korobeynik // Math. - 1981. – Vol. 36. – Issue 1. – P. 73–126.
- [9] *Korobeynik, Yu. F.* Representing systems / Yu. F. Korobeynik // Math. USSR Academy of Sciences. Mathematics. – 1978. – Vol. 42. – № 2. – P. 325–355.
- [10] *Levin, B. Ya.* Distribution of zeros of entire functions / B. Ya. Levin. – M. : Gostekhizdat, 1956. – 632 p.
- [11] *Akhiezer, N. I.* Lectures on the theory of approximation / N. I. Akhiezer. – M. : Nauka, 1965. – 407 p.

- [12] *Ibragimov, I. I.* Interpolation methods and functions some of their applications / I. I. Ibragimov. – M. : Nauka, 1971. – 518 p.
- [13] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.
- [14] *Pflüger A.* Uebereine " Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen // Commentarii Mathem. Helv. – 1935/36. – Vol. 8. – P. 89–129.
- [15] *Kovalenko, M. D.* Borel transformations in the class W quasi-functions / М. Д. Коваленко // Fundamental and Applied mathematics. – 2001. – № 3. – P. 761–774.
- [16] *Shemyakin, E. I.* On boundary value problems of elasticity theory for domains with corners (plane strain) / E. I. Shemyakin // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1996. – Vol. 347. – № 3. – P. 342–345.
- [17] *Markushevich, A. I.* Entire functions. elementary outline / A. I. Markushevich. – M. : Nauka, 1965. – 108 p.
- [18] *Kovalenko, M. D.* Decompose in Lagrange funktsiyam Fadlan – Papkovicha in backsimmetrichnoy Theories uprugostidlyapryamougolynopolupolos / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 5 (15). – P. 81–89.

Semenova, Irina Alexandrovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Е. П. Дац, А. В. Ткачева, Р. В. Шпорт

СБОРКА КОНСТРУКЦИИ "КОЛЬЦО В КОЛЬЦЕ" СПОСОБОМ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКИ

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

Аннотация. В рамках теории температурных напряжений приводится решение последовательности одномерных краевых задач о сборке конструкции, состоящей из двух тонких колец, контактирующих по общей цилиндрической границе и изготовленных из одинакового упругопластического материала. Устанавливаются моменты и места зарождения и исчезновения пластических течений, закономерности продвижения упругопластических границ. Рассчитывается итоговый уровень остаточных напряжений, обеспечивающий натяг в сборке.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, остаточные деформации.

УДК: 539.374+ 539.224

Введение. Теория температурных напряжений восходит к работам классиков механики деформирования, таких как Р. Хилл, В. Койтер, Ю. Н. Работнов. Одномерную задачу о формировании поля остаточных напряжений в длинной толстостенной трубе за счет нестационарного нагревания боковых поверхностей рассмотрел Д. Бленд [1]. Применительно к задачам посадки подобные задачи рассмотрели Ю. Оркан [2] и А. Ковач [3]. В нашей стране ряд задач термопластичности был рассмотрен Ю. Н. Шевченко [4] и его учениками. Остаточные напряжения [1] оказываются следствием возникновения и остановки пластических течений при росте напряжений в упругопластических материалах из-за повышения уровня в градиенте температуры. При сборке посадкой развивающиеся пластические течения приводят к уменьшению итогового натяга по сравнению с рассчитанным по теории температурных напряжений. Но именно по последним теориям рассчитаны нормативные параметры отечественных технологических методик. Присутствие пластических течений при горячей посадке тесно связано с зависимостью предела текучести от температуры, ведь тело разогревается до температуры, сравнимой с температурой плавления материала сборки.

Рассмотрим здесь задачу о температурных напряжениях в сборке из двух колец малой толщины, изготовленных из одного и того же упругопластического материала. Принимаемое

Поступила 11.11.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33064-мол_а_вед „Развитие моделей и методов механики необратимого деформирования для описания процессов формоизменения материалов с нелинейными теплофизическими и реологическими свойствами“) и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам на выполнение НИР (№ 2014/292).

положение об одинаково малой толщине элементов сборки позволяет считать, что материал колец находится в условиях плоского напряженного состояния. В таком случае задача оказывается одномерной.

Исходные модельные зависимости. Деформации в материале сборки d_{ij} полагаем малыми и складываемыми из упругих (обратимых) e_{ij} и пластических (необратимых) p_{ij} :

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1)$$

В зависимости (1) используется прямоугольная система декартовых координат x_i , u_i – компоненты вектора перемещений, запятая перед индексом означает дифференцирование по данной пространственной координате так, что $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Напряжения в деформируемом материале задаются уровнем и распределением в нем температуры T и упругих деформаций в соответствии с законом Дюамеля – Неймана [5]:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} - m(T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (2)$$

Здесь λ , μ – параметры Ламе, $m = 3K\alpha$ и α – коэффициент линейного расширения, $K = \lambda + 2/3\mu$ – упругий модуль объемного сжатия, T, T_0 – текущая и начальная температуры. Пластическое течение возможно только в условиях достижения напряженными состояниями в деформируемых телах поверхности нагружения $f(\sigma_{ij}) = 0$ в пространстве напряжений. В принимаемых условиях принципа максимума Мизеса данная поверхность оказывается пластическим потенциалом и следует ассоциированный закон пластического течения

$$dp_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, d\lambda > 0. \quad (3)$$

В качестве конкретной поверхности нагружения будем использовать условие пластичности Треска [6]:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k. \quad (4)$$

В (4) σ_i – главные значения тензора напряжения, $k(r, t)$ – предел текучести, в общем случае зависящий от температуры. В качестве закона изменения предела текучести на основе экспериментальных данных выбрана квадратичная зависимость:

$$k(r, t) = k_1 \left(1 - (T_p - T_1)^{-2} (T_p - T(r, t))^2 \right), \quad (5)$$

где k_1 – предел текучести при температуре T_1 , T_p – температура плавления материала.

Постановка задачи. Обратимое деформирование. В начальный момент времени $t = 0$ внутреннее кольцо, имеющее внутренний радиус R_0 и внешней R_1 , находится при комнатной температуре T_1 . Внешнее кольцо, разогретое до температуры T_2 , имеет внутренний радиус R_1 и внешний R_2 . Начальные перемещения отсутствуют. Уравнение равновесия, условие совместности деформации и соотношения между компонентами деформаций и перемещений колец в условиях цилиндрической симметрии примут вид:

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad (6)$$

$$d_{\varphi\varphi,r} + r^{-1}(d_{\varphi\varphi} - d_{rr}) = 0, \quad (7)$$

$$d_{rr} = u_{rr,r} \quad d_{\varphi\varphi} = r^{-1}u_{rr}. \quad (8)$$

Воспользовавшись зависимостью (2) для плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)e_{rr} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{zz}) - m\Delta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)e_{\varphi\varphi} + \lambda(e_{rr} + e_{zz}) - m\Delta, \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - m\Delta = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

получим уравнение для определения радиальной компоненты напряжений в начальный момент времени

$$(r\sigma_{rr,r})_{,r} + 2\sigma_{rr,r} = 0,$$

решая которое, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_1 - r^{-2}c_2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_1 + r^{-2}c_2.\end{aligned}\quad (10)$$

Поскольку до момента посадки кольца не испытывают внешнего воздействия, из (10) следует $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, т.е. начальные напряжения колец при любой постоянной начальной температуре отсутствуют. Из (3)–(4) с учетом зависимостей (5) можно определить внутренний радиус горячего кольца перед нагревом:

$$\begin{aligned}\rho &= R_1 (1 - ms^{-1}(T_2 - T_1)), \\ s &= (3\lambda + 2\mu).\end{aligned}\quad (11)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния колец после момента посадки необходимо рассчитать поле температур, возникающее при теплообмене. Процесс распространения тепла в материале колец описывается известным уравнением теплопроводности [7]

$$T_{,t}^{(v)} = a(rT_{,r}^{(v)})_{,r}.\quad (12)$$

Индекс v обозначает номер кольца (1 – внутреннее, 2 – внешнее). Пренебрегая теплоотдачей с поверхностей и используя условия теплообмена между кольцами, найдем распределение температурного поля, применив любой из известных численных методов. Граничные условия для численного решения уравнения (12) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}T_{,r}^{(1)}(R_0, t) &= 0, \quad T_{,r}^{(2)}(R_2, t) = 0, \\ T_{,r}^{(1)}(R_1, t) &= T_{,r}^{(2)}(R_1, t), \\ T^{(1)}(R_1, t) &= T^{(2)}(R_1, t).\end{aligned}\quad (13)$$

Записав соотношения между компонентами напряжений и перемещений согласно зависимостям (8) и (9) в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(v)} &= 4\mu gw^{-1}u_{r,r}^{(v)} + 2\mu\lambda(wr)^{-1}u_r^{(v)} - 2\mu mw^{-1}\Delta_v \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 4\mu gw^{-1}u_r^{(v)} + 2\mu\lambda(wr)^{-1}u_{r,r}^{(v)} - 2\mu mw^{-1}\Delta_v \\ g &= (\lambda + \mu) \quad w = (\lambda + 2\mu) \\ \Delta_v &= T^{(v)} - T_v\end{aligned}\quad (14)$$

и подставив (14) в (6), получим дифференциальное уравнение для определения единственной отличной от нуля компоненты перемещений

$$u_{r,rr}^{(v)} + (r^{-1}u_r^{(v)})_{,r} = 2g^{-1}m\Delta_v,\quad (15)$$

решением которого является функция:

$$\begin{aligned}u_r^{(v)}(r, t) &= 2g^{-1}rF_v(r_v, r, t) + rc_1^{(v)}(t) + r^{-1}c_2^{(v)}(t) \\ F_v(r_v, r, t) &= mr^{-2} \int_{r_v}^r \Delta_v(\rho, t) d\rho \\ r_v &= R_{v-1},\end{aligned}\quad (16)$$

тогда зависимости для напряжений согласно (14) и (15) примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(v)}(r, t) &= -\mu \left(g^{-1} F_v(r_v, r, t) - 2sw^{-1}c_1^{(v)}(t) + 2r^{-2}c_2^{(v)}(t) \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}(r, t) &= \mu \left(g^{-1} F_v(r_v, r, t) - mg^{-1}\Delta_v(r, t) + 2sw^{-1}c_1^{(v)}(t) + 2r^{-2}c_2^{(v)}(t) \right).\end{aligned}\quad (17)$$

Граничные условия на свободных краях колец

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R_0, t) = 0, \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, t) = 0 \quad (18)$$

и условия непрерывности напряжений и перемещений в зоне контакта

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R_1, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(R_1, t), u_r^{(1)}(R_1, t) = u_r^{(2)}(R_1, t) \quad (19)$$

позволят определить из (18)–(19) неизвестные константы интегрирования (функции времени), которые здесь и далее не приводятся из-за громоздкости их выражений.

Пластическое течение. Дальнейшее изменение напряженно-деформированного состояния колец связано с их выходом на поверхность нагружения (4). Развитие зоны пластического течения начинается в некоторый момент времени t_1 на границе контакта внешнего кольца и определяется условием:

$$\sigma_{rr}^{(v)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} = -2k_2. \quad (20)$$

При $t_1 > 0$ во внешнем кольце появляется область необратимого деформирования с упруго-пластической границей a_2 . Соотношения для напряжений в области $R_1 \leq r < a_2(t)$ после интегрирования уравнения равновесия (6) с учетом условия (20) примут вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(r, t) &= 2 \int_{r_2}^r \rho^{-1} k_2(\rho, t) d\rho + c_3^{(2)}(t), \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t) &= 2 \int_{r_2}^r \rho^{-1} k_2(\rho, t) d\rho + 2k_2(r, t) + c_3^{(2)}(t).\end{aligned}\quad (21)$$

Символом "тильда" над компонентами напряжений и перемещений в дальнейшем обозначены выражения для напряжений и перемещений, справедливые в области пластического течения. Для определения поля перемещений в области пластического течения внешней пластинки воспользуемся ассоциированным законом течения (3), согласно которому в случае, когда поверхность f определяется равенством (20), будут иметь место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}dp_{rr}^{(2)} + dp_{\varphi\varphi}^{(2)} &= 0, \\ dp_{zz} &= 0.\end{aligned}\quad (22)$$

Следствием (22) является уравнение

$$u_{r,r}^{(2)} + r^{-1}u_r^{(2)} = e_{rr}^{(2)} + e_{\varphi\varphi}^{(2)}. \quad (23)$$

Выразив упругие деформации e_{ij} через напряжения (21) согласно соотношениям (9):

$$\begin{aligned}e_{rr}^{(v)} &= (\mu s)^{-1}(\mu m \Delta_v + g \sigma_{rr}^{(v)} - 0.5 \lambda \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}), \\ e_{\varphi\varphi}^{(v)} &= (\mu s)^{-1}(\mu m \Delta_v + g \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} - 0.5 \lambda \sigma_{rr}^{(v)}), \\ e_{zz}^{(v)} &= w^{-1}(m \Delta_2(r, t) - \lambda(e_{rr}^{(v)} + e_{\varphi\varphi}^{(v)}))\end{aligned}\quad (24)$$

и подставив их в (23), запишем уравнение для определения радиальной компоненты перемещений в области пластического течения $R_1 \leq r < a_2(t)$:

$$(r \tilde{u}_r^{(2)})_{,r} - 2ms^{-1}r \Delta_2 - 0.5(\mu s)^{-1}wr(\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}) = 0. \quad (25)$$

Интегрируя последнее, получим:

$$\tilde{u}_r^{(2)}(r, t) = 2s^{-1}r F_2(R_1, r, t) + 0.5(\mu s)^{-1}wr \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(r, t) + r^{-1}c_4^{(2)}(t). \quad (26)$$

Величину пластической деформации $p_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t)$ найдем как разность полной и упругой деформации ($r^{-1}\tilde{u}_{rr}^{(2)} - \tilde{e}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t)$):

$$p_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t) = -p_{rr}^{(2)}(r, t) = s^{-1}(2F_2(R_1, r, t) - 2\mu^{-1}gk_2(r, t) - m\Delta_2(r, t) + sr^{-2}c_4^{(2)}(t)). \quad (27)$$

Соотношения для напряжений и перемещений в областях обратимого деформирования в каждом из колец (16), (17) (при $r_2 = a_2$) по-прежнему справедливы с точностью до новых констант интегрирования, которые вместе с константами в области пластического течения внешнего кольца (21), (26) требуют определения. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений, являющихся краевыми условиями (18)–(19) и условиями непрерывности радиальных напряжений и перемещений на упругопластической границе a_2 :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}(R_0, t) = 0 \quad \sigma_{rr}^{(1)}(R_1, t) = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(R_1, t) \quad \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(a_2, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(a_2, t), \\ \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, t) = 0 \quad u_r^{(1)}(R_1, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(R_1, t) \quad \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t). \end{aligned} \quad (28)$$

Значение a_2 найдем из условия непрерывности на ней окружных напряжений ($\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}(a_2, t) = \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(a_2, t)$):

$$\mu mg^{-1}\Delta_2(a_2, t) - 4\mu a_2^{-2}c_2^{(2)}(t) + 2k_2(a_2, t) = 0. \quad (29)$$

Численно решая уравнение (29) для различных моментов времени, определим закон движения упругопластической границы $a_2(t)$ во внешнем кольце.

По мере выравнивания уровня температур колец на внутреннем радиусе внутреннего кольца в некоторый момент времени t_2 выполняется условие:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -2k_1, \quad (30)$$

которое означает начало процесса пластического течения во внутреннем кольце. Таким образом, при $t > t_2$ в окрестности внутреннего радиуса каждого кольца имеются области необратимого ($R_{v-1} < r < a_v(t)$) и обратимого ($a_v(t) < r < R_v$) деформирования. Напряжения в области пластического течения найдем, проинтегрировав уравнение равновесия (6) с учетом условия (30):

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, t) = -2k_1(r, t), \\ \sigma_{rr}^{(1)}(r, t) = -2r^{-1} \int_{R_0}^r k_1(\rho, t) d\rho + r^{-1}c_3^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Из ассоциированного закона течения (3) для поверхности (30) можно получить следующие соотношения для приращений пластической деформации:

$$\begin{aligned} dp_{zz}^{(1)} + dp_{\varphi\varphi}^{(1)} = 0, \\ dp_{rr}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

следствием которых является равенство

$$du_{r,r}^{(1)} = e_{rr}^{(1)}. \quad (33)$$

Подставив в (33) деформацию $e_{rr}^{(1)}$ из (24) при условии, что напряжения теперь определяются по формулам (30), найдем уравнение для определения радиальной компоненты перемещений:

$$\tilde{u}_{r,r}^{(1)} = (\mu s)^{-1} \left(\mu m \Delta_1 - 2gr^{-1} \int_{R_0}^r k_1 dr + gr^{-1}c_{13} + \lambda k_1 \right), \quad (34)$$

интегрируя которое, получим:

$$u_r^{(1)}(r, t) = (\mu s)^{-1} \left(\mu \int_{R_0}^r \Delta_1(\rho, t) d\rho + (\lambda - 2g \ln(r)) \int_{R_0}^r k_1(\rho, t) d\rho + \right. \\ \left. + 2g \int_{R_0}^r k_1(\rho, t) \ln(\rho) d\rho + g \ln(r) c_3^{(1)}(t) \right) + c_4^{(1)}(t). \quad (35)$$

По найденным напряжениям (31) и перемещениям (35) найдем пластическую деформацию $p_{\varphi\varphi}^{(1)}$:

$$p_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, t) = r^{-1} u_r^{(1)}(r, t) - e_{rr}^{(1)}(r, t) = r^{-1} c_4^{(1)}(t) - m s^{-1} \Delta_1(r, t) + \\ + 2g(rms)^{-1} \left(\int_{R_0}^r \ln(\rho) k_1(\rho, t) d\rho + 0.5g^{-1} m \mu \int_{R_0}^r \Delta_1(\rho) d\rho + 2gr k_1(r, t) + \right. \\ \left. + 0.5(\ln(r) + g^{-1}\lambda) c_3^{(1)}(t) - \ln(r) \int_{R_0}^r k_1(\rho) d\rho \right). \quad (36)$$

Соотношения, определяющие напряженно-деформированное состояние для остальных областей остаются справедливыми, если заменить пределы интегрирования $r_1 = a_1$, $r_2 = a_2$ и заново определить константы $c_i^{(v)}(t)$, которые, как и прежде, находятся из условий непрерывности напряжений и перемещений на упругопластических границах $a_1(t)$, $a_2(t)$, в зоне контакта (19) и краевых условий (18):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(R_0, t) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)}(R_1, t) = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(R_1, t) \quad \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(a_2, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(a_2, t) \\ \tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(a_1, t) = \sigma_{rr}^{(1)}(a_1, t) \quad \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, t) = 0 \quad u_r^{(1)}(R_1, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(R_1, t) \\ \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t) \quad \tilde{u}_r^{(1)}(a_1, t) = \tilde{u}_r^{(1)}(a_1, t). \end{aligned} \quad (37)$$

Для определения положения упруго-пластических границ следует решить систему уравнений непрерывности напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}$, добавив к (29) условие $(\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(a_1, t) = -2k_1(a_1, t))$:

$$2w^{-1} \mu s c_1^{(1)}(t) + 2\mu a_1^{-2} c_2^{(1)}(t) - g^{-1} \mu m \Delta_1(a_1, t) + 2k_1(a_1, t) = 0. \quad (38)$$

Области необратимого деформирования и пластические деформации продолжают рост до момента времени t_3 , при котором температура в обоих кольцах станет одинаковой:

$$T^{(v)}(r, t) = T_k. \quad (39)$$

Остывание. Пусть, начиная с некоторого момента времени t_k , происходит процесс остывания колец. Уровень T_k уменьшается до значения комнатной температуры T_1 . Так как материал колец предполагается одинаковым, равномерное уменьшение температурного поля не приведет к изменению поля температурных напряжений, однако, за счет увеличения предела текучести, условия пластичности (20), (30) перестанут выполняться, т.е. произойдет разгрузка материала в областях с накопленными необратимыми деформациями. Необратимые деформации $\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(v)}$ рассчитываются по формулам (27), (36) при подстановке в них максимального значения T_k . Символ $\hat{}$ обозначает область с накопленными деформациями. Для расчета уровня напряжений в области $R_0 < r < a_1$ во внутреннем кольце воспользуемся условием совместности (7), которое, учитывая разложение деформаций $\hat{d}_{rr}^{(1)} = \hat{e}_{rr}^{(1)}, \hat{d}_{\varphi\varphi}^{(1)} = \hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)} + \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}$, представим в виде:

$$\hat{e}_{\varphi\varphi, r}^{(1)} + r^{-1}(\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)} - \hat{e}_{rr}^{(1)}) = -(\hat{p}_{\varphi\varphi, r}^{(1)} + r^{-1} \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}). \quad (40)$$

Воспользовавшись соотношениями (24), (6) из (40) получим дифференциальное уравнение для определения радиальной компоненты напряжений:

$$(r \hat{\sigma}_{rr, r}^{(1)} + \hat{\sigma}_{rr}^{(1)})_{,r} = -\mu g^{-1} s (\hat{p}_{\varphi\varphi, r}^{(1)} + r^{-1} \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}), \quad (41)$$

решая которое найдем $\hat{\sigma}_{rr}^{(1)}$:

$$\hat{\sigma}_{rr}^{(1)}(r) = -0.5\mu g^{-1} s \left(r^{-2} \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho) \rho d\rho + \int_{R_0}^r \rho^{-1} \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho) d\rho \right) + \hat{c}_5^{(1)} - r^{-2} \hat{c}_6^{(1)}. \quad (42)$$

Используя (42), из уравнения равновесия найдем $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(1)}$:

$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(1)}(r) = -0.5\mu g^{-1}s \left(2\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(r) - r^{-2} \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho d\rho + \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho^{-1}d\rho \right) + \hat{c}_5^{(1)} + r^{-2}\hat{c}_6^{(1)}. \quad (43)$$

Перемещение в области $R_0 < r < a_1$ определим через деформацию $\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)}$ (24) и напряжения (42), (43):

$$\hat{u}_r^{(1)}(r, T_k) = r\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)} = (4g)^{-1} \left(sr^{-1} \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho d\rho - wr \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho^{-1}d\rho \right) + 0.5(\mu s)^{-1}(2\mu mr(T_k - T_1) + wr\hat{c}_5^{(1)} + sr^{-1}\hat{c}_6^{(1)}). \quad (44)$$

Условие совместности для области с необратимыми деформациями $R_1 < r < a_2$ внешнего кольца примет вид:

$$\hat{e}_{\varphi\varphi,r}^{(2)} + r^{-1}(\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(2)} - \hat{e}_{rr}^{(2)}) = -(\hat{p}_{\varphi\varphi,r}^{(2)} + 2r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}). \quad (45)$$

Из (45) следует уравнение для определения напряжения $\hat{\sigma}_{rr}^{(2)}$:

$$(r\hat{\sigma}_{rr,r}^{(2)} + \hat{\sigma}_{rr}^{(2)})_r = -\mu g^{-1}s(\hat{p}_{\varphi\varphi,r}^{(2)} + 2r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}), \quad (46)$$

проинтегрировав которое, получим:

$$\hat{\sigma}_{rr}^{(2)}(r) = -\mu g^{-1}s \int_{R_1}^r \rho^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho)d\rho + \hat{c}_5^{(2)} - r^{-2}\hat{c}_6^{(2)}. \quad (47)$$

Напряжение $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}$ и перемещение $\hat{u}_r^{(2)}$ найдем по аналогии с расчетами для внутреннего кольца:

$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r) = -\mu g^{-1}s \left(\int_{R_1}^r \rho^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho)d\rho + \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r) \right) + \hat{c}_5^{(2)} - r^{-2}\hat{c}_6^{(2)} \quad (48)$$

$$\hat{u}_r^{(2)}(r, T_k) = -0.5g^{-1}wr \int_{R_1}^r \rho^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho)d\rho + 0.5(\mu s)^{-1}(2\mu mr(T_k - T_2) + wr\hat{c}_5^{(2)} + sr^{-1}\hat{c}_6^{(2)}). \quad (49)$$

Напряжения и перемещения в областях $a_v < r < R_v$ в условиях отсутствия температурного градиента ($\Delta_{,r}(r, T_k) = 0$) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(v)}(r) &= c_1^{(v)} - r^{-2}c_2^{(v)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}(r) &= c_1^{(v)} + r^{-2}c_2^{(v)} \\ u_r^{(v)}(r, T_k) &= 0.5(\mu s)^{-1}(2\mu mr(T_k - T_v) + wr c_1^{(v)} + sr^{-1}c_2^{(v)}). \end{aligned} \quad (50)$$

Новые константы интегрирования можно найти из системы (37), заменив соответствующие величины для каждой области новыми соотношениями, вычисленными при остывании. Заметим, что константы не зависят от уровня текущей температуры колец, поэтому поля напряжений при равномерном температурном распределении не изменяются. Перемещения при полном остывании вычисляются, если положить $T_k = T_1$.

Остановка пластического течения происходит, когда температура выравнивается по всему кольцу, в это время происходит полная разгрузка. В работе [8], где исследовался локальный нагрев пластины, разгрузка области пластического деформирования происходила также мгновенно. Постепенное торможение пластического течения в упругопластичном материале описано в работах [9], [10], [11].

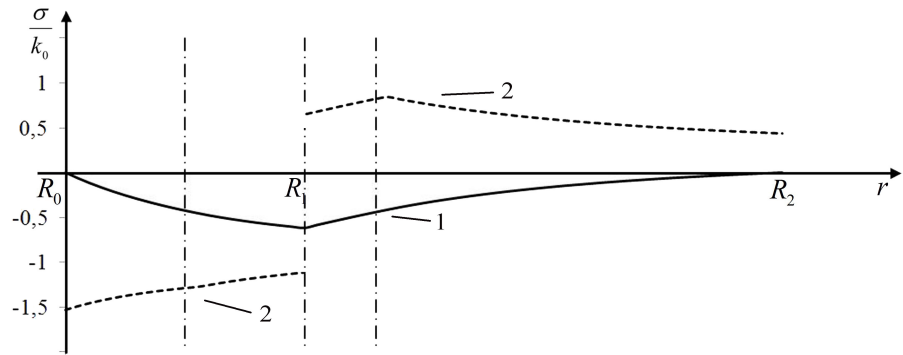


Рис. 1. Распределение остаточных напряжений: 1 – σ_r , 2 – σ_φ

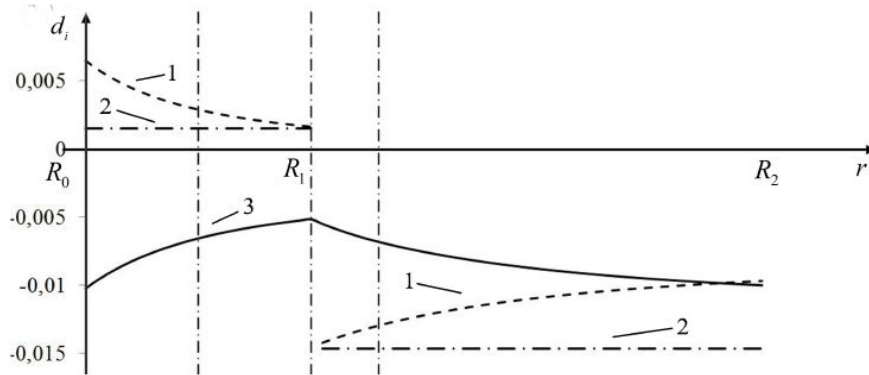


Рис. 2. Распределение остаточных деформаций: 1 – d_r , 2 – d_z , 3 – d_φ

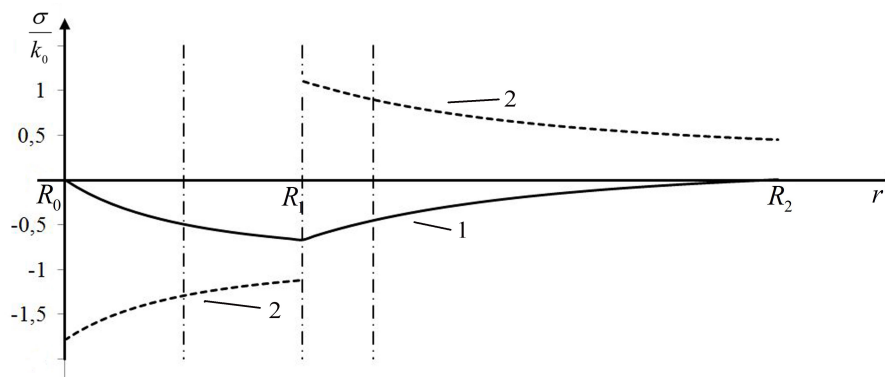


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений, найденных по закону Дюамеля - Нейман: 1 – σ_r , 2 – σ_φ

Распределения напряжений и необратимой деформации p_φ приведены на рис. 1–3. Напряжения σ_φ (рис. 1) в области необратимого деформирования ниже, чем напряжения σ_φ , рассчитанные по соотношениям (16), выведенным для упругого деформирования. Следовательно, учет зарождения и развития пластического течения уменьшает уровень остаточных напряжений, при этом практически не влияет на радиальные напряжения. Сами же необратимые деформации достигают наибольшего значения в области зарождения пластического течения и уменьшаются по мере продвижения упругопластической границы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bland, D. R. Elastoplastic Thick-Walled Tubes of Work-Hardening Material Subject to Internal and External Pressures and to Temperature Gradients / D. R. Bland // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1956. – Vol. 4. – P. 209–229.
- [2] Orcan, Y. Elastic-Plastic deformation of centrally heated cylinder / Y. Orcan, U. Gamer // Acta Mechanica. – 1991. – Vol. 90. – Issue 1–4. – P. 61–80.
- [3] Kovacs, A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits / A. Kovacs // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. – 1996. – Vol. 40. – № 2. – P. 103–112.
- [4] Шевченко, Ю. Н. Термопластичность при переменных нагрузениях / Ю. Н. Шевченко. – Киев : Наукова думка, 1970.
- [5] Боли, Б. Теория температурных напряжений // Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : Мир, 1964.
- [6] Быковцев, Г. И. Теория пластичности // Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998.
- [7] Лыков, А. В. Теория теплопроводности // А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967.
- [8] Буренин, А. А. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. П. Мурашкин // Механика твердого тела. – 2014. – № 2. – С. 124–131.
- [9] Ковтанюк, Л. В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 2005. – Т. 400. – № 6. – С. 764–767.
- [10] Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток : Дальнаука, 2013.
- [11] Буренин, А. А. Развитие и торможение течения упруговязкопластической среды в цилиндрической трубе / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // ПММ. – 2013. – Т. 77. – № 5. – С. 788–798.

Дац Евгений Павлович,
ассистент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток

e-mail: dats@mail.dvo.ru

Ткачева Анастасия Валерьевна,
младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск - на - Амуре

e-mail: 4nansi4@mail.ru

Шпорт Роман Вячеславович,
кандидат технических наук, соискатель, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск - на - Амуре

e-mail: mail@imim.ru

E. P. Dats, A. V. Tkacheva, R. V. Shport

THE ASSEMBLAGE OF "RING IN RING" CONSTRUCTIONS WITH SHRINK FIT METHOD

Vladivostok State University of Economics and Service

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS

Abstract. Within the framework of thermal stresses the solution is given on sequence of one-dimensional boundary problems on fold construction of two thin rings consisting of the same elastic-plastic material and contacting through shared cylindrical bound. The moments and locations of the formation or disappearance of plastic flows and also mechanisms of progression elastic-plastic bounds are determining. The final level of residual stresses, which provide final tightness, is estimated.

Keywords: elasticity, plasticity, shrink fit, thermal stresses, residual deformation, residual stresses

REFERENCES

- [1] *Bland, D. R.* Elastoplastic Thick-Walled Tubes of Work-Hardening Material Subject to Internal and External Pressures and to Temperature Gradients / D. R. Bland // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1956. – Vol. 4. – P. 209–229.
- [2] *Orcan, Y.* Elastic–Plastic deformation of centrally heated cylinder / Y. Orcan, U. Gamer // *Acta Mechanica*. – 1991. – Vol. 90. – Issue 1–4. – P. 61–80.
- [3] *Kovacs, A.* Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits / A. Kovacs // *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* – 1996. – Vol. 40. – № 2. – P. 103–112.
- [4] *Shevchenko, Yu. N.* Thermoplasticity under Variable Loads / Yu. N. Shevchenko. – Kiev : Naukova Dumka, 1970.
- [5] *Boly, B.* Theory of Thermal Stresses / B. Boly, J. H. Weiner. – M. : Mir, 1964.
- [6] *Bykovtsev, G. I.* Theory of Plasticity / G. I. Bykovtsev. – Vladivostok : Dalnauka, 1998.
- [7] *Lykov, A. V.* The theory of heat conduction / A. V. Lykov. – M. : Higher School, 1967.
- [8] *Burenin, A. A.* Formation of residual strain field in a local thermal effects / A. A. Burenin, E. P. Dats, E. V. Murashkin // *Mechanics of Solids*. – 2014. – № 2. – P. 124–131.
- [9] *Kovtanyuk, L. V.* About bursting elastic viscous plastic material through a rigid circular cylindrical matrix / L. V. Kovtanyuk // *DAN*. 2005. – Vol 400. – № 6. – S. 764–767.
- [10] *Burenin, A. A.* Large irreversible deformation and springback / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk. – Vladivostok : Dal'nauka, 2013.
- [11] *Burenin, A. A.* Development and braking currents elastoviscoplastic environment in a cylindrical tube / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk // *J. Appl.* – 2013. – Vol. 77. – № 5. – P. 788–798.

Dats, Evgeniy Pavlovich

Assistant, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok

Tkacheva, Anastasia Valerevna

Research Assistant, Institute of Machine Science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur

Shport, Roman Vyacheslavovich

Applicant, Candidate of Engineering Sciences, Institute of Machine Science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur

Б. Г. Мионов

К ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассмотрено кручение неоднородных анизотропных идеальнопластических стержней при произвольном условии пластичности. Определены характеристики исследуемых уравнений и соотношения вдоль характеристик, а также при некоторых частных случаях условия предельного состояния получены интегралы основных соотношений.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, анизотропия, неоднородность, кручение.

УДК: 539.375

Рассмотрим цилиндрический или призматический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат $x y z$. Образующие стержня параллельны оси z . Предположим, что стержень состоит из неоднородного анизотропного идеальнопластического материала. Стержень закручивается вокруг своей оси, боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

Положим, что напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \quad (1)$$

Условие пластичности в общем случае запишется в виде

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}, x, y) = 0, \quad (2)$$

а единственное уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Из наших предположений следует, что на контуре поперечного сечения стержня выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}. \quad (4)$$

Дифференцируя уравнение (2) по x , получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Согласно (5) из уравнения равновесия (3) следует

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-01-97029) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

Поступила 10.11.2014

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (6)$$

Характеристики уравнения (6) удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial x}}. \quad (7)$$

Из (7) и (2) следует, что вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0. \quad (9)$$

В общем случае, соотношения (8), (9) могут быть проинтегрированы только численно. Рассмотрим некоторые частные случаи условия пластичности (2), для которых можно получить интегралы системы уравнений (8), (9).

1. Однородные анизотропные стержни, т. е. условие пластичности (2) не зависит от x и y :

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0. \quad (10)$$

Известно [2], что уравнения (8), (9) в этом случае легко интегрируются. Характеристики есть прямые линии, уравнения которых имеют вид

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad (11)$$

а вдоль характеристик

$$\tau_{xz} = c_{11} = const, \quad \tau_{yz} = c_{12} = const, \quad (12)$$

где $a_1 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{11}, c_{12})$, $b_1 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{11}, c_{12})$, $f(c_{11}, c_{12}) = 0$, $c_1 = const$.

Рассмотрим вектор градиента к кривой текучести (2)

$$\text{grad } f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \bar{j},$$

где \bar{i}, \bar{j} – единичные орты осей x и y .

Из (11) следует, что характеристики соотношения (6) ортогональны вектору градиента к кривой текучести.

2. Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) не зависит от x :

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}, y) = 0. \quad (13)$$

В этом случае вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = c_{21}(y), \quad \tau_{yz} = c_{22} = const, \quad (14)$$

где $f(c_{21}(y), c_{22}, y) = 0$.

Уравнения характеристик имеют вид

$$x = -\int \frac{b_2(y)}{a_2(y)} dy + c_2, \quad (15)$$

где $a_2(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{21}(y), c_{22}, y)$, $b_2(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{21}(y), c_{22}, y)$, $c_2 = const$.

3. Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$f(\phi(y)\tau_{xz}, \psi(x)\tau_{yz}) = 0. \quad (16)$$

В этом случае, вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = \frac{c_{31}}{\phi(y)}, \quad \tau_{yz} = \frac{c_{32}}{\psi(x)}, \quad (17)$$

где $c_{31} = const$, $c_{32} = const$, $f(c_{31}, c_{32}) = 0$.

Уравнения характеристик определяются из соотношений

$$\int \frac{a_3}{\psi(x)} dx + \int \frac{b_3}{\phi(y)} dy = c_3, \quad (18)$$

где $a_3 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(c_{31}, c_{32})$, $b_3 = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(c_{31}, c_{32})$, $c_3 = const$, $\xi_1 = \phi(y)\tau_{xz}$, $\xi_2 = \psi(x)\tau_{yz}$.

4. В случае, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$A\tau_{xz}^2 + B\tau_{yz}^2 = k_0^2 + k_1^2(x) + k_2^2(y), \quad (19)$$

где $A, B, k_0 - const$, k_1, k_2 – некоторые функции соответственно от x и y , вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\begin{aligned} A\tau_{xz}^2 - k_2^2(y) &= c_{41} = const, \\ B\tau_{yz}^2 - k_1^2(x) &= c_{42} = const. \end{aligned} \quad (20)$$

Характеристики определяются из уравнения

$$\int \frac{dx}{\sqrt{B(k_1^2(x) + c_{42})}} + \int \frac{dy}{\sqrt{A(k_2^2(y) + c_{41})}} = c_4, \quad (21)$$

где $c_4 = const$.

5. В случае, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$M^2(y)\tau_{xz}^2 + N^2(x)\tau_{yz}^2 = k^2, \quad (22)$$

где $k - const$, $M(y), N(x)$ – некоторые функции.

Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\begin{aligned} N(x)\tau_{yz} &= c_{51} = const, \\ M(y)\tau_{xz} &= c_{52} = const. \end{aligned} \quad (23)$$

Характеристики определяются из уравнения

$$\int \frac{dx}{c_{51}N(x)} + \int \frac{dy}{c_{52}M(y)} = c_5, \quad (24)$$

где $c_5 = const$.

В случаях, когда через данную точку сечения стержня проходят две и более характеристик, возникает неопределенность в определении напряжений и невозможно построить непрерывные решения. Эта неопределенность устраняется введением линии разрыва напряжений. На линии разрыва напряжений нормальная к ней составляющая вектора касательного напряжения $\bar{\tau} = \tau_{xz}\bar{i} + \tau_{yz}\bar{j}$ непрерывна. Из этого условия получим соотношение для определения линии разрыва напряжений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}^+ - \tau_{yz}^-}{\tau_{xz}^+ - \tau_{xz}^-}, \quad (25)$$

где индексы «плюс» и «минус» наверху определяют соответственно компоненты напряжения слева и справа от линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Быковцев, Г. И.* Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред : сб. статей / Г. И. Быковцев. – Владивосток : Дальнаука, 2002. – 566 с.
- [2] *Миронов, Б. Г.* Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 108–112.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – Т. 3. – № 2 (8). – С. 576–579.

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

B. G. Mironov

TO THE THEORY OF TORSION OF NON-UNIFORM CORES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. This article examines the torsion inhomogeneous anisotropic perfectly plastic material rods with arbitrary condition of plasticity. The characteristics of the studied equations and relations along the characteristics, as well as some special cases limit state conditions obtained integrals basic relations.

Keywords: stress, ductility, translational anisotropy, pipe layer.

REFERENCES

- [1] *Bykovtsev, G. I.* Chosen problematic issues of mechanics of deformable environments: collection of articles / G. I. Bykovtsev. – Vladivostok : Dalnauka, 2002. – 566 p.
- [2] *Derevyannih, E. A.* About the general ratios of the theory of torsion of anisotropic cores / E. A. Derevyannih, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2012. – № 4 (76). – P. 108–112.
- [3] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 232 p.
- [4] *Ivlev, D. D.* About ratios of transmitting idealnoplastichesky anisotropy at torsion / D. D. Ivlev, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – Vol. 3. – № 2 (8). – P. 576–579.

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Баженов В. Г., Дюкина Н. С.</i> Численное решение трехмерных задач сейсмостойкости заглубленных сооружений.....	3
<i>Кукуджанов К. В., Коломиец А. В., Левитин А. Л.</i> Процессы деформирования и разрушения стохастически неоднородных упруговязкопластических материалов с дефектами при электродинамическом и термомеханическом нагружении.....	11
<i>Матвеев К. А., Моховнев Д. В., Немировский Ю. В.</i> Предельное упругое состояния сжимаемых кольцевых пластин при различных структурах армирования.....	22
<i>Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.</i> Идентификация параметров модели разрушения для анизотропных конструкций.....	33
<i>Пузино Ю. А.</i> Определение параметров модели при горячей деформации стали AISI304 по результатам испытаний на сжатие.....	46
<i>Серегин С. В.</i> Изгибно-крутильные колебания бисимметричного тонкостенного стержня как системы связанных пластин.....	53
<i>Никитин А. В., Миронов Б. Г.</i> Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы.....	58
<i>Шашкин А. И., Переяславская И. И.</i> Применение метода быстрых разложений для нахождения напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра с учетом силы тяжести.....	68
<i>Башкатов А. В., Теличко В. Г., Трещев А. А.</i> Моделирование напряженно-деформированного состояния конструкций из железобетона и полимербетона с учетом влияния агрессивной среды.....	80
<i>Бутенко А. Э., Бугрова А. Д., Аксенов С. А., Бобер С. А.</i> Термоупругий анализ комплекса Atmospheric Chemistry Suite орбитального зонда Trace Gas Orbiter миссии EхоMars.....	89
<i>Абруков Д. А.</i> Изгиб полуполосы со свободными продольными краями, на торце которой заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Точное решение краевой задачи.....	94
<i>Гоцев Д. В., Бунтов А. Е.</i> Устойчивость монолитной крепи подземного нефтехранилища сферической формы с учетом начальной пористости материала.....	114
<i>Минаева Н. В., Шашкин А. И.</i> Анализ и исследование проблемы существования квазистатического процесса.....	124

<i>Ахундова П. Э.</i> Предельно-равновесное состояние втулки контактной пары при наличии трещины	129
<i>Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.</i> Вязкопластическое течение в плоском слое при учете разогрева за счет деформирования и трения на границе	137
<i>Белых С. В., Бормотин К. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н.</i> О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами	144
<i>Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю.</i> Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области	157
<i>Казбеков Б. Б.</i> Поперечный изгиб перфорированной пластины, ослабленной прямолинейными трещинами	167
<i>Чичурин А. В., Швычкина Е. Н.</i> Об интегрируемости систем третьего порядка, эквивалентных уравнению Швази с шестью неподвижными полюсами	176
<i>Пилягин А. В.</i> Повышение достоверности определения модуля деформации грунтов по данным прессиометрических испытаний	188
<i>Никитин А. В., Коваленко М. Д.</i> Полуполоса, защемленная по продольным сторонам. Точное аналитическое решение	193
<i>Орлов В. Н., Иванов С. А.</i> Приближенное решение в области аналитичности одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка	204
<i>Семенова И. А.</i> Примеры аналитических решений обратной симметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе	215
<i>Дац Е. П., Ткачева А. В., Шпорт Р. В.</i> Сборка конструкции "кольцо в кольце" способом горячей посадки	225
<i>Мионов Б. Г.</i> К теории кручения неоднородных стержней	236
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	241
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	244
СОДЕРЖАНИЕ	246

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2014. № 4 (22)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, Л. А. Судленкова, П. А. Шалимова

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 26.12.2014 г. Выход в свет 30.12.2014.
Формат 70х100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 31,00.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38